Université de Montpellier
Mathématiques pour Polytech (HA8301H)
Septembre–Décembre 2025.

Suites numériques

Convergence de suites

Exercice 1. Parmi les suites dont le terme général est

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad b_n = (-1)^n, \quad c_n = \frac{3 \cdot (-1)^n n - 2}{2n+4}, \quad d_n = \frac{(-1)^n n^2 + 3n}{n+1}, \quad e_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n},$$

déterminer quelles sont bornées et quelles sont convergentes.

Exercice 2. Soit (z_n) une suite complexe. Montrer que (z_n) est convergente si et seulement si les suites réelles $(\mathbf{Re}\, z_n)$ et $(\mathbf{Im}\, z_n)$ le sont également.

Exercice 3. Justifier les égalités suivantes. (On évitera de faire appel aux propriétés connues des fonctions élémentaires.)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0$ pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$. (Pour rappel, on admet ici l'existence des racines k-èmes.)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pour tout réel $a > 0$. *Indication* : On traitera le cas $a > 1$ d'abord en employant l'inégalité de Bernoulli : $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ si $x > -1$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. *Indication* : On démontrera l'inégalité $(1+x)^n \geqslant 1 + \binom{n}{2} x^2$ pour $x \geqslant 0$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^p}{x^n} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x > 1$. *Indication* : Écrire $x = 1 + y$ et utiliser que $x^n > \binom{n}{p+1} y^{p+1}$ quand n est suffisamment grand.

Exercice 4. Soit (z_n) une suite complexe convergente. Montrer que (z_n) est bornée. Soit (z_n) une suite de Cauchy. Montrer (sans admettre la convergence de (z_n) !), que (z_n) est bornée.

Exercice 5. Utiliser la propriété de Cauchy pour répondre aux questions suivantes.

(1) Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et soit $\varphi_n = e^{in\theta}$. Prouver que (φ_n) diverge.

(2) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit $h_n = 1 + \cdots + \dfrac{1}{n}$. Prouver que (h_n) diverge.

Exercice 6. Pour des suites réelles, les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(1) Toute suite positive et non majorée tend vers $+\infty$.

(2) Toute suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

(3) Si une suite admet une limite $\ell > 0$, alors tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

(4) Toute suite non bornée diverge.

(5) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$. Alors les deux suites convergent et ont même limite.

(6) Si une suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle converge si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 7 (Limite dans la moyenne)**.** Pour quelques suites divergentes, il est parfois possible de trouver des nombres ayant une fonction *similaire* à celle d'une limite. On se donne une suite (z_n) et on définit $\mu_n = \dfrac{z_0 + \cdots + z_n}{n+1}$; il s'agit de la suite des moyennes de (z_n).

(1) Soit $z_n = (-1)^n - 1$. La suite des moyennes, est-elle convergente ?

(2) Montrer que si $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$. *Indication :* On se donne $B > 0$ tel que $B \geqslant |z_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, on écrira

$$\frac{\sum_{n=0}^{p} z_n}{p+1} = \frac{\sum_{n=0}^{N} z_n}{p+1} + \frac{\sum_{n=N+1}^{p}}{p+1}$$

où N est tel que $|z_n|$ soit “petit” si $n \geqslant N$.

(3) En considérant la suite $d_n = z_n - \ell$, montrer que si $\lim_{n\to\infty} z_n = \ell$, alors $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \ell$.

Majorants et bornes supérieures

Exercice 8. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ sont-ils majorés, minorés ? Déterminer, lorsqu'elle existe, leur borne supérieure et leur borne inférieure. Ces ensembles ont-ils un maximum et un minimum ?

$$E_1 = \left\{1 + \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad E_2 = \left\{1 - \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad E_3 = \left\{\frac{n-1}{n+1} \,:\, n \in \mathbb{N}^*\right\},$$

$$E_4 = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n \,:\, n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad E_5 = \left\{0, \underbrace{3\cdots3}_{n} \,:\, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 9. Soient X et Y deux parties de $\mathbb{R}$ telles pour chaque $x \in X$ et $y \in Y$ l'on a $x \leqslant y$.

(1) Montrer $\sup X \leqslant y$ pour chaque $y \in Y$.

(2) Montrer que $\sup X \leqslant \inf Y$. *Indication :* En supposant $\sup X > \inf Y$, utiliser “une perturbation” de $\sup X$ appartenant à X pour aboutir à une contradiction.

Applications des théorèmes fondamentaux

Exercice 10 (Suite d'Héron)**.** Soit $A \in \mathbb{Q}$ strictement positif. On souhaite construire une suite rationnelle convergente (x_n) telle que $\lim x_n^2 = A$. Soit $x_0 > 0$ rationnel et $y_0 = A/x_0$. Puis, si x_n et y_n ont été définis, on définit

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = A/x_{n+1}.$$

(1) Montrer que $x_n > 0$.

(2) En considérant
$$x_{n+1}^2 - A,$$
montrer que $x_n^2 \geqslant A$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(3) Montrer que $(x_1, x_2, \ldots)$ est décroissante.

(4) Montrer que (x_n) converge.

(5) Montrer que sa limite ℓ satisfait $\ell^2 = A$.

Exercice 11. On définit une suite réelle (x_n) en écrivant $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = 1 + x_n^{-1}$. On veut montrer que $\lim x_n$ existe et vaut le nombre d'or $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dans la suite, on désigne par $p(x)$ le polynôme $x^2 - x - 1$, et l'on observe que $p(x) = (x-\psi)(x-\varphi)$, où $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(1) On souhaite prouver que $(x_{2n})_{n=0}^{\infty}$ est strictement croissante et $(x_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ est strictement décroissante.
   (a) Montrer que $x_{n+2} = f(x_n)$, où $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$, et que $x_{n+2} - x_n = -\dfrac{p(x_n)}{x_n+1}$.
   (b) En utilisant que f est strictement croissante, montrer que $f([\psi, \varphi]) \subset [\psi, \varphi]$, $f(]-\infty, \psi]) \subset]-\infty, \psi]$ et $f([\varphi, +\infty[) \subset [\varphi, +\infty[$.
   (c) Conclure.

(2) Prouver que si n est pair, alors $x_n < x_{n+1}$.

(3) Prouver que $\lim x_n = \varphi$.

Exercice 12 (La "condensation")**.** Soit $\alpha > 1$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_n = 1^{-\alpha} + \cdots + n^{-\alpha}$.

(1) Soit $\ell \geqslant 0$. En comptant le nombre de termes et en majorant, montrer que

$$\sum_{n=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{2^\ell}{2^{\ell\alpha}} = \frac{1}{2^{\ell\cdot(\alpha-1)}}.$$

(2) En déduire que si $n \leqslant 2^{\ell+1}$, alors

$$S_n \leqslant 1 + \frac{1}{2^{0\cdot(\alpha-1)}} + \frac{1}{2^{1\cdot(\alpha-1)}} + \cdots + \frac{1}{2^{\ell\cdot(\alpha-1)}}.$$

(3) En déduire la convergence de (S_n).