Université de Montpellier
Mathématiques pour Polytech (HA8301H)
Septembre–Décembre 2024.

Devoir encadré 1 (2 heures)

Exercice 1. (1) Calculer la limite ℓ de la suite (x_n) définie par $x_n = \dfrac{2n^2+1}{5n^2+4}$. Ensuite, déterminer $N \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - 10^{-6} \leqslant x_n \leqslant \ell + 10^{-6}$ pour tout $n \geqslant N$.

(2) Soient (z_n) et (w_n) les suites définies par $z_n = \mathrm{i}^n + 2^{-n}$ et $w_n = \left(\dfrac{3+4\mathrm{i}}{5}\right)^n$. Sont-elles convergentes ? Si oui, déterminer leurs limites.

Exercice 2. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$p_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1}.$$

(1) Montrer que $\dfrac{p_n}{\sqrt{n}}$ est décroissante.

(2) Montrer que $\dfrac{p_n}{\sqrt{n+1}}$ est croissante.

(3) En déduire l'existence d'un $p \in \mathbb{R}$ tel que $(p_n) \sim (p\sqrt{n})$.

(4) Montrer que

$$\binom{2n}{n} = \frac{2^{2n}}{p_n}$$

et prouver que

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{p\sqrt{n}}.$$

Exercice 3. On veut montrer que $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$ vaut le nombre d'or $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(1) Soit $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ définie par $\varphi_1 = 1$ et $\varphi_{n+1} = \sqrt{1+\varphi_n}$. Montrer que (φ_n) est croissante.

(2) Montrer que (φ_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 4. Déterminer si les séries suivantes convergent ou divergent.

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^5-4n^2}{n^6+n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2+n\cdot 2^n}{3^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(2-\frac{1}{n}\right)^{-n}$