Université de Montpellier
Mathématiques pour Polytech (HA8301H)
Septembre–Décembre 2025.

Devoir surveillé 2 – Durée 1h10

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– L'épreuve est notée sur 20. Le total des points fait 25 et les notes $\geqslant 20$ seront considérées comme 20.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations déraisonnables vous font perdre la confiance du correcteur : évitez-les.
– La bonne compréhension et interprétation des questions font partie de l'examen.
– Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (9pts). Déterminer si les séries $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, où a_n est donné plus bas, convergent ou divergent.

(1) $a_n = e^{\mathrm{i}n^2}\dfrac{\log n}{n^2}$. (2) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\log(n^2-(-1)^n)}$. (3) $a_n = \dfrac{1}{(1+n^{-1})^{n^2}}$.

(4) $a_n = \dfrac{n^{2025}\cdot(1+\cos^2(3n))}{e^{2n}+1}$. (5) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. (6) $a_n = \dfrac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$.

Correction. (1) On sait que $|a_n| = \dfrac{\log n}{n^2}$. On sait que $\dfrac{\log n}{\sqrt{n}} \to 0$ par "croissances comparées" et donc $|a_n| \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ pour $n \gg 0 \Rightarrow$ la série converge absolument par comparaison avec la série zêta 3/2. **1,5pt**

(2) On observe que la suite $n \mapsto \log(n^2+(-1)^{n+1})$ est croissante : en effet,

$$(n+1)^2-(-1)^{n+1}-n^2+(-1)^n = 2n+1+2(-1)^n \geqslant 0.$$

On peut donc appliquer le critère de Leibniz parce que $\lim_n \dfrac{1}{\log(n^2+(-1)^{n+1})} = 0$.

(3) On a $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{(1+n^{-1})^n} = 1/e$ et donc la série converge par le critère de Cauchy.

(4) On sait que $n^{2025}/e^n \to 0$ et donc $0 \leqslant a_n \leqslant n^{2025}e^{-2n} \leqslant e^{-n}$ pour $n \gg 0$. La série converge par comparaison avec $\sum e^{-n}$. (**1,5pts**)

(5) On a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = (\dfrac{n}{n+1})^n \to \dfrac{1}{e}$ et donc par le critère de d'Alembert, la série converge. (**1,5pts**)

(6) On applique le critère de Cauchy : $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{n^{\frac{\log n}{n}}}{\log n}$. Comme $n^{\frac{\log n}{n}} = e^{\frac{\log^2 n}{n}}$, on voit que $n^{\frac{\log n}{n}} \to 1$. En particulier, $\sqrt[n]{a_n} \leqslant \dfrac{2}{\log n}$ pour $n \gg 0 \Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{a_n} = 0$ et la série converge par Cauchy. □

Exercice 2. Pour chaque $N \geqslant 3$, soit $S_N = \sum_{n=3}^{N} \dfrac{1}{n\log(n)}$. On souhaite étudier le comportement asymptotique de (S_N) à l'aide de la fonction $F(x) = \log(\log x)$.

(1) Montrer que $F(N+1) - F(3) \leqslant S_N \leqslant F(N) - F(2)$. (**4pts**)

Correction. La fonction $f\colon]1, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par $x \mapsto \dfrac{1}{x\log x}$ est décroissante et positive. Donc, pour tout $n \geqslant 3$, l'on a

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx.$$

Notation : (**1pt**) pour aller chercher la comparaison avec $\int \frac{dx}{x\log x}$. (**2pts**) pour un encadrement correct de $f(n)$.

