Université de Montpellier
Mathématiques pour Polytech (HA8301H)
Septembre–Décembre 2024.

Les séries numériques

Théorie basique

Exercice 1 (La série géométrique)**.** (1) Le nombre réel $0,830830830\ldots$ est-il rationnel ? Si oui, l'exprimer comme une fraction.

(2) Le flocon de Koch est la figure plane $\mathcal{F}$ construite en répétant un nombre infini de fois les constructions décrites dans le schéma suivant :

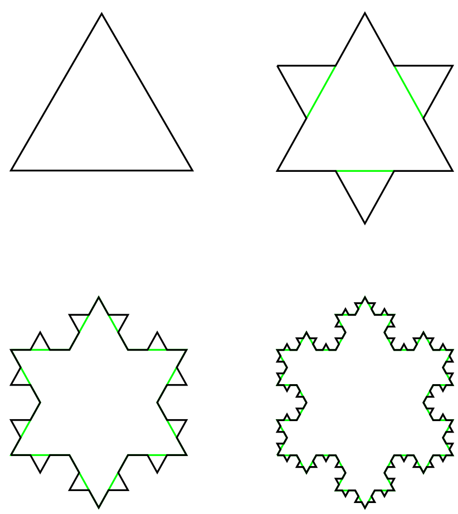

FIGURE 1 – Les quatre premiers polygones du flocon de Koch

Dit autrement, $\mathcal{F}$ est la réunion de polygones équilatères $\mathcal{F}_n$, où $\mathcal{F}_{n+1}$ est construit à partir de $\mathcal{F}_n$ en rajoutant sur le tiers du milieu de chaque côté un nouveau triangle équilatère. Si A est l'aire du triangle initial, quelle est l'aire de $\mathcal{F}$?

Exercice 2. Vrai ou faux ?

(1) Si $\sum a_n$ converge, alors $\lim a_n = 0$.

(2) Si (a_n) est une suite strictement positive et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$ pour tout n, alors $\sum a_n$ converge.

(3) Si $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ alors $\sum a_n$ diverge.

(4) Si (a_n) et (b_n) sont des suites réelles telles que $a_n \leqslant b_n$ pour tout n, alors la convergence de $\sum b_n$ entraine celle de $\sum a_n$.

(5) Si $\sum a_n$ est une série convergente de termes positifs, alors $\lim \sqrt[n]{a_n}$ existe.

(6) Soit (a_n) une suite réelle. Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum a_n = +\infty$ ou $\sum a_n = -\infty$.

Exercice 3. Déterminer si les séries suivantes sont convergentes.

$$\text{(a)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n+2}, \quad \text{(b)} \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2 - \sin(n)}, \quad \text{(c)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n - \log(n)},$$

$$\text{(d)} \sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k^2-1}, \quad \text{(e)} \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}, \quad \text{(f)} \sum_{k\geqslant 2} \log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right),$$

$$\text{(g)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{(17+45n+n^2)^2}, \quad \text{(h)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{n^3+1}, \quad \text{(i)} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\text{(j)} \sum_{n\geqslant 0} e^{-n^2}, \quad \text{(k)} \sum_{k\geqslant 0} \log\left(\cos\left(2^{-k}\right)\right), \quad \text{(l)} \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\log(n)^p}, \ \text{où } p \in \mathbb{N},$$

$$\text{(m)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\log(n)}{n^2}, \quad \text{(n)} \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta}, \quad \text{où } \alpha > 1 \text{ et } \beta \geqslant 0.$$

Exercice 4. Soit $\alpha \in [0,1]$. On définit les suites $(I_n)_{n\geqslant 1}$ et $(S_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$I_n = \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^n k^{-\alpha}.$$

(1) Montrer que $I_{n+1} \leqslant S_n \leqslant 1 + I_n$.

(2) En déduire un équivalent de (S_n).

(3) Est-il possible d'appliquer un résultat du cours pour arriver plus rapidement à votre conclusion précédente ? *Indication :* $\lim_n S_n = +\infty$.

Exercice 5 (Approximation)**.** Dans la suite on veut utiliser les critères de convergence de façon raffiné pour déterminer la valeur approchée d'une série.

(1) Soit $f : \mathbb{R}_{\geqslant 1} \to \mathbb{R}$ une fonction positive, décroissante et continue telle que $\lim_n \int_1^n f(x)\,dx$ existe. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ converge et que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leqslant \int_N^\infty f(x)\,dx.$$

Utiliser cette comparaison pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ avec une erreur strictement inférieure à 10^{-4}.

(2) Soit $\sum a_n$ une série de termes strictement positifs. Soit $\alpha \in [0,1[$ tel que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant \alpha$$

pour tout $n \geqslant N$. Montrer que

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right| \leqslant |a_N| \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Utiliser ce résultat pour borner l'erreur dans l'approximation de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ par $\sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n!}$.

Séries dont le terme général ne garde pas le même signe

Exercice 6. Déterminer si les séries suivantes sont convergentes.

$$\text{(a)} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+2}, \quad \text{(b)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad \text{(c)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(\pi n/5)}{n},$$

$$\text{(d)} \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n \log(n)}{\sqrt{n}}, \quad \text{(e)} \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n + 1}{\log(n)}, \quad \text{(f)} \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{3+(-1)^n n^2}.$$

Exercice 7. Rappeler pourquoi la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge. Montrer que sa somme vaut $\log(2)$. (Indication : Calculer $\int_0^1 (-t)^{n-1} dt$.)

Exercice 8. On souhaite montrer que que le critère des suites équivalentes n'est pas applicable aux séries dont le signe des termes varie.

(1) La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge : justifier.

(2) Montrer que la série

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

diverge et en déduire que

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

diverge également.

(3) Montrer que

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Pourquoi le critère sur les séries ayant termes équivalents ne s'applique pas ?

Exercices plus difficiles

Exercice 9 (Le critère de Raabe)**.** Soit (a_n) une suite telle que $a_n \neq 0$ pour presque tout n. On souhaite montrer : Si pour une certaine constante $C > 1$ et un certain réel $\theta > 1$, l'on a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 - \frac{C}{n} + O\left(\frac{1}{n^\theta}\right),$$

alors $\sum a_n$ converge absolument.

(1) Soit (a_n) et (b_n) des suites strictement positives. On suppose que pour un certain $N \in \mathbb{N}$ on ait

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}, \qquad \text{pour tout } n \geqslant N.$$

Montrer que si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge aussi. *Indication* : Étudier la suite (a_n/b_n).

(2) Utiliser le critère précédent appliqué aux suites (a_n) et (n^{-s}), où $1 < s < C$, pour montrer le critère de Raabe.

Exercice 10 (Le théorème de Pringsheim)**.** Soit (a_n) une suite positive et décroissante telle que $\sum a_n$ converge. Montrer que $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. (*Indication* : Utiliser la suite des restes $R_{m,n} = a_{m+1} + \cdots + a_n$.) En déduire une autre preuve de la divergence de la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.