Sorbonne Université
Groupes finis et leurs représentations
Janvier–Mai 2021.

Examen 2 – 8 juin 2021

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– Le devoir a un total de 60 points. Les notes $\geqslant 50$ seront considérées comme 50.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations irresponsables vous font perdre la confiance du correcteur : Il faut les éviter à tout prix.
– La bonne compréhension et interprétation des questions fait partie du devoir.
– Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (10 pts) Soit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & u \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}) \,;\, \alpha\beta\gamma = 1 \right\};$$

vous pouvez admettre que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$. Exprimer G comme produit semi-direct $K \rtimes_\varphi Q$, où $K \simeq \mathbb{C}$ et $Q \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ et φ est à déterminer. (Ici, $\mathbb{C}^*$ est considéré comme groupe via la multiplication des complexes, et $\mathbb{C}$ via l'addition.)

Correction. Soit

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} : \alpha\beta\gamma = 1 \right\}$$

et

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{C} \right\}.$$

Ils sont clairement des sous-groupes de G et, en plus,

$$(\alpha, \gamma) \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & 1/\alpha\gamma & \\ & & \gamma \end{pmatrix}, \qquad u \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & & u \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

définissent des isos $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \simeq T$ et $\mathbb{C} \simeq U$. Puis,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma u \\ 0 & 1/\alpha\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

et il suit que n'importe quel élément de G s'écrit de la forme $x \cdot y$ avec $x \in U$ et $y \in T$. En plus, $T \cap U = e$.

Comme

$$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & u \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (\alpha/\gamma) \cdot u \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

on voit que T normalise U et il suit que G est produit semi-direct $U \rtimes_\varphi T$ avec

$$\varphi : (\mathbb{C}^*)^2 \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{C}), \quad (\alpha, \gamma) \longmapsto (u \mapsto (\alpha/\gamma) \cdot u).$$

Notation : 4 pts pour T et U. 4 pts verifier semi-direct. 2 pts action φ. □

Exercice 2. (27 pts) Soit G un groupe fini d'ordre n, $\mathbb{K}$ un corps arbitraire et R la représentation régulière à gauche (sur $\mathbb{K}$). Dit autrement, si L désigne l'ensemble G avec l'action à gauche de G par $g * \ell = g\ell$ pour tout $g \in G$ et $\ell \in L$, alors $R = F(L, \mathbb{K})$ dans la notation du cours. On souhaite montrer l'existence d'un isomorphisme de représentations

$$A : R \otimes_{\mathbb{K}} R \longrightarrow R^n. \tag{†}$$

1/ (12 pts) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Utiliser la théorie des caractères* pour assurer l'existence de A dans (†).

Correction. On sait que $\chi_R(g) = |\mathrm{Fix}(g)|$, où g est vu ici comme bijection $L \to L$ (4 pts). Donc $\chi_R(e) = n$ et $\chi_R(g) = 0$ si $g \neq e$. Donc $\chi_{R \otimes R}(g) = 0$ si $g \neq e$ et n^2 si $g = e$ (4 pts). Ensuite, $\chi_{R^n}(g) = n\chi_R(g)$ et donc si $g = e$ on a n^2 et si $g \neq e$ on aura 0. Or, on sait d'après le cours que si deux représentations ont le même caractère elles sont isomorphes, d'où l'existence de A. (4 pts)

□

On traite le cas général.

2/ (5 pts) Soit L l'ensemble G avec l'action par translations comme au début de cet exercice. Soit T l'ensemble G avec l'action triviale, c'est-à-dire, $g * t = t$ pour tout $g \in G$ et $t \in T$. On munit $L \times T$ et $L \times L$ de leurs actions produit évidentes. Construire une fonction G-equivariante $\varphi : L \times T \to L$ telle que

$$\Phi : L \times T \longrightarrow L \times L,$$
$$(\ell, t) \longmapsto (\ell, \varphi(\ell, t))$$

soit une *bijection* G–équivariante.

Correction. On définit $\varphi(\ell, t) = \ell t$. L'inverse de Φ est ainsi $\Psi(\ell, x) = (\ell, \ell^{-1}x)$, comme on vérifie facilement : $\Phi(\Psi(\ell, x)) = \Phi(\ell, \ell^{-1}x) = (\ell, x)$ et $\Psi(\Phi(\ell, t)) = \Psi(\ell, \ell t) = (\ell, \ell^{-1}\ell t) = (\ell, t)$. □

3/ (10 pts) Établir l'existence du isomorphisme A dans (†) en général.

Indication : Travailler avec des bases et dénombrer T en posant $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$.

