Un joli théorème en théorie de Galois différentielle

João Pedro dos Santos

Colloque de l'IRMA, Strasbourg

18 juin, 2021

Origines : Riemann et Jordan

- $f = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots \in \mathbb{C}[x,y]$.
- R le corps de racines de $f \in \mathbb{C}(x)[y]$
- et $G = Gal(R/\mathbb{C}(x))$.

Question

Comment déterminer G géométriquement ?

Soient $\Delta = \{b_1, \dots, b_r, \infty\} \in \mathbb{C}P^1$ les points de "branchement" de f. On fixe $p_0 \in \mathbb{C} \setminus \Delta$ et $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \Delta$ boucle en $p_0 \rightsquigarrow$

$$J_\gamma : \ \{\text{racines } f(p_0, y)\} \xrightarrow{\text{continuation analytique}} \{\text{racines } f(p_0, y)\}$$

Obtient $J : \pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus \Delta) \to \mathfrak{S}_n$.

Théorème (Jordan, Riemann ?)

$Gal \simeq Im(J)$.

Théorie de Galois pour équations différentielles

Soit $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}(x))$. Considère

$$\frac{dy}{dx} = A \cdot y. \tag{$\mathcal{E}$}$$

Picard (Lie déjà...) $\rightsquigarrow$ construire "théorie de Galois" pour solutions $(\mathcal{E})$.

Définition

- On pose $R = \mathbb{C}(x)[y_{ij}, 1/\det]$ et on prolonge $\frac{d}{dx}$ à R par

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{nj} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{nj} \end{pmatrix}.$$

- Corps de racines : $\mathbb{C}(x, \mathcal{E}) := \mathrm{Frac}(R/(\text{idéal}))$.

- Groupe de Galois : $\mathrm{DGal}_{\mathcal{E}} = \mathrm{Aut}(\mathbb{C}(x, \mathcal{E})/\mathbb{C}(x))$ préservant $\frac{d}{dx}$.

Soit $Y = [y_{ij}] \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(x, \mathcal{E})) \rightsquigarrow \dfrac{dY}{dx} = AY$.
$\forall\, \sigma \in \mathrm{DGal}$,

$$\boxed{\sigma(Y) = YC_\sigma, \qquad C_\sigma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}.$$

Lemma

$\mathrm{DGal} < \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *via* $\sigma \mapsto C_\sigma$.
De plus, DGal *est fermé pour Zariski.* □

Relecture

- (M) Groupe fondamental et monodromie
- (T) Catégories tannakiennes.

"Elbow room" : Les connexions

Définition

X variété non-singulière (complexe analytique/algébrique sur corps K de caractéristique nulle). $E \to X$ fibré vectoriel. Connexion

$$\nabla : \mathcal{O}(E) \longrightarrow \mathcal{O}(E) \otimes \Omega^1_X$$

K-linéaire satisfaisant $\nabla(fe) = f\nabla e + e \otimes df$.

Exemple

Soit $(a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}(x))$, holomorphe en $X = \mathbb{P}^1 \setminus S$. Connexion sur $\mathcal{O}_X^n$ définie par

$$\nabla : \mathcal{O}^n \longrightarrow \mathcal{O}^n \otimes \Omega^1, \qquad \nabla \vec{e}_j = -\sum_i a_{ij} \cdot \vec{e}_i \otimes dx.$$

Clair $\nabla \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{y} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$.

Un mot sur intégrabilité

Sur $\mathbb{C}$: $\nabla : E \to E \otimes \Omega^1$ "intégrable" $\Leftrightarrow$ "existence et unicité" locale des solutions. $\rightsquigarrow$ Faisceaux $E^\nabla(U) = \{s \in E(U) \,:\, \nabla s = 0\}$ est localement le faisceau constant $\mathbb{C}^n$. En général, intégrable $\Leftrightarrow$

$$E \xrightarrow{\nabla} E \otimes \Omega^1 \xrightarrow{\nabla} E \otimes \Omega^2 \quad = \quad 0.$$

Notation

$$\mathrm{ED}_X = \{\text{connexions intégrables sur } X\}.$$

- X variété complexe analytique. $x_0 \in X$.
- $\nabla : E \to E \otimes \Omega^1$ connexion.
- γ boucle à partir de x_0.
- $\{U_0, \dots, U_r\}$ disques couvrant γ.
- $E^\nabla | U_\alpha = \oplus_i \mathbb{C} e_i^\alpha$.

