Université de Montpellier
Mathématiques pour Polytech (HA8301H)
Septembre–Décembre 2024.

Integrales généralisées

Convergence par comparaison

Exercice 1. Soit $a > 0$ et soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive, décroissante et continue. Montrer que $\displaystyle\int_a^\infty f(t)\,dt$ converge si et seulement si, pour un certain $\ell > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty e^{\ell s} f(e^{\ell s})\,ds$ converge. En utilisant cette observation, étudier la convergence des intégrales

$$\int_2^\infty \frac{dt}{t \cdot [\log(t)]^\alpha},$$

où $\alpha > 0$.

Exercice 2. Après avoir déterminé les singularités, vérifier si les intégrales généralisées suivantes sont convergentes ou divergentes.

$$A = \int_0^\infty \sin(t)dt,\ B = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 1},\ C = \int_0^\infty e^{-t^2/2}\,dt,\ D = \int_0^1 \log(t)\,dt,$$

$$E = \int_0^1 \frac{e^{t^2}}{\sqrt{t}}\,dt,\ F = \int_0^1 \frac{\log(t)}{(1+t)^2}\,dt,\ G = \int_1^{+\infty} \frac{\log(t)}{(1+t)^2}\,dt,\ H = \int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t(3-t)}},$$

$$I = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt,\ J = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{\log(1+t)^{3/2}}\,dt,\ K = \int_0^1 \frac{(1+t)^{7/2} - 1}{\tan(t)}\,dt,$$

$$L = \int_0^1 \frac{1 - \cos(t)}{\sin(t)^4}\,dt,\ M = \int_2^\infty \frac{dt}{t \cdot [\log(t)]^3},\ N = \int_0^\infty \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\log(1+t)}\,dt.$$

Correction. A. On considère la primitive et on observe que l'intégrale ne converge pas.

B. et C. On compare avec $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$.

C. Il n'est pas difficile de trouver la primitive : $L(t) = t\log t - t$.

J. On sait que $e^t - 1 \sim t$ et que $\log(1+t) \sim t$ pour $t \downarrow 0$. Par conséquent, l'intégrande est équivalente à $t^{1-\frac{3}{2}} = t^{-1/2}$, qui est intégrable en 0.

K. On sait que $\tan(t) \sim t$ en 0. Puis, $(1+t)^{7/2} \sim 1 + \frac{7}{2}t$. Il suit que la fonction se prolonge par continuité.

M. Il s'agit d'une intégrale de Bertrand : on pose $t = e^s$ et on a $dt = e^s\,ds$ donc, $M = \displaystyle\int_{\log 2}^\infty \frac{ds}{s^3}$ et l'intégrale converge.

N. On a deux singularités. On étudie $N_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\log(1+t)}\,dt$ et $N_\infty = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\log(1+t)}\,dt$. On sait que $\left|\dfrac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\log(1+t)}\right| \leqslant \dfrac{\sqrt{t}}{\log(1+t)}$, que $\log(1+t) \sim t$ pour $t \downarrow 0$. Il suit que $\frac{\sqrt{t}}{\log(1+t)} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$, et la convergence en résulte. Puis, on a $\sin(1/t^2) \sim 1/t^2$ pour $t \to +\infty$ et donc l'intégrande est équivalente à $\dfrac{1}{t^{3/2}\log(1+t)}$. Or, mais $\int_1^\infty \frac{dt}{t^{3/2}}$ converge. $\square$

Exercice 3. On souhaite étudier $I = \displaystyle\int_0^\pi \log(\sin x)\,dx$.

(1) Montrer que I converge.

Correction. Comme $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$, on aura deux singularités. On sait que $\sin(x) = x + o(x)$. Donc,

$$\log(\sin(x)) = \log(x) + \log(1 + o(1)),$$

ce qui implique que $\log(\sin(x)) \sim \log(x)$ en 0. Donc, comme $\int_0 \log(x)\,dx$ converge, on voit que $\int_0 \log(\sin x)\,dx$ converge. Pour traiter la singularité en π, on note que $\sin(x) = \pi - x + o(\pi - x)$. Par conséquent, $\log(\sin(x)) = \log(\pi - x) + \log(1 + o(1))$, et donc $\log(\sin(x)) \sim \log(\pi - x)$. Convergence suit à nouveau du fait que $\int_0 \log(y)\,dy$ converge. $\square$

(2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\cos x)\,dx$ convergent et sont égales et en déduire que $I = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx$.

Correction. On note que si $x = \pi/2 - y$, alors $\sin(x) = \sin(\pi/2 - y) = \cos(y)$. Donc, $\int_0^{\pi/2} \log(\sin(x))\,dx = \int_0^{\pi/2} \log(\cos(y))\,dy$. Puis, on a $\int_{\pi/2}^{\pi} \log(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \log(\sin(\pi/2 + y))\,dy = \int_0^{\pi/2} \log(\cos y)\,dy$. $\square$

(3) En utilisant le changement de variable $x = 2y$ pour l'intégrale I et la question précédente, montrer que $I = -\pi \log 2$.

