Université de Montpellier
Mathématiques pour Polytech (HA8301H)
Septembre–Décembre 2024.

Devoir encadré 2. Durée : 2 heures

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– L'épreuve est notée sur 20. Le total des points fait 25 et les notes $\geqslant$ 20 seront considérées comme 20.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– La bonne compréhension et interprétation des questions font partie du devoir.

Exercice 1 (Séries numériques)**.** (1) Déterminer si la série $\sum_{k\geqslant 1} \sin\left(k\pi + \frac{1}{k}\right)$ converge ou diverge. (**2pts**)

(2) On souhaite étudier la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\log^2(k)}$. (À toutes fins utiles : $\log^2(t) = [\log(t)]^2$.)

(a) Montrer que $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\log^2(k)}$ converge. (**1pt**) Soit $S = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log^2(k)}$.

(b) En employant la comparaison avec une intégrale, déterminer un $n \geqslant 2$ tel que l'erreur

$$S - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\log^2(k)}$$

soit strictement inférieure à $\frac{1}{3\times 10^6}$. (**5 pts**)

Exercice 2. Déterminer si les intégrales

$$A = \int_1^{\infty} t^5 e^{-t}\, dt, \quad \text{et} \quad B = \int_0^{\pi/4} \frac{\log(\cos(t))}{t^2\sqrt{t}}\, dt$$

convergent ou divergent. (**1pts+4pts**)

Exercice 3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé.

(a) Montrer que, pour chaque $x \in]0, +\infty[$, la série

$$S(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} e^{-nx}$$

converge. (**1pt**)

(b) Montrer que la fonction $S :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ainsi déduite est de classe C^1. (**4pts**)

(c) Soit $x > 0$. Utiliser une série géométrique et le nombre complexe $z = e^{-x+\mathrm{i}\theta}$ pour justifier l'égalité

$$-S'(x) = \frac{\cos\theta - e^{-x}}{1 - 2e^{-x}\cos\theta + e^{-2x}}.$$

(**3pts**)

(d) Montrer que $|S(x)| \leqslant \dfrac{1}{e^x - 1}$ pour tout $x > 0$. Quel est la limite $\lim_{x\to\infty} S(x)$? (**1pt**)

(e) En utilisant les deux questions précédentes, montrer que

$$S(x) = -\frac{1}{2}\log(1 - 2e^{-x}\cos\theta + e^{-2x}).$$

(**3pts**)