$\Rightarrow$ Matrices de passage localement constantes $\Rightarrow$ après le tour

$$e_j^0 = \sum M_{ij}^\gamma e_i^0.$$

$\rightsquigarrow \gamma \mapsto M_{ij}^\gamma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est une représentation de π_1 : la représentation monodromie.

Théorème ("Riemann-Hilbert")

$$\mathrm{ED}_X \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Mon}} \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(\pi_1(X, x_0)).$$

- K corps.
- $\mathcal{T} =$ K-linéaire et abelienne,
  $\otimes : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ bilinéaire satisfaisant ...,
  $\omega : \mathcal{T} \hookrightarrow$ K-vect plongement.

En laissant de côté encore quelques hypothèses :

Théorème (Saavedra)

Il existe schéma en groupes affine $\Pi_{\mathcal{T}}/K$ et

$$\mathcal{T} \xrightarrow[\sim]{\omega} \mathrm{Rep}_K(\Pi).$$

Schéma en groupes affine :

$$\Pi = \varprojlim \left(\underbrace{\Pi_1}_{\text{linéaire}/K} \longleftarrow \underbrace{\Pi_2}_{\text{linéaire}/K} \longleftarrow \cdots \right)$$

Ⓣ Catégories tannakiennes : Groupes de Galois-Tannaka

Normalement $\Pi_{\mathcal{T}}$ est très grand. On le démembre :

Définition (groupe de "Galois-Tannaka")

$E \in \mathcal{T}$. Définit

$$\langle E \rangle_{\otimes} = \left\{ E'/E'' \,:\, E'' \subset E' \subset \bigoplus_i E^{\otimes a_i} \otimes \check{E}^{\otimes b_i} \right\}.$$

Par théorème :

$$\langle E \rangle_{\otimes} \simeq \mathrm{Rep}_K(\Pi_E).$$

$\rightsquigarrow$ groupe de Galois-Tannaka.

Lemma

Π_E est linéaire. En fait si $\varrho_E : \Pi_{\mathcal{T}} \to \mathrm{GL}(\omega E)$ associée à E $\rightsquigarrow$ $\Pi_E = \mathrm{Im}(\varrho_E)$.

Ⓣ Exemples : groupes

Exemple

G groupe pro-algébrique et $\mathcal{T} = \mathrm{Rep}_K(G) \rightsquigarrow \Pi = G$.

Exemple

Γ groupe arbitraire. $\mathcal{T} = \mathrm{Rep}_K(\Gamma)$.

$$\text{Pro-système} \;=\; \Gamma \xrightarrow[\text{dense}]{\varrho} \underbrace{G}_{\text{linéaire}}(K)\,.$$

$\Pi_{\mathcal{T}} = \varprojlim$. "Envelope algébrique" Γ^{alg} (ou Hochschild-Mostow. . .)

Exemple

$\Gamma = \mathbb{Z}$ et $K = \mathbb{C}$. $\Longrightarrow \mathbb{Z}^{\mathrm{alg}} = \mathbb{C} \times T$ avec T un "tore" pro-algébrique très grand. $\Delta = \langle a, \dots, d \;:\; {}^a b = b^2, {}^b c = c^2, {}^c d = d^2, {}^d a = a^2 \rangle$ = Groupe de Higman$\Rightarrow$ $\Delta^{\mathrm{alg}} = 0$.

Exemple (Hochschild)

$\mathfrak{g}$ algèbre de Lie. $\mathcal{T} = \mathrm{Rep}_K(\mathfrak{g})$. Soit

$$(U\mathfrak{g})^\circ = \{\varphi \in (U\mathfrak{g})^* \ : \ \varphi \text{ annule idéal de codim finie}\}$$

- Multiplication : $\xi\zeta(u) = \xi \otimes \zeta(u \otimes 1 + 1 \otimes u)$.
- Co-multiplication : $(U\mathfrak{g})^\circ \to (U\mathfrak{g})^\circ \otimes (U\mathfrak{g})^\circ =$ "dual" de $U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$.