Correction. On sait que pour deux G-ensembles quelconques X et Y, il existe un isomorphisme $F(X) \otimes_{\mathbb{K}} F(Y) \simeq F(X \times Y)$ définit par $\delta_x \otimes \delta_y \mapsto \delta_{(x,y)}$ (5 pts). Donc, $F(L \times T) \simeq F(L) \otimes_{\mathbb{K}} F(T)$ et $F(L \times L) \simeq F(L) \otimes_{\mathbb{K}} F(L)$. Or, on dénombre $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$. Une base de $F(L) \otimes F(T)$ est $\{\delta_\ell \otimes \delta_{t_i}, : \ell \in L,\, i = 1, \ldots, n\}$ et puisque $g(\delta_\ell \otimes \delta_{t_i}) = \delta_{g\ell} \otimes \delta_{t_i}$, on voit que $F(L) \otimes F(T) \to F(L)^n$ définie par

$$\delta_g \otimes \delta_{t_i} \longmapsto (0, \ldots, 0 \underbrace{\delta_g}_{i\text{-ème place}}, 0, \ldots, 0)$$

est une bijection G–équivariante (5 pts). □

Exercice 3. (23 pts) Soient G un groupe arbitraire, $\mathbb{K}$ un corps arbitraire. Soit V une représentation de dimension finie. Une filtration de Jordan-Hölder (FJH) de V est une suite de sous-représentations

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m = V$$

telles que les quotients V_i/V_{i-1} sont tous des représentations *simples*. Pour une telle filtration, on appelle les quotients $\{V_i/V_{i-1} : i = 1, \ldots, m\}$ ses facteurs de Jordan-Hölder.

(1) (5 pts) Montrer que chaque représentation (de dimension finie) V de G possède une FJH. Indication : Récurrence sur la dimension et le fait que si $\pi : Y \to X$ est application linéaire surjective entre espaces vectoriels, alors l'application linéaire déduite de π,

$$\overline{\pi} : \pi^{-1}(X')/\pi^{-1}(X'') \to X'/X'',$$

est un isomorphisme pour tout couple de sous-espaces $X'' \subset X'$ de X.

Correction. Si $\dim V = 1$, alors V est simple et le résultat est trivial. On suppose $\dim V > 1$; si V est simple, il ne reste rien à faire. Sinon, il existe une sous-représentation $W \subset V$. Or, soit $0 = W_0 \subset \cdots \subset W_m = W$ une FJH. Soient $Q = V/W$, $\pi : V \to Q$ la projection et $0 = Q_0 \subset \cdots \subset Q_n = Q$ une FJH. On désigne par V_j l'image réciproque de Q_j via π. Clairement, $V_0 = W$ et $V_n = V$. Puis, on a un isomorphisme équivariant $\pi : V_i/V_{i-1} \to Q_i/Q_{i-1}$, d'où chaque V_i/V_{i-1} est simple. On déduit que

$$0 = W_0 \subset \cdots \subset W_m = V_0 \subset \cdots \subset V_n$$

est FJH. □

(2) (7 pts) Soient V et W deux représentations de dimension finie de G ayant respectivement des FJH

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m = V \quad \text{et} \quad \{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_n = W$$

Montrer que si $\mathrm{Hom}_G(V, W) \neq 0$, alors il existe un certain $i \in \{1, \ldots, m\}$ et un certain $j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $V_i/V_{i-1} \simeq W_j/W_{j-1}$. Indication : Soit $\varphi : V \to W$ un morphisme G-équivariant non-nul. Considérer $p = \min\{i \in \{1, \ldots, m\} : \varphi(V_i) \neq 0\}$.

Correction. On suppose que $\varphi(V_p) \subset W_j$ mais $\varphi(V_p) \not\subset W_{j-1}$. Ceci existe car si $\varphi(V_p) \subset W_j$ pour tout j, alors $\varphi(V_p) = 0$. Donc, la composition $\varphi' = V_p \xrightarrow{\varphi} W_j \xrightarrow{\mathrm{pr}} W_j/W_{j-1}$ est non-nulle. Mais $\varphi(V_{p-1}) = 0$ et donc φ' définit un morphisme G-équivariant et non-nul $V_p/V_{p-1} \to W_j/W_{j-1}$. Par Schur on obtient un iso. □

(3) (11 pts) On suppose maintenant G fini et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit V une représentation de dimension finie de G.

1/ (2 pts) Donner la définition d'une décomposition isotypique de V.

2/ (4 pts) Soit $W \subset V$ une sous-représentation. Que pouvez-vous dire sur le lien entre les représentations simples intervenant dans une décomposition isotypique de W et dans une décomposition isotypique de V ? (N'oubliez pas de justifier votre réponse.)

Correction. Soit $W \simeq T_1 \oplus \cdots \oplus T_s$. Soit $V \simeq S_1 \oplus \cdots \oplus S_r$. Soit j fixé. On sait que la composition $T_j \to W \to V \to S_i$ ne peut pas être nulle pour tout i, donc $T_j \simeq S_i$. Il suit que chaque rep simple intervenant dans une décomposition isotypique de W est isomorphe à une □

3/ (5 pts) Soient $S_1, \ldots, S_r$ des représentations simples intervenant dans une décomposition isotypique de V. Soit $\{0\} = V_0 \subset \cdots \subset V_m$ une FJH de V. Montrer que pour chaque $i \in \{1, \ldots, m\}$, il existe un $j \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $V_i/V_{i-1} \simeq S_j$.

Correction. On sait que $V_i \simeq S_{i_1} \oplus \cdots \oplus S_{i_t}$ pour certains i_k. Soit $\pi : V_i \to V_i/V_{i-1}$ la projection. On voit facilement que pour un certain k, la restriction $\pi : S_{i_k} \to V_i/V_{i-1}$ n'est pas nulle. Donc, par Schur, $S_{i_k} \simeq V_i/V_{i-1}$. □