Université de Montpellier
Mathématiques pour Polytech (HA8301H)
Septembre–Décembre 2024.

Devoir surveillé 1 – Durée 1h20

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– L'épreuve est notée sur 20. Le total des points fait 24 et les notes $\geqslant$ 20 seront considérées comme 20.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations déraisonnables vous font perdre la confiance du correcteur : évitez-les.
– La bonne compréhension et interprétation des questions font partie de l'examen.
– Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (0,5pt+0,5pt+2pts)**.** Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soient

$$a_n = n(2 + (-1)^n), \quad b_n = \frac{6^n + n^9}{1 + 7^n}, \quad c_n = \frac{2^n}{n!}.$$

Parmi les suites (a_n), (b_n), et (c_n), quelles sont convergentes ?

Exercice 2 (2pts+3pts)**.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on écrit $\varphi_n = e^{\mathrm{i}n\theta}$ et $c_n = \cos(n\theta)$.

(1) On suppose que (φ_n) converge. Montrer que $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

(2) On suppose que $\theta \notin \mathbb{Z}\pi$. Montrer que (c_n) diverge. *Indication :* Étudier la suite $(c_{n+1})_{n=0}^{\infty}$.

Exercice 3 (1pt+3pts+3pts+1pts)**.** Si x et y sont des réels positifs, on définit leur moyenne arithmétique comme $\frac{x+y}{2}$ et leur moyenne géométrique comme $\sqrt{xy}$.

(1) Montrer que $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$.

On se donne à présent $r, s \in [0, +\infty[$ et on définit les suites positives (vous pouvez l'admettre) (a_n) et (g_n) de la façon suivante : $a_0 = \frac{r+s}{2}$, et $g_0 = \sqrt{rs}$, et

$$g_{n+1} = \sqrt{g_n a_n}, \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \frac{g_n + a_n}{2}.$$

(2) Montrer que (a_n) est convergente.

(3) Montrer que (g_n) est convergente.

(4) Quel est le lien entre $a = \lim a_n$ et $g = \lim g_n$?

Exercice 4. (1) (1pt+1pt+1pt+2,5pts) Déterminer si la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$, où a_n est définit dans les items suivants, converge ou diverge.

$$\text{(i) } a_n = \frac{1}{2 + 3^{-n}}, \quad \text{(ii) } a_n = \frac{(3n^3 + 9n + 7)^2}{(2n^2 + 1)^4},$$

$$\text{(iii) } \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}, \quad \text{(iv) } a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

(2) (2,5pts) En employant un théorème prouvé en cours, déterminer si $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \log(n)}$ converge ou diverge.