Correction. Maintenant on écrit

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \log(\sin x)\,dx &= 2\int_0^{\pi/2} \log(\sin(2y))\,dy \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \log(2\sin(y)\cos(y))\,dy \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \log(2)\,dy + 2\int_0^{\pi/2} \log(\sin y)\,dy + 2\int_0^{\pi/2} \log(\cos(y))\,dy \\
&= \pi \log 2 + 2\int_0^{\pi} \log(\sin y)\,dy
\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_a^\infty f(t)\,dt$ converge. On souhaite étudier $L := \lim_{t\to+\infty} f(t)$.

(1) On suppose que f est décroissante.

(i) Montrer que $L = 0$.

Correction. On remarque que pour tout x on a

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt \leqslant f(x) \leqslant \int_{x-1}^{x} f(t)\,dt.$$

Comme f est intégrable en $+\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $A > 0$ tel que si $A \leqslant x \leqslant y$, alors

$$-\varepsilon \leqslant \int_x^y f(t)\,dt \leqslant \varepsilon.$$

Donc, si $x \geqslant x - 1 \geqslant A$, alors

$$-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon.$$

Il suit que f tend vers 0 en $+\infty$. □

(ii) En considérant les intégrales $\int_{x/2}^{x} f(t)\,dt$, montrer que $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

Correction. Comme f est décroissante et $L = 0$, il est clair que $f \geqslant 0$ à partir d'un certain $X \in \mathbb{R}$. On suppose sans perte de généralité que $f \geqslant 0$. Soit $x > 0$. On note que

$$\int_{x/2}^{x} f(t)dt \geqslant \int_{x/2}^{x} f(x)\,dt = \frac{x}{2} f(x).$$

L'argument donné avant termine la preuve. □

(2) On ne suppose plus f décroissante. Peut-on affirmer que $L = 0$? Peut-on affirmer que L existe ? Peut-on affirmer que f est au moins bornée ?

Correction. Non : considérer une suite de triangles avec une petite base et hauteur tendant vers l'infini. □

Intégrales de fonctions qui oscillent

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue de période $p > 0$ et $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

(1) Montrer que $\int_a^{a+p} f(t)\,dt = \int_0^p f(t)\,dt$ pour n'importe quel $a \in \mathbb{R}$.

(2) Pour chaque $x \geqslant 0$, on définit $n_x \in \mathbb{N}$ et $r_x \in [0, p[$ par l'équation $x = n_x p + r_x$. (Certifiez-vous que ils sont bien définis !) Montrer que

$$F(x) = n_x \cdot F(p) + F(r_x).$$

Correction. On a

$$\begin{aligned}\int_0^x &= \int_0^p + \cdots + \int_{n_x p - p}^{n_x p} + \int_{n_x p}^{n_x p + r_x} \\ &= n_x F(p) + \int_0^{r_x}\end{aligned}$$

car

$$\int_{mT}^{mT+r} f(t)\,dt = \int_0^r f(s)\,ds.$$

□

(3) Montrer que si $F(p) = 0$, alors $\displaystyle\int_T^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge. Indication : On montrera que pour tout $x \geqslant p$, l'on a

$$\int_p^x \frac{f(t)}{t}\,dt = \left.\frac{F(t)}{t}\right]_p^x + \int_p^x \frac{F(t)}{t^2}\,dt.$$

Correction. Pour l'indication : Intégration par parties. Ensuite, on remarquera que F est bornée et on appliquera l'indication. □

(4) Montre que si $F(p) \neq 0$, alors $F(x)/x \underset{\infty}{\sim} F(p)/p$. En déduire que $\displaystyle\int_p^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt$ diverge.

Correction. On suppose que $F(p) \neq 0$. La question (2) montre que montre que $F(x) \underset{\infty}{\sim} n_x \cdot F(p)$. Comme $n_x \underset{\infty}{\sim} x/p$, on déduit que $F(x)/x \sim_\infty F(p)/p$. Donc, $F(t)/t^2 \underset{\infty}{\sim} c/t$, avec c constante. Il suit que

$$\int_p^x \frac{F(t)}{t^2}\,dt = \int_p^x \frac{f(t)}{t}\,dt - \frac{F(x)}{x} + \frac{F(p)}{p}$$

diverge quand $x \to \infty$, ce qui est impossible si $\displaystyle\int_p^x \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge.

□

(5) Utiliser les question précédentes pour étudier la convergence et la convergence *absolue* de l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt$. (On commencera par remarquer que $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.)

Exercice 6. En employant des changements de variables et intégrations par parties, répondre aux questions suivantes.

(1) L'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{\mathrm{i}t}}{t^\alpha}\,dt$ converge pour chaque $\alpha > 0$.

Correction. Il suffit de faire une intégration par parties. □

(2) L'intégrale d'Airy $\displaystyle\int_1^\infty \sin(t^\alpha)\,dt$ converge pour chaque $\alpha > 1$.

Correction. On change la variable $t = u^{1/\alpha}$. Il suit que $dt = \alpha^{-1} u^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\, du$ et

$$\int_1^\infty \sin(t^\alpha)\, dt = \int_1^\infty \frac{\sin(u)}{u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}\, du.$$

Or, $\beta = 1 - 1/\alpha > 0$ et donc l'intégrale converge par la question précédente. $\square$