Université de Montpellier
Mathématiques pour Polytech (HA8301H)
Septembre–Décembre 2024.

Devoir encadré 3. Durée : 2 heures

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$.

(1) (**1pt**) Montrer que $\sum_n f_n(x)$ converge pour tout $x \geqslant 0$.

Correction. Il est clair que $f_n(0) = 0$, donc la convergence pour $x = 0$ est immédiate. Ensuite,

$$\frac{n^2x^2}{(1+nx)(1+(n+1)x)} \longrightarrow 1$$

et $f_n(x) \sim_n n^{-2}x^{-2}$ et la série $\sum_n n^{-2}x^{-2}$ converge. □

(2) (**4pts**) Montrer que la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Correction. Soient $0 < a < b$. On montre que la convergence de la série $\sum_n f_n$ est normale sur $[a, b]$. Or, $(1+nx)(1+nx+x) \geqslant (1+na)(1+a+na) \Rightarrow 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{b}{(1+na)(1+na+a)}$. Comme $\displaystyle\sum_n \frac{b}{(1+na)(1+na+a)}$ converge $\Rightarrow$ convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme $\Rightarrow$ S est continue sur $[a, b]$. Or, soit $x_0 > 0$ quelconque et soient $0 < a < x_0 < b \Rightarrow S$ est continue sur $[a, b]$ et S est continue sur $x_0 \Rightarrow S$ est continue sur $]0, +\infty[$. □

Exercice 2 (La suite de Fibonacci)**.** Il y a plus de 800 ans, Leonardo Pisano, connu comme Fibonacci, s'est mis à étudier la suite numérique suivante :

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad \ldots,$$

c'est à dire, la suite (F_n) définie par

$$F_0 = F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ pour } n \geqslant 2.$$

A. de Moivre a montré que la suite de Fibonacci est liée à une autre merveille mathématique : le nombre d'or $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dans cet exercice, on va retrouver cette connexion à l'aide des séries entières.

(1) (**3pts**) On définit la série entière $S(x) = \sum_0^\infty F_n x^n$. Montrer que son rayon de convergence est $\geqslant \frac{1}{2}$. *Indication :* Montrer que $F_n \leqslant 2^n$.

Correction. Il est facile de montrer que $F_n \leqslant 2^n$. Il suit que si $0 < x < \frac{1}{2}$, alors la série $\sum_n F_n x^n$ converge absolument par comparaison avec $\sum 2^n x^n$. La définition du rayon de convergence R donne immédiatement que $R \geqslant \frac{1}{2}$. □

(2) (**1pts**) Montrer que

$$(1 - x - x^2)S(x) = 1, \qquad \forall\, x \in \left]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right[.$$

Correction. On a

$$\begin{aligned}(1 - x - x^2) \cdot S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - \sum_{n=1} F_{n-1} x^n - \sum_{n=2} F_{n-2} x^n \\ &= F_0 + F_1 x - F_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_n - F_{n-1} - F_{n-2}) x^n \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

(3) (**1pts**) Soient

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

les deux racines de $x^2 + x - 1$. Trouver $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{\alpha, \beta\}$ on ait

$$\frac{1}{x^2 + x - 1} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}.$$

Correction. On écrit

$$\frac{1}{x^2 + x - 1} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}.$$

Il est facile de voir que

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

□

(4) (**3pts**) Montrer que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \varphi^{n+1} - \psi^{n+1} \right\},$$

où $\psi = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$. *Indication :* On a $\alpha^{-1} = \varphi$ et $\beta^{-1} = \psi$.

Correction. On a
$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{x-\beta} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{x-\alpha}.$$
Or, si $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, on sait que $S(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$. Il suit que
$$\sqrt{5}\cdot S(x) = -\frac{\beta^{-1}}{1-\beta^{-1}x} + \frac{\alpha^{-1}}{1-\alpha^{-1}x}.$$

D'où,
$$\begin{aligned}\sqrt{5}\cdot S(x) &= \alpha^{-1}\sum_0^\infty \alpha^{-n}x^n - \beta^{-1}\sum_0^\infty \beta^{-n}x^n \\ &= \sum_0^\infty (\alpha^{-n-1} - \beta^{-n-1})x^n.\end{aligned}$$

Or, il est clair que $\alpha^{-1} = \varphi$ et $\beta^{-1} = \psi$ et donc
$$S(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}\right\}x^n$$

□

(5) (**2pts**) Déterminer exactement le rayon de convergence de S.

Correction. On note que $\varphi > 1$ et $\varphi\psi = -1 \Rightarrow \varphi\cdot|\psi| = 1$. Donc
$$\frac{\varphi^{n+2}-\psi^{n+2}}{\varphi^{n+1}-\psi^{n+1}} = \varphi\cdot\frac{1-(\psi/\varphi)^{n+2}}{1-(\psi/\varphi)^{n+1}} \longrightarrow \varphi.$$

Ceci étant, le rayon est $1/\varphi = 0,61\ldots$. □

Exercice 3 (L'équation de Weber)**.** (**6pts**) Soit k un nombre réel arbitraire. Montrer que l'équation différentielle
$$\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + ky = 0 \tag{W}$$
possède une solution $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est développable en série entière à l'origine avec rayon de convergence infini, et qui satisfait $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$.

Correction. Soit $\varphi(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ ayant un rayon $R > 0$. Si $|x| < R$, alors
$$\begin{aligned}\varphi''(x) - x\varphi'(x) + k\varphi(x) &= \sum_{n=2}^\infty n(n-1)\cdot a_n\cdot x^{n-2} - \sum_{n=1}^\infty n\cdot a_n\cdot x^n + \sum_{n=0}^\infty k a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^\infty (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^\infty n a_n x^n + \sum_{n=0}^\infty k a_n x^n.\end{aligned}$$

Par conséquent, si pour tout $n \geqslant 0$ on a

$$a_{n+2} = \frac{(n-k)}{(n+2)(n+1)} \cdot a_n, \tag{$*$}$$

alors φ est solution de l'équation (W). On *définit* ainsi $\varphi(x)$ comme étant $\sum a_n x^n$ où les coefficients satisfont la relation de récurrence $(*)$ ainsi que $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Or, de $(*)$ et $a_1 = 0$ on voit que $a_i = 0$ si i est impair. On souhaite maintenant montrer que $\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si k est un entier positif *pair*, par exemple $k = 2\ell$, il est clair que $a_{2\ell+2} = a_{2\ell+4} = \cdots = 0$ et φ est un *polynôme*. Sinon, a_{2m} ne s'annule jamais et de $(*)$ on déduit

$$\left| \frac{a_{2m+2} x^{2m+2}}{a_{2m} x^{2m}} \right| = \frac{|2m-k|}{(2m+2)(2m+1)} |x^2| \longrightarrow 0.$$

Le critère de d'Alembert montre que $\sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m}$ converge, et comme x est arbitraire, le rayon est ainsi $+\infty$. De $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$, on voit que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$. $\square$