$\rightsquigarrow \Pi_{\mathcal{T}} = \mathrm{Spec}\ (U\mathfrak{g})^\circ$.

Exemple

K caractéristique nulle. X/K non-singulière connexe.

- $f : (E, \nabla) \to (E', \nabla')$ flèche de $\mathrm{ED}_X \rightsquigarrow \mathrm{rang}\, E|_x \xrightarrow{f} E|_x$ constant $\rightsquigarrow \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Coker}(f)$ fibrés vectoriels $\rightsquigarrow \mathrm{ED}$ abélienne.
- Si $x_0 \in X(K) \rightsquigarrow$

  $$\mathrm{ED} \longrightarrow K\text{-vect}, \quad E \longmapsto E|_{x_0}$$

  exact fidèle.

$\Pi_X^{\mathrm{diff}} = \Pi(\mathrm{ED}_X)$. C'est le groupe fondamental différentiel.

Exemples de groupes de “Galois-Tannaka”

Proposition

Γ groupe abstrait. Soit $\varrho : \Gamma \to \mathrm{GL}(E) \Rightarrow \Pi_\varrho \simeq \overline{\mathrm{Im}(\varrho)}$. $\square$

Proposition

K de car. nulle, $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie, $\varrho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(E)$ représentation $\Rightarrow$

$$\Pi_\varrho = \begin{array}{c} \textit{plus petit sous-groupe algébrique} \\ G < \mathrm{GL}(E) \textit{ tel que } \mathrm{Lie}(G) \supset \varrho(\mathfrak{g}). \end{array}$$

La théorie Tannakienne permet de retrouver DGal :

Proposition

$X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus S$. $(\mathcal{O}_X^n, \nabla)$ définie par $\nabla \vec{e}_j = -\sum_i a_{ij} \vec{e}_i$. $\rightsquigarrow$
$\Pi_\nabla = \mathrm{DGal}$.

Définition

Si X/K arbitraire :$\mathrm{DGal}(\nabla) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Pi_\nabla$.

Calculer DGal via l'Analyse

$X/\mathbb{C}$ algébrique projective non-singulière.

Théorème ("Jordan-Riemann")

$$\mathrm{ED}_X \xrightarrow[GAGA]{\sim} \mathrm{ED}_{X^{\mathrm{an}}} \xrightarrow[\mathrm{Mon}]{\sim} \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(\pi_1).$$

En particulier $\mathrm{DGal}_E \simeq \Pi_{E^{\mathrm{an}}} \simeq \overline{\mathrm{Mon}_E}$.

Remarque

Encore possible d'avoir $\mathrm{DGal}(E) \simeq \overline{\mathrm{Mon}_E}$ dans le cas non-propre en imposant singularités régulières.

Problème

Il n'est pas facile de calculer Mon_E !

Connexions sur fibrés triviaux

- K de car. nulle.
- X/K schéma propre, non-singulier, connexe. $x_0 \in X(K)$.
- $\mathcal{O}(X) = K$.

Définition

$\mathrm{ED}_X^{\mathrm{lib}} = \{(E, \nabla) \in \mathrm{ED}_X \,:\, E \simeq O_X^r\}$.

Soit $\Omega^1(X) = \bigoplus_{i=1}^g K\theta_i$. Connexion $\nabla : O^r \to O^r \otimes \Omega^1$ déterminée par $\{A_k\}_{k=1}^g \in \mathrm{M}_r(K)$:

$$\nabla(\vec{e_j}) = \sum_i \underbrace{a_{ij}^{(k)}}_{\text{coeffs. de } A_k} \vec{e_i} \bigotimes \theta_k.$$

Intégrabilité déterminée par relations entre les $\{[A_k, A_\ell]\}$ et la forme alternée $\Omega^1(X) \otimes \Omega^1(X) \to \Omega^2(X)$.

