Sorbonne Université
Séries numériques et séries de fonctions (LU2MA260)
Septembre–Décembre 2019.

Feuille d'exercices : Séries de Fourier

Notations : Dans la suite, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, φ_n note la fonction $x \mapsto e^{inx}$. L'espace vectoriel complexe des fonctions 2π-périodiques $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont continues par morceaux sur $[0, 2\pi]$ sera noté $\mathcal{M}$. Le sous-espace de $\mathcal{M}$ des fonctions qui sont en plus de classe C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$ sera noté $\mathcal{M}^1$.

Exercices basiques

Exercice 1. Étant donnés $f, g \in \mathcal{M}$, on pose

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

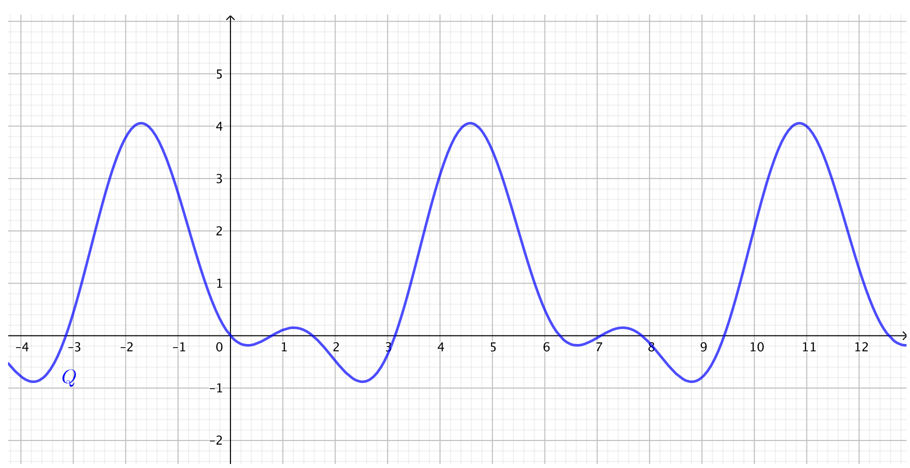
On écrit aussi $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.

1. Montrer que $\langle -, -\rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ est une forme hermitienne.
2. Montrer que $\|\varphi_n\|^2 = 1$, et que $c_n(f)$, le n-ième coefficient de Fourier de f, n'est autre que $\langle f, \varphi_n\rangle$.
3. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit $\sin_n, \cos_n \in \mathcal{M}^1$ par $\sin_n(x) = \sin(nx)$ et $\cos_n(x) = \cos(nx)$. Calculer $\|\sin_n\|$, $\|\cos_n\|$. Montrer que si $m \neq n$ sont positifs alors $\langle \sin_m, \sin_n\rangle = 0$, $\langle \cos_m, \cos_n\rangle = 0$ et $\langle \sin_m, \cos_n\rangle = 0$. Combien vaut $\langle \sin_n, \cos_n\rangle$?
4. Dans le cas où $f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos_n + b_n \sin_n$, comment exprimer a_k en fonction de $\langle f, \cos_k\rangle$?
5. Montrer le “Théorème de Pythagore”
$$\left\| \sum_{n=-N}^{N} c_n\varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=-N}^{+N} |c_n|^2.$$
6. Donner le développement en série de Fourier des fonctions de $\mathcal{M}$ définies par
$$f(x) = 2e^{-3ix} + e^{15ix} \quad \text{et} \quad g(x) = \cos^3(x) + \sin(2x).$$

Exercice 2 (Polynômes trigonométriques)**.** Un polynôme trigonométrique est une fonction de la forme $P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, où les coefficients sont des nombres complexes. Si l'un parmi a_N ou b_N est non nul, on dit que P est de degré N. Si chaque coefficient est réel, P est dit réel. Dans la suite, on étudie quelques propriétés des polynômes trigonométriques.

1. Soit P un polynôme trigonométrique de degré N. Montrer qu'il existe un polynôme (usuel) p tel que $e^{iNx}P(x) = p(e^{ix})$.
2. On suppose que $P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ est la fonction identiquement nulle. Montrer que $a_0, \ldots, a_N$, et $b_1, \ldots, b_N$ s'annulent tous. En déduire la dimension de l'espace des polynôme trigonométriques de degré au plus N.

   À partir de maintenant on souhaite étudier quelques propriétés des zéros d'un polynôme trigonométrique réel.
3. Soient $x_1 < \ldots < x_{2N}$ des points de $[0, 2\pi[$ et soit V l'espace vectoriel réel des polynômes trigonométriques *réels* de degré au plus N. En utilisant l'application linéaire $T : V \to \mathbb{R}^{2N}$, donnée par $P \mapsto (P(x_1), \ldots, P(x_{2N}))$, montrer qu'il existe un $P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ dont l'ensemble des zéros est *précisément* $\{x_1, \ldots, x_{2N}\}$.
4. Soient $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/4$, $x_3 = \pi/2$, et $x_4 = \pi$. Déterminer un polynôme trigonométrique Q dont l'ensemble de zéros est $\{x_1, \ldots, x_4\}$.



