Université de Montpellier
Mathématiques pour Polytech (HA8301H)
Septembre–Décembre 2025.

Devoir encadré 2.

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– L'épreuve est notée sur 20. Le total des points fait 25 et les notes $\geqslant 20$ seront considérées comme 20.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– La bonne compréhension et interprétation des questions font partie du devoir.

Exercice 1. (1) Écrire $0,121212\ldots$ comme un nombre rationnel. (**1pt**)

Correction. On doit sommer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{100^n} = 12 \times \frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 12 \times \frac{1}{99} = \frac{12}{99}$. □

(2) La série $1 + \dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{111} + \ldots$, est-elle convergente ? (**2pts**)

Correction. Soit $a_n = 10^0 + 10^1 + \cdots + 10^n$. La série en question est $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{a_n}$. Or, $a_n = \dfrac{10^{n+1}-1}{9}$ et $a_n^{-1} \sim \dfrac{9}{10^{n+1}}$ $\Rightarrow$ la série est convergente. □

(3) Déterminer si les séries $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, où a_n est donné plus bas, convergent ou divergent.

(i) $a_n = 1 - \cos(1/n)$. (**1,5pts**)

(ii) $a_n = \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$. (**1,5pts**)

(iii) $a_n = \log(\cos(1/n))$. (**2pts**)

(iv) $a_n = \dfrac{[\log(n)]^2}{n^2}$. (**2pts**)

(v) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^3+3n+2}\cos(n\pi/7)$. (**2pts**)

Correction. (i) Il est clair que $a_n \geqslant 0$. On a $\cos(1/n) = 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2} + o(1/n^2) \Rightarrow a_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2} + o(1/n^2)$ $\Rightarrow a_n \sim \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2}$ et la convergence suit par comparaison avec la série $\zeta(2)$.

(ii) On applique d'Alembert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3(n!)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!} \cdot \frac{(3n)!}{(n!)^3} = \frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \to \frac{1}{27},$$

et la convergence suit.

(iii) Soit $f(x) = \log(\cos(x))$; il s'agit d'une fonction de classe C^∞ sur $]-\pi, \pi[$. Son polynôme de Taylor est $-\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. Donc $\log(\cos(1/n)) \sim -\dfrac{1}{2n^2}$. La convergence suit ainsi de la convergence de $\sum \dfrac{1}{2n^2}$ et le fait que $a_n \leqslant 0$.

(iv) On sait que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x^{1/4}} = 0$. Donc, $\dfrac{\log^2 x}{x^{1/2}} \leqslant 1$ pour $x \gg 0$. Donc, $\dfrac{\log^2(n)}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ et la convergence suit par comparaison avec $\zeta(3/2)$.

(v) On observe que $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^3+3x+2}$ est décroissante à partir de x assez grand. En effet :

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^3+x+2)-(x^2+1)\cdot(3x^2+3)}{(\cdots)^2} = \frac{-x^4-4\,x^2+4\,x-3}{(\cdots)^2}$$

Par conséquent, la suite $f(n)$ est décroissante pour n grand et $f(n) \to 0$. On peut ainsi appliquer la règle de Dirichlet pour assurer la convergence. □

Exercice 2. Soit $\alpha > 1$ et soit $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, le reste dans la somme de la série zêta $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$. En comparant avec une intégrale, montrer que $R_N \sim \dfrac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}$. (**5pts**)

Correction. On a, pour $n \geqslant 2$:

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha}$$

Donc,

$$\underbrace{\int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}}_{\frac{(N+1)^{-\alpha+1}}{\alpha-1}} \leqslant R_N \leqslant \underbrace{\int_{N}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}}_{\frac{N^{1-\alpha}}{\alpha-1}}.$$

Ensuite, on a

$$\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\alpha-1} \leqslant R_N\cdot(\alpha-1)N^{\alpha-1} \leqslant 1,$$

et prenant la limite on arrive à $\lim_N R_N \cdot (\alpha-1)N^{\alpha-1} = 1$. □

Exercice 3. Déterminer si les intégrales suivantes convergent ou divergent.

(F) $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$, où $f(x) = \dfrac{\log(1+1/x)}{\sqrt{x}}$. (**2pts**) (L) $\displaystyle\int_0^1 \ell(x)\,dx$, où $\ell(x) = \dfrac{\log x}{x}$. (**2pts**)

(K) $\displaystyle\int_0^1 k(x)\,dx$, où $k(x) = \dfrac{\log x}{\log(1+x)}$. (**2pts**) ($\Phi$) $\displaystyle\int_0^\infty \varphi(x)\,dx$ où $\varphi(x) = \dfrac{e^{\cos(x)}}{(1+x^2)\sqrt{x}}$. (**2pts**)

Correction. (F) On voit que $f \geqslant 0$ et que $f(x) \sim_\infty \dfrac{1/x}{\sqrt{x}} \Rightarrow$ (F) converge avec $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}x}$.

(L) La fonction ℓ est continue sur $]0,1]$. De plus, ℓ est négative. Or, si $0 < x \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \ell(x) \leqslant \dfrac{\log(1/2)}{x}$. Comme $\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\log(1/2)}{x}\,dx = -\infty$, l'intégrale (L) diverge également.

(Φ) $\varphi \geqslant 0$ et $\varphi(x) \sim_0 ex^{-1/2} \Rightarrow$ l'intégrale $\int_0^1 \varphi$ converge. Ensuite, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{e}{x^2\sqrt{x}}$ et la convergence suit de la convergence de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}\,dx$. $\square$