

Feuille d'exercices sur les suites et séries de fonctions

Convergence uniforme des suites de fonctions

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants on considère une suite de fonctions $(f_n : I \rightarrow \mathbf{R})$. Déterminer, si possible, la limite simple f de (f_n) . Puis, étudier la convergence uniforme.

(1) $I = [0, +\infty[$ et $f_n(x) = e^{-nx}$.

(2) $I = [0, \infty[$ et $f_n(x) = x/n$.

(3) $I = [0, 10]$ et $f_n(x) = x/n$.

(4) $I = [0, \infty[$ et $f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ -n^2x + 2n, & \text{si } 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0, & \text{si } x \geq 2/n. \end{cases}$

(5) $I = \mathbf{R}$ et $f_n(x) = \sin(x + 1/n)$.

(6) $I = \mathbf{R}$ et $f_n(x) = \frac{4^{nx}}{3^{nx} + 5^{nx}}$.

(7) $I = [1, +\infty[$ et $f_n(x) = \frac{4^{nx}}{3^{nx} + 5^{nx}}$.

(8) $I = [0, \infty[$ et $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^3x^3}$. (Indication : Dresser le tableau de variations de f_n .)

(9) $I = [0, \infty[$ et $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}$. (Indication : Dresser le tableau de variations de f_n .)

Exercice 2. Dans cet exercice, on souhaite étudier des exemples où “l'échange” entre intégration et limite et “l'échange” entre dérivation et limite échouent.

(1) Pour chaque $n \in \mathbf{N}^*$, soit $f_n : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par $x \mapsto (n+1) \cos(x) \sin^n(x)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbf{R}$, qu'on déterminera, mais que $\int_0^{\pi/2} f_n(t) dt$ ne converge pas vers $\int_0^{\pi/2} f(t) dt$. (Voir figure.)

(2) Pour chaque $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$ on écrit : $f_n(x) = \sqrt{1/n + \sin^2(x)}$.

(a) Les fonctions f_n , sont-elles de classe C^1 ? Justifiez brièvement.

(b) Montrer que (f_n) converge uniformément vers une fonction f qu'on déterminera.

(c) Observer que f n'est pas dérivable sur le point 0 et expliquer pourquoi ce fait ne contredit pas le théorème d'échange entre limite et dérivation.

(d) Montrer que (f'_n) converge simplement vers une fonction f^* qu'on déterminera. Justifier le fait que la convergence $f'_n \rightarrow f^*$ n'est pas uniforme.

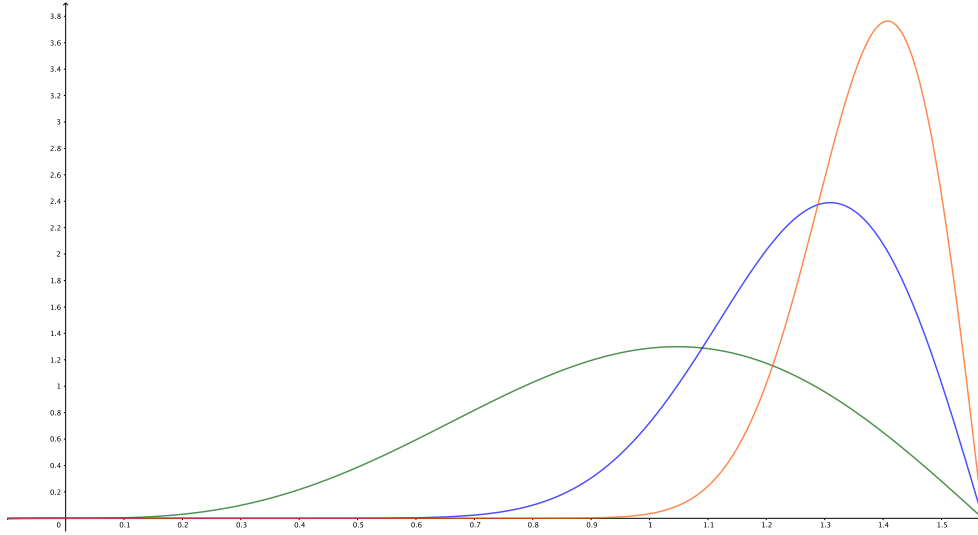


FIGURE 1 – Contre-exemple à $\lim \int_a^b = \int_a^b \lim$.

Convergence normale des séries de fonctions

Exercice 3. Pour chacun des cas suivants, déterminer si la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur l'intervalle I .

1. $f_n(x) = \frac{x^n}{n^3}$ et $I = [-1, +1]$.
2. $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2 + 1}$ et $I = \mathbf{R}$.
3. $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ et $I = \mathbf{R}$.
4. $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$ et $I = \mathbf{R}$.
5. $f_n(x) = nx^n$ et $I = [-0, 9, +0, 9]$.

Exercice 4. Il est nécessaire parfois de déterminer la borne supérieure des fonctions à fin d'établir la convergence normale. Utiliser cette méthode pour traiter les questions suivantes.

- (1) Soit $\varphi_n : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ la fonction $x \mapsto \frac{x^n}{e^{nx}}$. Montrer que $\sum_n \varphi_n$ converge normalement.
- (2) Pour chaque $x \in [1, +\infty[$ et $n \in \mathbf{N}$ on écrit $f_n(x) = \left(\frac{\log(x)}{x} \right)^n$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement.
- (3) Pour chaque $x \in [1/10, +\infty[$ et chaque $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ on écrit $g_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$. Montrer que $\sum g_n$ converge normalement.

Exercice 5. Pour $n > 0$ on définit sur $\mathbf{R}$ la fonction

$$f_n(x) = \log \left(1 + \frac{x^2}{n^2} \right).$$

- (1) Montrer que le domaine de convergence des séries $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ et $\sum_{n \geq 1} f'_n(x)$ est $\mathbf{R}$. On note

$$F(x) \text{ la somme } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

- (2) Montrer que $\sum_{n \geq 1} f'_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbf{R}$. Indication : Calculer $f'_n(n)$.

- (3) Montrer que pour chaque $A > 0$, la série $\sum f'_n$ converge normalement sur $] -A, +A[$.
- (4) La fonction F est dérivable : justifier.

Exercice 6. Montrer que pour chaque $x > 0$, la série $\sum_{n \geq 1} e^{-n^2 x}$ converge. On désigne par $S(x)$ la somme $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$. Montrer que la fonction $S:]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ est de classe C^∞ . La convergence, est-elle normale ?

Exercice 7 (La fonction Zeta). Pour tout $s \in \mathbf{C}$, on définit la fonction zeta de Riemann :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

- (1) Montrer que $\zeta(s)$ converge si $\Re(s) > 1$.
- (2) Montrer que ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.
- (3) Montrer, à l'aide d'une comparaison à une intégrale, que $\lim_{x \rightarrow \infty} \zeta(x) = 1$.
- (4) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} \zeta(x) = \infty$.

Convergence uniforme dans le style d'Abel et Dirichlet

Exercice 8. On se donne $0 < \delta < 1$. Montrer que la série de fonctions $\theta \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge uniformément sur $]0 + \delta, 2\pi - \delta[$. La convergence, est-elle normale ?