Université de Montpellier
Mathématiques pour Polytech (HA8301H)
Septembre–Décembre 2024.

Feuille d'exercices sur les suites et séries de fonctions

Convergence uniforme des suites de fonctions

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants on considère une suite de fonctions ($f_n : I \to \mathbb{R}$). Déterminer, si possible, la limite simple f de (f_n). Puis, étudier la convergence uniforme.

(1) $I = [0, +\infty[$ et $f_n(x) = e^{-nx}$.

(2) $I = [0, \infty[$ et $f_n(x) = x/n$.

(3) $I = [0, 10]$ et $f_n(x) = x/n$.

(4) $I = [0, \infty[$ et $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n, \\ -n^2 x + 2n, & \text{si } 1/n \leqslant x \leqslant 2/n \\ 0, & \text{si } x \geqslant 2/n. \end{cases}$

(5) $I = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \sin(x + 1/n)$.

(6) $I = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \dfrac{4^{nx}}{3^{nx} + 5^{nx}}$.

(7) $I = [1, +\infty[$ et $f_n(x) = \dfrac{4^{nx}}{3^{nx} + 5^{nx}}$.

(8) $I = [0, \infty[$ et $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^3x^3}$. (Indication : Dresser le tableau de variations de f_n.)

(9) $I = [0, \infty[$ et $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2x^2}$. (Indication : Dresser le tableau de variations de f_n.)

Exercice 2. Dans cet exercice, on souhaite étudier des exemples où "l'intégration terme à terme" ou la "dérivation terme à terme" échouent.

(1) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $x \mapsto (n+1)\cos(x)\sin^n(x)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$, qu'on déterminera, mais que $\int_0^{\pi/2} f_n(t)\, dt$ ne converge par vers $\int_0^{\pi/2} f(t)\, dt$. (Voir figure.)

(2) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on écrit : $f_n(x) = \sqrt{1/n + \sin^2(x)}$.

  (a) Les fonctions f_n, sont-elles de classe C^1 ? Justifiez brièvement.

  (b) Montrer que (f_n) converge uniformément vers une fonction f qu'on déterminera.

  (c) Observer que f n'est pas dérivable sur le point 0 et expliquer pourquoi ce fait ne contredit pas le théorème d'échange entre limite et dérivation.

  (d) Montrer que (f_n') converge simplement vers une fonction f^* qu'on déterminera. Justifier le fait que la convergence $f_n' \to f^*$ n'est pas uniforme.

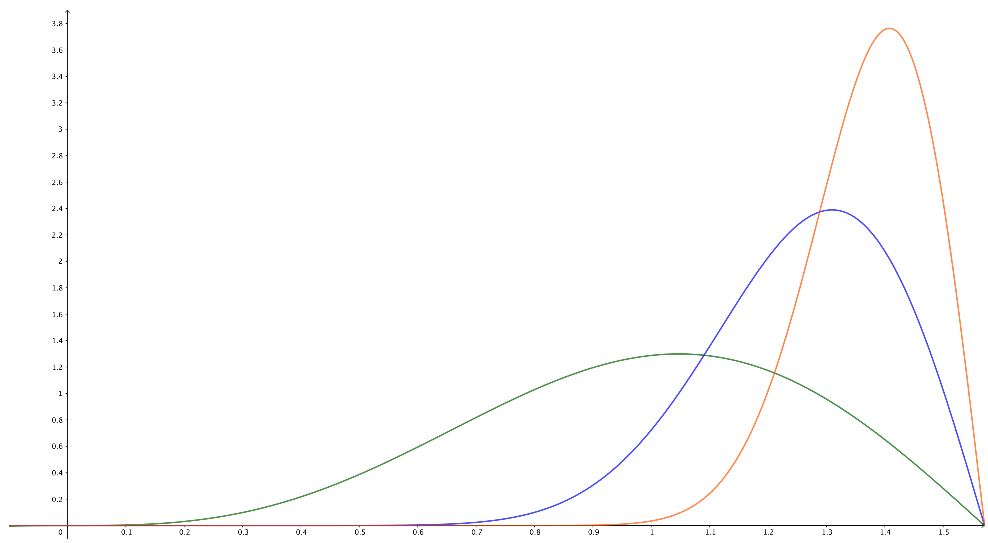

FIGURE 1 – Contre-exemple à $\lim \int_a^b = \int_a^b \lim$.

Convergence normale des séries de fonctions

Exercice 3. Pour chacun des cas suivants, déterminer si la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur l'intervalle I.

1. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^3}$ et $I = [-1, +1]$.
2. $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2+1}$ et $I = \mathbb{R}$.
3. $f_n(x) = x^n e^{-nx}$ et $I = [0, +\infty[$.
4. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ et $I = \mathbb{R}$.
5. $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$ et $I = \mathbb{R}$.
6. $f_n(x) = nx^n$ et $I = [-0,9, +0,9]$.

Exercice 4. Il est nécessaire parfois de déterminer la borne supérieure des fonctions à fin d'établir la convergence normale. Utiliser cette méthode pour traiter les questions suivantes.

(1) Pour chaque $x \in [1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$ on écrit $f_n(x) = \left(\dfrac{\log(x)}{x}\right)^n$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement.

(2) Pour chaque $x \in [1/10, +\infty[$ et chaque $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ on écrit $g_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$. Montrer que $\sum g_n$ converge normalement.

Exercice 5. Pour $n > 0$ on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$f_n(x) = \log\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right).$$

(1) Déterminer le domaine de convergence des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n'(x)$.

(2) Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$. Indication : Calculer $f_n'(n)$.

(3) Montrer que pour chaque $A > 0$, la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $]-A, +A[$.

(4) Que peut on en conclure ?

Exercice 6. Montrer que pour chaque $x > 0$, la série $\sum_{n \geqslant 1} e^{-n^2 x}$ converge. On désigne par $S(x)$ la somme $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$. Montrer que la fonction $S :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est de classe C^∞. La convergence, est-elle normale ?

Exercice 7 (La fonction Zeta)**.** Pour tout $s \in \mathbb{C}$, on définit la fonction zeta de Riemann :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

(1) Montrer que $\zeta(s)$ converge si $\Re(s) > 1$.

(2) Montrer que ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

(3) Montrer, à l'aide d'une comparaison à une intégrale, que $\lim_{x \to \infty} \zeta(x) = 1$.

(4) Montrer que $\lim_{x \to 1} \zeta(x) = \infty$.

Convergence uniforme dans le style d'Abel et Dirichlet

Exercice 8. On se donne $0 < \delta < 1$. Montrer que la série de fonctions $\theta \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge uniformément sur $]0 + \delta, 2\pi - \delta[$. La convergence, est-elle normale ?