

Suites numériques

Convergence de suites

Exercice 1. Parmi les suites dont le terme général est

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad b_n = (-1)^n, \quad c_n = \frac{3 \cdot (-1)^n n - 2}{2n+4}, \quad d_n = \frac{(-1)^n n^2 + 3n}{n+1}, \quad e_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n},$$

déterminer quelles sont bornées et quelles sont convergentes.

Exercice 2. Soit (z_n) une suite complexe. Montrer que (z_n) est convergente si et seulement si les suites réelles $(\operatorname{Re} z_n)$ et $(\operatorname{Im} z_n)$ le sont également.

Exercice 3. Justifier les égalités suivantes. (On évitera de faire appel aux propriétés connues des fonctions élémentaires.)

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0$ pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$. (Pour rappel, on admet ici l'existence des racines k -èmes.)
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pour tout réel $a > 0$. *Indication* : On traitera le cas $a > 1$ d'abord en employant l'inégalité de Bernoulli : $(1+x)^n \geq 1+nx$ si $x > -1$.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. *Indication* : On démontrera l'inégalité $(1+x)^n \geq 1 + \binom{n}{2}x^2$ pour $x \geq 0$.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{x^n} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x > 1$. *Indication* : Écrire $x = 1+y$ et utiliser que $x^n > \binom{n}{p+1}y^{p+1}$ quand n est suffisamment grand.

Exercice 4. Soit (z_n) une suite complexe convergente. Montrer que (z_n) est bornée. Soit (z_n) une suite de Cauchy. Montrer (sans admettre la convergence de (z_n) !), que (z_n) est bornée.

Exercice 5. Utiliser la propriété de Cauchy pour répondre aux questions suivantes.

- (1) Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et soit $\varphi_n = e^{in\theta}$. Prouver que (φ_n) diverge.
- (2) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit $h_n = 1 + \cdots + \frac{1}{n}$. Prouver que (h_n) diverge.

Exercice 6. Pour des suites réelles, les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- (1) Toute suite positive et non majorée tend vers $+\infty$.

- (2) Toute suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
- (3) Si une suite admet une limite $\ell > 0$, alors tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.
- (4) Toute suite non bornée diverge.
- (5) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites vérifiant $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$. Alors les deux suites convergent et ont même limite.
- (6) Si une suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle converge si et seulement si elle est stationnaire.
- (7) Si $(a_n) \sim (b_n)$, alors $(2^{a_n}) \sim (2^{b_n})$?
- (8) Si $(a_n) \sim (b_n)$, alors $(\sin(a_n)) \sim (\sin(b_n))$?

Exercice 7 (Limite dans la moyenne). Pour quelques suites divergentes, il est parfois possible de trouver des nombres ayant une fonction *similaire* à celle d'une limite. On se donne une suite (z_n) et on définit $\mu_n = \frac{z_0 + \dots + z_n}{n+1}$; il s'agit de la suite des moyennes de (z_n) .

- (1) Soit $z_n = (-1)^n - 1$. La suite des moyennes, est-elle convergente?
- (2) Montrer que si $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$. *Indication* : On se donne $B > 0$ tel que $B \geq |z_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, on écrira

$$\frac{\sum_{n=0}^p z_n}{p+1} = \frac{\sum_{n=0}^N z_n}{p+1} + \frac{\sum_{n=N+1}^p z_n}{p+1}$$

où N est tel que $|z_n|$ soit "petit" si $n \geq N$.

- (3) En considérant la suite $d_n = z_n - \ell$, montrer que si $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \ell$.

Majorants et bornes supérieures

Exercice 8. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ sont-ils majorés, minorés? Déterminer, lorsqu'elle existe, leur borne supérieure et leur borne inférieure. Ces ensembles ont-ils un maximum et un minimum?

$$E_1 = \left\{ 1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad E_2 = \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad E_3 = \left\{ \frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

$$E_4 = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad E_5 = \left\{ 0, \underbrace{3 \cdots 3}_n : n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Exercice 9. Soient X et Y deux parties de $\mathbb{R}$ telles pour chaque $x \in X$ et $y \in Y$ l'on a $x \leq y$.

- (1) Montrer $\sup X \leq y$ pour chaque $y \in Y$.
- (2) Montrer que $\sup X \leq \inf Y$. *Indication* : En supposant $\sup X > \inf Y$, utiliser “une perturbation” de $\sup X$ appartenant à X pour aboutir à une contradiction.

Applications des théorèmes fondamentaux

Exercice 10 (Suite d'Héron). Soit $A \in \mathbb{Q}$ strictement positif. On souhaite construire une suite rationnelle convergente (x_n) telle que $\lim x_n^2 = A$. Soit $x_0 > 0$ rationnel et $y_0 = A/x_0$. Puis, si x_n et y_n ont été définis, on définit

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = A/x_{n+1}.$$

- (1) Montrer que $x_n > 0$.
- (2) En considérant

$$x_{n+1}^2 - A,$$

montrer que $x_n^2 \geq A$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- (3) Montrer que $(x_1, x_2, \dots)$ est décroissante.
- (4) Montrer que (x_n) converge.
- (5) Montrer que sa limite ℓ satisfait $\ell^2 = A$.

Exercice 11. On définit une suite réelle (x_n) en écrivant $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = 1 + x_n^{-1}$. On veut montrer que $\lim x_n$ existe et vaut le nombre d'or $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Dans la suite, on désigne par $p(x)$ le polynôme $x^2 - x - 1$, et l'on observe que $p(x) = (x - \psi)(x - \varphi)$, où $\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

- (1) On souhaite prouver que $(x_{2n})_{n=0}^\infty$ est strictement croissante et $(x_{2n+1})_{n=0}^\infty$ est strictement décroissante.
 - (a) Montrer que $x_{n+2} = f(x_n)$, où $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$, et que $x_{n+2} - x_n = -\frac{p(x_n)}{x_n+1}$.
 - (b) En utilisant que f est strictement croissante, montrer que $f([\psi, \varphi]) \subset [\psi, \varphi]$, $f(]-\infty, \psi]) \subset]-\infty, \psi]$ et $f([\varphi, +\infty[) \subset [\varphi, +\infty[$.
 - (c) Conclure.
- (2) Prouver que si n est pair, alors $x_n < x_{n+1}$.
- (3) Prouver que $\lim x_n = \varphi$.

Exercice 12 (La “condensation”). Soit $\alpha > 1$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_n = 1^{-\alpha} + \dots + n^{-\alpha}$.

(1) Soit $\ell \geq 0$. En comptant le nombre de termes et en majorant, montrer que

$$\sum_{n=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}} \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \frac{2^{\ell}}{2^{\ell\alpha}} = \frac{1}{2^{\ell \cdot (\alpha-1)}}.$$

(2) En déduire que si $n \leq 2^{\ell+1}$, alors

$$S_n \leq 1 + \frac{1}{2^{0 \cdot (\alpha-1)}} + \frac{1}{2^{1 \cdot (\alpha-1)}} + \cdots + \frac{1}{2^{\ell \cdot (\alpha-1)}}.$$

(3) En déduire la convergence de (S_n) .