
Feuille d'exercices : Séries de Fourier

Notations : Dans la suite, pour chaque $n \in \mathbf{Z}$, on désigne par φ_n la fonction $x \mapsto e^{inx}$. Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, on désigne par $\sin_n$, respectivement $\cos_n$, la fonction $x \mapsto \sin(nx)$, respectivement $\cos(nx)$. L'espace vectoriel complexe des polynômes trigonométriques de degré au plus N , $\{c_{-N}\varphi_{-N} + \cdots + c_N\varphi_N : c_n \in \mathbf{C}\}$, sera désigné par $\mathcal{T}_N$. L'espace vectoriel complexe des fonctions 2π -périodiques $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ qui sont continues, respectivement C^1 , par morceaux sur $[0, 2\pi]$ sera désigné par $\mathcal{M}$, respectivement $\mathcal{M}^1$. De plus,

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \text{et} \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Finalement, $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n$ signifie $a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n + a_{-n}$.

Calculs de coefficients

Exercice 1. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = x$ lorsque $x \in [-\pi, +\pi[$. Calculer sa série de Fourier. Ensuite, sommer la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n}$.

Utiliser votre résultat pour montrer la formule de Leibniz $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ de période 2π définie par $f(t) = t$ pour chaque $t \in [0, 2\pi[$.

1. Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f .
2. On considère maintenant la fonction $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ de période 2π définie par $g(t) = \frac{\pi - t}{2}$ pour chaque $t \in [0, 2\pi[$. Calculer ses coefficients de Fourier exponentiels. En déduire ses coefficients trigonométriques.
3. Écrire la somme partielle $S_N g$ de g .
4. Montrer que pour tout $t \in]0, 2\pi[$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{\pi - t}{2}$.
5. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ vaut $\pi^2/6$.

6. On considère $G(t) = \int_0^t g(s) ds$. Montrer que G est 2π -périodique, continue et C^1 par morceaux.
7. Calculer les coefficients de Fourier de G .
8. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Exercice 3. Calculer la série de Fourier de la fonction 2π -périodique $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = |x|$ pour chaque $x \in [-\pi, +\pi[$. Utiliser le théorème de Dirichlet et l'identité de Parseval pour obtenir

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi^4}{96} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Exercices théoriques

Exercice 4. 1. Vérifier que $\{\cos_0, \cos_1, \sin_1, \dots, \cos_N, \sin_N\}$ est une base orthogonale de $\mathcal{T}_N$. Déterminer ensuite $\|\cos_n\|$ et $\|\sin_n\|$.

2. Soit $f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos_n + b_n \sin_n$. Exprimer, pour $n \geq 0$, le coefficient a_n en fonction de $\langle f, \cos_n \rangle$. Exprimer, pour $n \geq 1$, le coefficient b_n en fonction de $\langle f, \sin_n \rangle$. Quel est l'intérêt d'avoir le coefficient constant divisé par 2 ?

3. Soient $a_0, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N \in \mathbf{R}$ et soit $f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos_n + b_n \sin_n$. Exprimer $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx$ en fonction de $a_0, \dots, a_N$, et $b_1, \dots, b_N$.

4. Soit $f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos_n + b_n \sin_n$ un polynôme trigonométrique. Déterminer, en fonction de $a_0, \dots, a_N$, et $b_1, \dots, b_N$, les coefficients de Fourier exponentiels $c_{-N}, \dots, c_N$.

5. Donner le développement en série de Fourier des fonctions

$$f(x) = \sin(3x) \cos^2(4x) \quad \text{et} \quad g(x) = \cos^3(x) + \sin(2x).$$

Exercice 5. 1. Soit M un espace vectoriel complexe et $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times M \rightarrow \mathbf{C}$ une forme hermitienne positive. On écrit $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Montrer "l'identité de polarisation" :

$$4\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i \cdot \|u + iv\|^2 - i \cdot \|u - iv\|^2.$$

2. Soient $f, g \in \mathcal{T}_N$ des polynômes trigonométriques. Montrer que

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}.$$

3. Soient $f, g \in \mathcal{M}^1$. Utiliser l'identité de Parseval pour montrer que

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}.$$

Exercice 6. On se donne une fonction $f \in \mathcal{M}$ et on note $(c_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ ses coefficients de Fourier exponentiels, et $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ ses coefficients de Fourier trigonométriques. Répondre aux questions suivantes.

1. Que peut-on dire de la relation entre les coefficients de Fourier complexes $c_{+n}(f)$ et $c_{-n}(f)$ quand f est paire ? Et quand f est impaire ? Interprétez les résultats obtenus en termes de la transformée de Fourier $\hat{f} : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$.
2. Montrer que si f est paire, alors $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et que si f est impaire, alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. On suppose f continue et dérivable. Montrer que si $a_n = 0$ pour tout n , alors f est impaire.

Exercice 7. Soit $(c_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ une suite complexe.

1. On suppose que $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n|$ converge. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \varphi_n := \sum_n c_n \varphi_n + c_{-n} \varphi_{-n}$ converge normalement sur $\mathbf{R}$.
2. On suppose que $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n|$ converge. Montrer que la fonction $f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \varphi_n$ est une fonction continue et que $\hat{f}(n) = c_n$.
3. On suppose que $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n|$ converge. Montrer que l'identité de Parseval est vraie pour la fonction f définie précédemment.
4. On suppose maintenant qu'il existent $k \in \mathbf{N}$, $\varepsilon > 0$ et $A \geq 0$ tels que $|c_n| \leq A|n|^{-k-1-\varepsilon}$ pour tout $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Montrer que f est de classe C^k .