
Intégrales généralisées

Convergence par comparaison

Exercice 1 (Recyclage du critère de condensation). Soit $a > 0$ et soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Montrer que $\int_a^\infty f(t) dt$ converge si et seulement si, pour un certain $\ell > 0$, l'intégrale $\int_{\frac{\log(a)}{\ell}}^\infty e^{\ell s} f(e^{\ell s}) ds$ converge. En utilisant cette observation, étudier la convergence des intégrales

$$J_\alpha = \int_2^\infty \frac{dt}{t \cdot [\log(t)]^\alpha},$$

où $\alpha > 0$.

Exercice 2. Après avoir déterminé les singularités, vérifier si les intégrales généralisées suivantes sont convergentes ou divergentes.

$$\begin{aligned} \aleph &= \int_0^1 \frac{dt}{t^2}, \quad A = \int_0^\infty \sin(t) dt, \quad B = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 1}, \quad C = \int_0^\infty e^{-t^2/2} dt, \quad D = \int_0^1 \log(t) dt, \\ E &= \int_0^1 \frac{e^{t^2}}{\sqrt{t}} dt, \quad F = \int_0^1 \frac{\log(t)}{(1+t)^2} dt, \quad G = \int_1^{+\infty} \frac{\log(t)}{(1+t)^2} dt, \quad H = \int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t(3-t)}}, \\ I &= \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt, \quad J = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{\log(1+t)^{3/2}} dt, \quad K = \int_0^1 \frac{(1+t)^{7/2} - 1}{\tan(t)} dt, \\ L &= \int_0^1 \frac{1 - \cos(t)}{\sin(t)^4} dt, \quad M = \int_2^\infty \frac{dt}{t \cdot [\log(t)]^3}, \quad N = \int_0^\infty \frac{\sqrt{t} \sin(1/t^2)}{\log(1+t)} dt. \end{aligned}$$

Exercice 3. On souhaite étudier $I = \int_0^\pi \log(\sin x) dx$.

- (1) Montrer que I converge. *Indication.* Si $0 < x < \pi$, alors $|\log(\sin x)| = \log\left(\frac{1}{\sin x}\right)$.
- (2) Montrer que $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx$ et $\int_0^{\pi/2} \log(\cos x) dx$ convergent et sont égales et en déduire que $I = 2 \int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx$.
- (3) En utilisant le changement de variable $x = 2y$ pour l'intégrale I et la question précédente, montrer que $I = -\pi \log 2$.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbf{R}$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $\int_a^\infty f(t) dt$ converge. On souhaite étudier $L := \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

- (1) On suppose que f est décroissante.
- (i) Montrer que $L = 0$.
- (ii) En considérant les intégrales $\int_{x/2}^x f(t) dt$, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$.
- (2) On ne suppose plus f décroissante. Peut-on affirmer que $L = 0$? Peut-on affirmer que L existe? Peut-on affirmer que f est au moins bornée?

Intégrales de fonctions qui oscillent

Exercice 5. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue de période $p > 0$ et $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- (1) Montrer que $\int_a^{a+p} f(t) dt = \int_0^p f(t) dt$ pour n'importe quel $a \in \mathbf{R}$.
- (2) Pour chaque $x \geq 0$, on définit $n_x \in \mathbf{N}$ et $r_x \in [0, p[$ par l'équation $x = n_x p + r_x$. (Certifiez-vous que ils sont bien définis!) Montrer que

$$F(x) = n_x \cdot F(p) + F(r_x).$$

- (3) Montrer que si $F(p) = 0$, alors $\int_p^\infty \frac{f(t)}{t} dt$ converge. Indication : On montrera que pour tout $x \geq p$, l'on a

$$\int_p^x \frac{f(t)}{t} dt = \left[\frac{F(t)}{t} \right]_p^x + \int_p^x \frac{F(t)}{t^2} dt.$$

- (4) Montre que si $F(p) \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)/x = F(p)/p$. En déduire que $\int_p^\infty \frac{f(t)}{t} dt$ diverge.
- (5) Utiliser les question précédentes pour étudier la convergence et la convergence *absolue* de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$. (On commencera par remarquer que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$, définie sur $\mathbf{R}^*$, se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{R}$.)

Exercice 6. En employant des changements de variables et intégrations par parties, prouver les affirmations qui suivent.

- (1) L'intégrale $\int_1^\infty \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$ converge pour chaque $\alpha > 0$.
- (2) L'intégrale d'Airy $\int_1^\infty \sin(t^\alpha) dt$ converge pour chaque $\alpha > 1$.