Université de Montpellier
Mathématiques pour Polytech (HA8301H)
Septembre–Décembre 2024.

Feuille d'exercices : Séries entières et leurs applications

Exercice 1 (Rayons de convergence)**.** (a) Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ dans les cas suivantes

(1) $a_n = q^n$, avec $q \in \mathbb{C} - \{0\}$.
(2) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ pour $n \geqslant 1$.
(3) $a_n = \dfrac{1}{n^{100}}$ pour $n \geqslant 1$.
(4) $\lim a_n = \ell$ et $\ell \neq 0$.
(5) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$.
(6) $a_n = (\log n)^{-\log n}$ pour $n \geqslant 3$.
(7) $a_n = \cos(2\pi n/5)$.
(8) $a_n = \dfrac{\sin(n\pi/3)}{5^n(2n+1)}$.

(b) Déterminer le rayon de convergence des série entières suivantes : $S = \sum_{n \geqslant 0} \dfrac{z^{3n}}{2^n}$, et $T = \sum_{n \geqslant 0} \dfrac{z^{5n}}{(n^2+3)3^n}$.

Exercice 2 (Quelques questions théoriques sur le rayon de convergence)**.** Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. En donner une démonstration ou un contre-exemple.

(1) Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
(2) Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.
(3) Si la série $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence infini, alors elle converge normalement sur $\mathbb{R}$.
(4) Si $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence fini $R > 0$ et si $f(x)$ note sa somme, alors soit $\lim_{x \uparrow R} f(x)$, soit $\lim_{x \downarrow -R} f(x)$ existe.

Exercice 3 (Sommes de séries entières)**.** Après avoir déterminé les rayons de convergence, donner la valeur, en termes de fonctions élémentaires, des séries entières suivantes :

1. $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.
2. $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)!}$.
3. $L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$.
4. $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$.

5. $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+k}$, où k est un entier strictement positif.

6. $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$. (Indication : Écrire $\frac{1}{n(n+2)}$ comme somme $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+2}$.)

Exercice 4 (La suite de Fibonacci)**.** Il y a plus de 800 ans, Leonardo Pisano, connu comme Fibonacci, s'est mis à étudier la suite numérique suivante :

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad \ldots,$$

c'est à dire, la suite (F_n) définie par

$$F_0 = F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ pour } n \geqslant 2.$$

A. de Moivre a montré que la suite de Fibonacci est liée à une autre merveille mathématique : le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dans cet exercice, on va retrouver cette connexion à l'aide des séries entières.

(1) On définit la série entière $S(x) = \sum_0^\infty F_n x^n$. Montrer que son rayon de convergence est $\geqslant \frac{1}{2}$. *Indication :* Montrer par récurrence que $F_n \leqslant 2^n$.

(2) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right[$ on a

$$(1 - x - x^2)S(x) = 1.$$

(3) Soient

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

les deux racines de $x^2 + x - 1$. Trouver $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{\alpha, \beta\}$ on ait

$$\frac{1}{x^2+x-1} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

(4) Montrer que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}\right\},$$

où $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(5) Quel est le rayon de convergence de S ?

Autour du théorème d'Abel

Exercice 5. Dans cet exercice, on fera appel à la série entière de la fonction arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\pi/4, +\pi/4\right[$ pour montrer la formule de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots$$

1. En utilisant que $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, obtenir le développement de arctan en série entière.
2. Utiliser le théorème d'Abel pour montrer la formule de Leibniz.

Exercice 6. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$ fixé. On souhaite calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ (dont la convergence est assurée par les théorèmes d'Abel-Dirichlet). On considère la série entière

$$S(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} r^n$$

1. Montrer que le rayon de convergence de S est au moins 1.
2. Montrer que
$$S'(r) = \frac{\cos\theta - r}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$
3. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\theta)}{n} = -\frac{1}{2}\log(2 - 2\cos\theta).$$

Séries entières et équations différentielles

Exercice 7 (L'équation de Legendre)**.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On considère l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0. \tag{L}$$

(1) Soit $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. En le justifiant soigneusement, montrer que φ est solution de (L) si et seulement si les coefficients a_n vérifient des relations de récurrence que l'on précisera.

(2) On suppose que $\lambda \notin \mathbb{N}$. Soit $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ qui est solution de (L). En supposant $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$, déterminer R.

(3) On suppose que $\lambda = \ell(\ell+1)$ où ℓ est un entier positif.

   (a) On suppose ℓ pair. Montrer que (L) possède une solution polynomiale φ telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$.

   (b) On suppose ℓ impair. Montrer que (L) possède une solution polynomiale φ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$.

Exercice 8 (L'équation hypergéométrique)**.** Soient α, β, γ des nombres complexes. En supposant que γ n'est pas un entier négatif, on introduit l'équation différentielle, dite hypergéométrique,

$$(z - z^2)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]y' - \alpha\beta y = 0.$$

(1) On admet l'existence d'une série entière $S(z) = \sum a_n z^n$ de rayon ρ non-nul, et qui est une solution de l'équation hypergéométrique. Montrer que

$$a_{n+1} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)} a_n.$$

(2) Montrer que l'équation hypergéométrique possède une solution $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ayant rayon de convergence $\rho > 0$ et satisfaisant $S(0) = 1$. Ensuite, déterminer précisément ρ. Cette solution est connue comme *la série hypergéometrique*, et est notée $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$.

(3) Les exercices suivants montrent comment obtenir quelques fonctions usuelles à partir d'une série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$.

   (a) Montrer que pour chaque $n \geqslant 1$, on a
$$a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)\cdot n!}.$$

   (b) Soit $\nu \in \mathbb{R}$ et $|z| < 1$. Montrer que $(1-z)^\nu = F(-\nu, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z)$.

   (c) Soit $x \in]-1, +1[$. Montrer que $\log(1-x) = -xF(1, 1, 2, x)$.

   (d) Pour tout $c \in \mathbb{C}$, on a $e^c = \lim\limits_{\substack{|\lambda|<1/|c| \\ \lambda \to 0}} F(1, 1/\lambda, 1, \lambda c)$.

Exercice 9 (L'équation de Bessel)**.** On souhaite étudier les solutions des équations différentielles ordinaires, dites de Bessel,
$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \alpha^2\right) y = 0 \qquad (B_\alpha)$$

(1) Montrer que l'équation différentielle B_0 possède une solution $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est développable en série entière à l'origine avec rayon de convergence infini, et qui satisfait $J(0) = 1$ et $J'(0) = 0$.

(2) Soit $\alpha > 0$. Montrer que l'équation différentielle B_α possède une solution de la forme $x^\alpha\varphi(x)$, où φ est développable en série entière à l'origine avec rayon de convergence infini et satisfait $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$. Indication : Déterminer d'abord l'équation différentielle que ϕ doit satisfaire.

   La solution obtenue est, à normalisation près, connue comme une fonction de Bessel, qui joue un rôle dans la résolution de plusieurs problèmes physiques.

Exercice 10 (Échec de la méthode des coefficients à déterminer)**.** On considère le système différentiel
$$x^2y'' + (3x-1)y' + y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Est-il possible de trouver une solution développable en série entière ϕ ayant rayon de convergence strictement positif ?