Sorbonne Université
Groupes finis et leurs représentations
Janvier–Mai 2021.

Examen 2 – 8 juin 2021

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– Le devoir a un total de 60 points. Les notes $\geqslant 50$ seront considérées comme 50.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations irresponsables vous font perdre la confiance du correcteur : Il faut les éviter à tout prix.
– La bonne compréhension et interprétation des questions fait partie du devoir.
– Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (10 pts) Soit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & u \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})\,;\, \alpha\beta\gamma = 1 \right\};$$

vous pouvez admettre que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$. Exprimer G comme produit semi-direct $K \rtimes_\varphi Q$, où $K \simeq \mathbb{C}$ et $Q \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ et φ est à déterminer. (Ici, $\mathbb{C}^*$ est considéré comme groupe via la multiplication des complexes, et $\mathbb{C}$ via l'addition.)

Exercice 2. (27 pts) Soit G un groupe fini d'ordre n, $\mathbb{K}$ un corps arbitraire et R la représentation régulière à gauche (sur $\mathbb{K}$). Dit autrement, si L désigne l'ensemble G avec l'action à gauche de G par $g * \ell = g\ell$ pour tout $g \in G$ et $\ell \in L$, alors $R = F(L, \mathbb{K})$ dans la notation du cours. On souhaite montrer l'existence d'un isomorphisme de représentations

$$A : R \otimes_{\mathbb{K}} R \longrightarrow R^n. \tag{†}$$

1/ (12 pts) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Utiliser la théorie des caractères* pour assurer l'existence de A dans (†).

On traite le cas général.

2/ (5 pts) Soit L l'ensemble G avec l'action par translations comme au début de cet exercice. Soit T l'ensemble G avec l'action triviale, c'est-à-dire, $g * t = t$ pour tout $g \in G$ et $t \in T$. On munit $L \times T$ et $L \times L$ de leurs actions produit évidentes. Construire une fonction G-equivariante $\varphi : L \times T \to L$ telle que

$$\Phi : L \times T \longrightarrow L \times L,$$
$$(\ell, t) \longmapsto (\ell, \varphi(\ell, t))$$

soit une *bijection* G–équivariante.

3/ (10 pts) Établir l'existence du isomorphisme A dans (†) en général.

Indication : Travailler avec des bases et dénombrer T en posant $T = \{t_1, \dots, t_n\}$.

Exercice 3. (23 pts) Soient G un groupe arbitraire, $\mathbb{K}$ un corps arbitraire. Soit V une représentation de dimension finie. Une filtration de Jordan-Hölder (FJH) de V est une suite de sous-représentations

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m = V$$

telles que les quotients V_i/V_{i-1} sont tous des représentations *simples*. Pour une telle filtration, on appelle les quotients $\{V_i/V_{i-1} : i = 1, \dots, m\}$ ses facteurs de Jordan-Hölder.

(1) (5 pts) Montrer que chaque représentation (de dimension finie) V de G possède une FJH. Indication : Récurrence sur la dimension et le fait que si $\pi : Y \to X$ est application linéaire surjective entre espaces vectoriels, alors l'application linéaire déduite de π,

$$\overline{\pi} : \pi^{-1}(X')/\pi^{-1}(X'') \to X'/X'',$$

est un isomorphisme pour tout couple de sous-espaces $X'' \subset X'$ de X.

(2) (7 pts) Soient V et W deux représentations de dimension finie de G ayant respectivement des FJH

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m = V \quad \text{et} \quad \{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_n = W$$

Montrer que si $\mathrm{Hom}_G(V, W) \neq 0$, alors il existe un certain $i \in \{1, \dots, m\}$ et un certain $j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $V_i/V_{i-1} \simeq W_j/W_{j-1}$. Indication : Soit $\varphi : V \to W$ un morphisme G-équivariant non-nul. Considérer $p = \min\{i \in \{1, \dots, m\} : \varphi(V_i) \neq 0\}$.

(3) (11 pts) On suppose maintenant G fini et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit V une représentation de dimension finie de G.

1/ (2 pts) Donner la définition d'une décomposition isotypique de V.

2/ (4 pts) Soit $W \subset V$ une sous-représentation. Que pouvez-vous dire sur le lien entre les représentations simples intervenant dans une décomposition isotypique de W et dans une décomposition isotypique de V ? (N'oubliez pas de justifier votre réponse.)

3/ (5 pts) Soient $S_1, \dots, S_r$ des représentations simples intervenant dans une décomposition isotypique de V. Soit $\{0\} = V_0 \subset \cdots \subset V_m$ une FJH de V. Montrer que pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$, il existe un $j \in \{1, \dots, r\}$ tel que $V_i/V_{i-1} \simeq S_j$.