Université de Montpellier
Mathématiques pour Polytech (HA8301H)
Septembre–Décembre 2024.

Devoir surveillé 1 – Durée 1h20

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– L'épreuve est notée sur 20. Le total des points fait 24 et les notes $\geqslant$ 20 seront considérées comme 20.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations déraisonnables vous font perdre la confiance du correcteur : évitez-les.
– La bonne compréhension et interprétation des questions font partie de l'examen.
– Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (0,5pt+0,5pt+2pts)**.** Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soient

$$a_n = n(2 + (-1)^n), \quad b_n = \frac{6^n + n^9}{1 + 7^n}, \quad c_n = \frac{2^n}{n!}.$$

Parmi les suites (a_n), (b_n), et (c_n), quelles sont convergentes ?

Correction. Clairement $a_{2n} = 3n$ n'est pas bornée $\Rightarrow$ (a_n) n'est pas bornée $\Rightarrow$ divergente. Ensuite, $b_n = \dfrac{n^9 \cdot 7^{-n} + (6/7)^n}{1 + (1/7)^n}$. Or, $n^9 \cdot 7^{-n} \to 0$, $(6/7)^n \to 0$ et $1 + (1/7)^n \to 1$ et la limite vaut 0. $\square$

Ensuite, $0 \leqslant c_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{n} \leqslant 2 \cdot \frac{2}{n}$. Donc $\lim c_n = 0$.

Exercice 2 (2pts+3pts)**.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on écrit $\varphi_n = e^{in\theta}$ et $c_n = \cos(n\theta)$.

(1) On suppose que (φ_n) converge. Montrer que $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Correction. Si φ_n converge $\Rightarrow$ (φ_n) Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N t.q. si $n \geqslant N \Rightarrow$ $|\varphi_n - \varphi_{n+1}| \leqslant \varepsilon$. Mais $|\varphi_n - \varphi_{n+1}| = |e^{in\theta}| \cdot |1 - e^{i\theta}| = |1 - e^{i\theta}|$. Or, si $\varepsilon = |1 - e^{i\theta}|/2$, on arrive à $|1 - e^{i\theta}| \leqslant |1 - e^{i\theta}|/2$. Donc $|1 - e^{i\theta}| = 0$ et $n \in 2\pi\mathbb{Z}$. $\square$

(2) On suppose que $\theta \notin \mathbb{Z}\pi$. Montrer que (c_n) diverge. *Indication :* Étudier la suite $(c_{n+1})_{n=0}^{\infty}$.

Correction. On a $c_{n+1} = c_n c_1 - s_n s_1$, où $s_n = \sin(n\theta)$. Si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, alors $s_1 \neq 0$. Donc $(c_n c_1 - c_{n+1})/s_1 = s_n$. Or, si (c_n) converge, alors (c_{n+1}) converge aussi $\Rightarrow s_n$ converge. Donc $\varphi_n = c_n + \mathrm{i}s_n$ converge. Donc θ est un multiple de 2π. Contradiction. $\square$

Exercice 3 (1pt+3pts+3pts+1pts)**.** Si x et y sont des réels positifs, on définit leur moyenne arithmétique comme $\dfrac{x+y}{2}$ et leur moyenne géométrique comme $\sqrt{xy}$.

(1) Montrer que $\dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$.

Correction. Il suffit de montrer que $x^2 + 2xy + y^2 \geqslant 4xy$, i.e. $x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0$. Mais $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$. $\square$

On se donne à présent $r, s \in [0, +\infty[$ et on définit les suites positives (vous pouvez l'admettre) (a_n) et (g_n) de la façon suivante : $a_0 = \dfrac{r+s}{2}$, et $g_0 = \sqrt{rs}$, et

$$g_{n+1} = \sqrt{g_n a_n}, \quad \textit{et} \quad a_{n+1} = \frac{g_n + a_n}{2}.$$

(2) Montrer que (a_n) est convergente.

Correction. Comme $a_{n+1} = \dfrac{a_n + g_n}{2} \leqslant \dfrac{a_n + a_n}{2} = a_n \Rightarrow (a_n)$ décroissante. Étant positive, elle est convergente. 2pts pour monotonie + 2pts pour bornée et minorée converge. $\square$

(3) Montrer que (g_n) est convergente.

Correction. On a $g_{n+1} = \sqrt{a_n g_n} \geqslant \sqrt{g_n g_n} = g_n$. La suite est croissante $\Rightarrow$ comme $g_n \leqslant a_n \leqslant a_0 \Rightarrow$ est bornée $\Rightarrow$ converge. 1pt pour monotone+1pt bornée et monotone est convergente. $\square$

(4) Quel est le lien entre $a = \lim a_n$ et $g = \lim g_n$?

Correction. On a $a = \dfrac{a+g}{2} \Rightarrow \dfrac{a}{2} = \dfrac{g}{2} \Rightarrow g = a$. $\square$

Exercice 4. (1) (1pt+1pt+1pt+2,5pts) Déterminer si la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, où a_n est définit dans les items suivants, converge ou diverge.

$$\text{(i) } a_n = \frac{1}{2 + 3^{-n}}, \quad \text{(ii) } a_n = \frac{(3n^3 + 9n + 7)^2}{(2n^2+1)^4},$$

Correction. (i) La série diverge, car $a_n \to \frac{1}{2} \neq 0$.

(ii) On a

$$\frac{(3n^3 + 9n + 7)^2}{(2n^2 + 1)^4} = \frac{9n^6}{16n^8} \cdot \frac{(1 + \frac{3}{n^2} + \frac{7}{3n^3})}{(1 + \frac{1}{2n^2})^4} \sim \frac{9}{16}\frac{1}{n^2}.$$

La convergence de $\sum \frac{9}{16}\frac{1}{n^2}$ entraine la convergence de notre série. $\square$

$$\text{(iii)}\ \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}, \quad \text{(iv)}\ a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Correction. (iii) La convergence suit directement du critère de Leibniz, étant donné que $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$ est une suite décroissante, positive et convergeant vers 0. (iv) On applique le critère de d'Alembert, puisque que $a_n \geqslant 0$. On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n(n+1)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \to \frac{1}{e} < 1.$$

$\square$

(2) (2,5pts) En employant un théorème prouvé en cours, déterminer si $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \log(n)}$ converge ou diverge.

Correction. On observe que $n \mapsto \dfrac{1}{n \log n}$ est positive et décroissante. Donc la série converge si et seulement si $\displaystyle\sum_{\ell} \frac{2^\ell}{2^\ell \log(2^\ell)}$ converge. Mais $\dfrac{2^\ell}{2^\ell \log(2^\ell)} = \dfrac{1}{\ell \log(2)}$ et la divergence suit du critère de condensation. $\square$