On déduit que

$$\int_3^{N+1} f(x)\,dx = \sum_{n=3}^{N} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant S_N.$$

Or,

$$\int_a^X f(x)\,dx = F(x)\big|_a^X,$$

et donc

$$F(N+1) - F(3) \leqslant S_N.$$

Notation : (**1pt**) pour la primitive. De même,

$$S_N \leqslant \sum_{n=3}^{N} \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx = \int_2^N f(x)\,dx = F(N) - F(2).$$

Les inégalités souhaitées ont été prouvées. □

(2) En déduire (on pourra utiliser le théorème des accroissements finis pour majorer $F(N+1) - F(N)$) que $S_N \sim F(N)$. (**2pts**)

Correction. Pour conclure, on observe que si $x \geqslant 3$, alors $f(x) \leqslant 1$ et donc

$$F(N+1) - F(N) = \int_N^{N+1} f(x)\,dx \leqslant 1.$$

Il suit que
$$\frac{F(N+1)-F(N)}{F(N)}+1-\frac{F(3)}{F(N)} \leqslant \frac{S_N}{F(N)} \leqslant 1-\frac{F(2)}{F(N)}$$

1,5pts si manque seulement la preuve $F(N+1) \sim F(N)$.

$\square$

Exercice 3. Déterminer si les intégrales suivantes convergent ou divergent.

(F) $\displaystyle\int_2^\infty f(x)\,dx$, où $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{(x-1)^3+x-1}}$.

(G) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} g(x)\,dx$, où $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+\log(1+\cos^2(x))}}{\sin x}$.

(H) $\displaystyle\int_0^\infty h(x)\,dx$, où $h(x) = x\cos(x)$.

(U) $\displaystyle\int_0^1 u(x)\,dx$, où $u(x) = \dfrac{e^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{1-x^2}}$.

(V) $\displaystyle\int_0^1 v(x)\,dx$, où $v(x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{e^x}\right)$.

(10pts)

Correction. (F) On observe que $|f(x)| \leqslant f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^3+x-1}}$. Il suffit alors de montrer que $\displaystyle\int_2^\infty f_1(x)\,dx$ converge. On observe que $f_1 \geqslant 0$ et que $f_1(x) \sim_\infty x^{-3/2}$. Or, comme $\displaystyle\int_2^\infty x^{-3/2}\,dx$ converge, la convergence de $\int_2^\infty f$ suit.

Notation. **0,5pts** si l'étudiant arrive à se débarrasser de $\sin(x)$ en utilisant valeurs absolues.

(G) On sait que $g \geqslant 0$. De plus, on sait que $g(x) \sim_0 \frac{\sqrt{1+\cos^2(x)}}{x}$, car $\sin x \sim_0 x$. Donc $\lim\limits_{x\downarrow 0} xg(x) = \sqrt{1+\log(2)} = c$. La divergence de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{c}{x}\,dx$ implique la divergence de (G).

(H) On observe que $\int_0^X h(x)\,dx = X\sin(X) - \cos(X) - 1$. Donc $\int_1^{n\pi} h(x)\,dx = (-1)^{n+1} - 1$ et la limite n'existe pas. Donc l'intégrale diverge.

Notation : **1,5pts** si integration par parties et que $X\sin X - \cos(X)$ n'a pas de limite en $+\infty$. **0,5pts** de plus si argument bien fait.

(U) On voit que $|u| = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et que $|u| \sim_1 \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$. On doit se concentrer alors sur la convergence de $\int_0^1 u_1(x)$, où $u_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. On fait le changement de variable $y = 1-x$ $\Rightarrow$ on doit établir la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}}$, qui est connue. L'intégrale converge.

Notation : **0,5pts** si réussi à se débarrasser de $e^{\mathrm{i}x}$.

(V) On voit que l'intégrande n'est pas à priori continue au point 0. On a

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{x} \cdot \frac{e^x - x - 1}{(x+1)e^x} \\ &= \frac{1}{x} \frac{x^2/2 + o(x^2)}{(x+1)e^x} \\ &= \frac{x/2 + o(x)}{(x+1)e^x}. \end{aligned}$$

La fonction v se prolonge ainsi en une fonction continue et $v \sim_0 0 \Rightarrow$ convergence. (**1pt**) pour bon polynôme de Taylor pour l'intégrande. $\square$