.

FIGURE 1 – Un polynôme trigonométrique qui s'annule en $0, \pi/4, \pi/2$ et π.

5. Soient $x_1 < \ldots < x_{2N}$ des points de $[0, 2\pi[$. (a) Montrer que si P est un polynôme trigonométrique réel de degré N qui s'annule sur $x_1, \ldots, x_{2N}$, alors $P'(x_1), \ldots, P'(x_{2N})$ sont non-nuls. (Indication : On pourra dériver l'égalité $e^{iNx}P(x) = p(e^{ix})$). (b) En

déduire que P a signe constant sur $[0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, etc, et que le signe de P *change* d'un intervalle à l'autre.

Exercice 3 (La meilleure approximation)**.** Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{M}$. On fixe $N \in \mathbb{N}$ et on note S_N la somme partielle $\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\varphi_n$. La différence $f - S_N$ sera notée Δ_N.

1. Montrer que pour chaque $k \in \{0, \pm 1, \ldots, \pm N\}$, Δ_N est orthogonale à φ_k, c'est-à-dire, $\langle \Delta_N, \varphi_k \rangle = 0$.
2. Employer la question précédente pour montrer que pour n'importe quel polynôme trigonométrique $P = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n \varphi_n$, l'inégalité

$$\|f - S_N\| \leqslant \|f - P\|$$

est satisfaite. (Indication : $\|f - P\|^2 = \|\Delta_N + (S_N - P)\|^2$.)

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ des fonctions de $\mathcal{M}^1$. Utiliser l'identité de Parseval pour montrer que

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}.$$

(Indication : Si $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ est une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace, alors $\langle u, v \rangle$ peut être exprimée comme une combinaison linéaires de $\|u\|^2$, $\|v\|^2$, $\|u-v\|^2$, $\|u-iv\|^2$ comme vous avez sûrement vu dans votre cours d'Algèbre bilinéaire !)

Exercice 5. On se donne une fonction $f \in \mathcal{M}$ et on note $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier exponentiels, et $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(b_n)_{n \geqslant 1}$ ses coefficients de Fourier trigonométriques. Répondre aux questions suivantes.

1. Que peut-on dire de la relation entre les coefficients de Fourier complexes $c_{+n}(f)$ et $c_{-n}(f)$ quand f est paire ? Et quand f est impaire ? Interprétez les résultas obtenus en termes de la transformée de Fourier $\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.
2. Montrer que si f est paire, alors $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et que si f est impaire, alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On suppose f continue et dérivable. Montrer que si $a_n = 0$ pour tout n, alors f est impaire.

Exercice 6. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite complexe.

1. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ converge. (Ce qui signifie que $\sum_{n\geqslant 1} |c_n| + |c_{-n}|$, ou n'importe quel réarrangement de cette série d'ailleurs, converge.) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi_n := \sum_n c_n\varphi_n + c_{-n}\varphi_{-n}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ converge. Montrer que la fonction $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi_n$ est une fonction continue et que $\hat{f}(n) = c_n$.

3. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ converge. Montrer que l'identité de Parseval est vraie pour la fonction f définie précédemment.
4. On suppose maintenant qu'il existent $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ et $A \geqslant 0$ tels que $|c_n| \leqslant A|n|^{-k-1-\varepsilon}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Montrer que f est de classe C^k.

Calculs de coefficients

Exercice 7. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période 2π définie par $f(t) = t$ pour chaque $t \in [0, 2\pi[$.

1. Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f.
2. On considère maintenant la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période 2π définie par $g(t) = \dfrac{\pi - t}{2}$ pour chaque $t \in [0, 2\pi[$. Calculer ses coefficients de Fourier exponentiels. En déduire ses coefficients trigonométriques.
3. Écrire la somme partielle $S_N g$ de g.
4. Montrer que pour tout $t \in]0, 2\pi[$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{\pi - t}{2}$.
5. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ vaut $\pi^2/6$.
6. On considère $G(t) = \int_0^t g(s)\, ds$. Montrer que G est 2π-périodique, continue et C^1 par morceaux.
7. Calculer les coefficients de Fourier de G.
8. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x$ lorsque $x \in [-\pi, +\pi[$. Calculer sa série de Fourier. Ensuite, sommer la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n}$. Utiliser votre résultat pour montrer la formule de Leibniz $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \cdots$

Exercice 9. Calculer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ pour chaque $x \in [-\pi, +\pi[$. Utiliser le théorème de Dirichlet et l'identité de Parseval pour obtenir

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi^4}{96} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$