Proposition

Existe $\mathfrak{A}_X = \mathrm{T}(\Omega^1(X)^*)/\mathfrak{I}$ *telle que* $\mathrm{ED}_X^{\mathrm{lib}} \simeq \mathrm{Rep}_K(\mathfrak{A}_X)$.

Connexions sur fibrés triviaux

En fait, $\mathfrak{A}_X = U(\mathfrak{L}_X)$ pour certaine algèbre de Lie, t.q.

$$\mathfrak{L}_X = \frac{\text{Algèbre de Lie libre en } \Omega^1(X)^*}{\textit{relations}}.$$

Corollaire

$$\mathrm{ED}_X^{\mathrm{lib}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}_K(\mathfrak{L}_X)$$

De plus les produits tensoriels correspondent.

DGal en $\mathrm{ED}_X^{\mathrm{lib}}$

Question

Soit $(E, \nabla) \in \mathrm{ED}^{\mathrm{lib}}$.

- Calculer $\Pi_{(E,\nabla)}$ dans $\mathrm{ED}^{\mathrm{lib}} \rightsquigarrow \mathrm{DGal}_\nabla^{\mathrm{lib}}$.
- Calculer $\Pi_{(E,\nabla)}$ dans $\mathrm{ED} \rightsquigarrow \mathrm{DGal}_\nabla$.

Lien ?

Théorème

$\mathrm{DGal}_\nabla^{\mathrm{lib}} \simeq \mathrm{DGal}_\nabla$.

Démonstration.

$$\langle F; \mathrm{ED}^{\mathrm{lib}} \rangle_\otimes = \left\{ F'/F'' \ : \ \begin{array}{c} F'' \subset F' \subset \bigoplus_i F^{\otimes a_i} \otimes \check{F}^{\otimes b_i}, \\ \text{avec } F', F'' \in \mathrm{ED}^{\mathrm{lib}} \end{array} \right\}.$$

$$\langle F; \mathrm{ED} \rangle_\otimes = \left\{ F'/F'' \ : \ \begin{array}{c} F'' \subset F' \subset \bigoplus_i F^{\otimes a_i} \otimes \check{F}^{\otimes b_i}, \\ \text{avec } F', F'' \in \mathrm{ED} \end{array} \right\}.$$

Montrer que $\mathrm{ED}^{\mathrm{lib}}$ stable par quotients.

$$O^r \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \underbrace{F}_{\in \mathrm{ED}}$$

Existe

$$f : X \longrightarrow \mathrm{Grass}, \quad (x \longmapsto K^r \twoheadrightarrow F|_x)$$

et $F = f^*U$, où $U \to \mathrm{Grass}$ fibré universel.
$C \to X$ courbe compacte $\Rightarrow \deg F|_C = 0. \Rightarrow$
$\det U$ ample *et* $\deg = 0 \Rightarrow f|_C$ point. $\Rightarrow$ Lemme de Ramanujam
$\Rightarrow f$ constante. $\Rightarrow F \simeq O^s$. $\square$

Corollaire

$\nabla : O^r \to O^r \otimes \Omega^1$ définie par matrices $A_1, \ldots, A_k \in \mathfrak{gl}_r$. Alors

$$\mathrm{DGal} = \begin{array}{c}\textit{plus petit sous-groupe } G \textit{ de } \mathrm{GL}_r \\ \textit{tel que } \{A_k\} \subset \mathrm{Lie}\, G.\end{array}$$

Démonstration.

C'est comme ça qu'on calcule les groupes de Galois-Tannaka pour $\mathfrak{L}_X$-mod. $\square$

Corollaire

X courbe lisse genre $g \geq 2$. H semi-simple (connexe). Alors existe (O_X^r, ∇) dont $\mathrm{DGal} = H$. De plus, on peut le construire.

Démonstration.

On choisit $H \hookrightarrow \mathrm{GL}(E)$. $\mathrm{Lie}\, H$ engendrée par 2 éléments (Kuranishi). $\square$

Merci !