Sorbonne Université
Séries numériques et séries de fonctions (LU2MA260)
Septembre–Décembre 2019.

Feuille d'exercices : Séries de fonctions

Convergence normale des séries de fonctions

Exercice 1. Pour chacun des cas suivants, déterminer si la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur l'intervalle I.

1. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^3}$ et $I = [-1, +1]$.
2. $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2+1}$ et $I = \mathbb{R}$.
3. $f_n(x) = x^n e^{-nx}$ et $I = [0, +\infty[$.
4. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ et $I = \mathbb{R}$.
5. $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$ et $I = \mathbb{R}$.
6. $f_n(x) = nx^n$ et $I = [-0,9, +0,9]$.

Exercice 2. Il est nécessaire parfois de déterminer la borne supérieure des fonctions à fin d'établir la convergence normale. Utiliser cette méthode pour traiter les questions suivantes.

1. Pour chaque $x \in [1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$ on écrit $f_n(x) = \left(\dfrac{\log(x)}{x}\right)^n$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement.
2. Pour chaque $x \in [1/10, +\infty[$ et chaque $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ on écrit $g_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$. Montrer que $\sum g_n$ converge normalement.

Exercice 3. Pour $n > 0$ on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$u_n(x) = \log\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right).$$

1. Déterminer le domaine de convergence des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n'(x)$.
2. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$. Indication : Calculer $u_n'(n)$.
3. Montrer que pour chaque $A > 0$, la série $\sum u_n'$ converge normalement sur $]-A, +A[$.
4. Que peut on en conclure ?

Exercice 4. Montrer que pour chaque $x > 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x}$ converge. Montrer que, si $S(x)$ note la somme, alors la fonction $x \mapsto S(x)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5. Soit $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$. Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, c]$, où $0 < c < 1$. Montrer que la convergence n'est pas *uniforme* sur $[0, 1[$.

Exercice 6 (Le critère de d'Alembert uniforme)**.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{C}$. On suppose que (a) chaque fonction f_n est bornée, (b) aucune f_n s'annule sur I, et (c) il existe $N \in \mathbb{N}$ et un $\ell \in [0, 1[$ tel que

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| \leqslant \ell < 1$$

pour tout $n \geqslant N$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement.

Exercice 7. On souhaite étudier les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$$

en suivant une méthode d'Abel ; elle consiste à étudier $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} r^n$ au lieu. (La conclusion de cet exercice, la somme de la série, devra attendre l'arrivé des série entières.)

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que la série de fonctions (en r)

   $$\sum_{n \geqslant 1} \cos(n\theta) r^{n-1}$$

   converge normalement sur $[-R, +R]$, où $0 < R < 1$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que la série de fonctions (en r)

   $$\sum_{n \geqslant 0} \frac{r^n}{n} \cos(n\theta)$$

   converge normalement sur $[-R, +R]$, où $0 < R < 1$.

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Utiliser les nombres complexes pour montrer que pour tout $|r| < 1$, on a

   $$\frac{\cos\theta - r}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \cos(\theta) + r\cos(2\theta) + r^2\cos(3\theta) + \cdots$$

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. En déduire que

   $$-\frac{1}{2}\log(1 - 2r\cos\theta + r^2) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} r^n$$

   pour tout $|r| < 1$.

5. On fixe $|r| < 1$ et on considère la série de fonctions en θ :

   $$\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} r^n.$$

   Montrer qu'elle converge normalement sur $\mathbb{R}$.

6. Utiliser les questions précédentes pour calculer l'intégrale

   $$I_r = \int_0^{\pi} \log(1 - 2r\cos(\theta) + r^2)\, d\theta$$

   pour chaque $|r| < 1$.

Exercice 8. On pose $f_n(x) = (n+1)\cos^n(x)\sin(x)$, qui est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer la limite simple $f(x) = \lim_n f_n(x)$.
2. Montrer que $\int_0^{\pi/2} f(t)dt \neq \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)dt$.

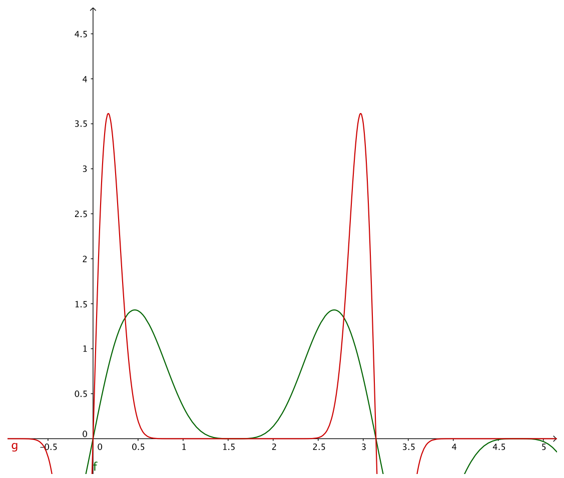

FIGURE 1 – Les fonction f_4 et f_{34}.

3. Montrer que la série $\sum_0^\infty f_n$ converge simplement sur tout $\mathbb{R}$.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon \in]0, \pi/2[$, la série $\sum_0^\infty f_n$ converge normalement sur $[\varepsilon, \pi/2]$. En déduire que la fonction associée à $\sum_0^\infty f_n$ est continue sur $]0, \pi/2]$.
5. Montrer que $\sum_0^\infty f_n$ n'est pas continue en 0. *Indication.* Trouver une primitive g_n de f_n et étudier la fonction $\sum_0^\infty g_n$. (Il faut surtout éviter d'argumenter en disant que la convergence normale n'a pas lieu !)
6. La série $\sum_0^\infty f_n$, converge-t-elle uniformément sur $[0, \pi/2]$?

Exercice 9. Pour tout $s \in \mathbb{C}$, on définit la fonction zeta de Riemann :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

1. Montrer que $\zeta(s)$ converge si $\Re(s) > 1$.
2. Montrer que ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.
3. Montrer, à l'aide d'une comparaison à une intégrale, que $\lim_{x \to \infty} \zeta(x) = 1$.
4. Montrer que $\lim_{x \to 1} \zeta(x) = \infty$.

Convergence uniforme dans le style d'Abel et Dirichlet

Exercice 10. On se donne $0 < \delta < 1$. Montrer que la série de fonctions $\theta \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge uniformément sur $]0 + \delta, 2\pi - \delta[$. La convergence, est-elle normale ?

Exercice 11 (Séries de Dirichlet)**.** Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite complexe ; on écrit pour $x \in \mathbb{R}$:

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}.$$

(Une telle série est nommée la série de Dirichlet associée à (a_n).)

1. On suppose que $L(x_0)$ converge pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que L converge uniformément sur $[x_0, +\infty[$.
2. On suppose que (a_n) est périodique de période $p \geqslant 2$, et que $a_1 + \cdots + a_p = 0$. Montrer que pour tout $x > 0$, la série $L(x)$ converge et que la fonction $]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ ainsi obtenue est continue. En déduire que $x \mapsto \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(n\pi/8)}{n^x}$ définit une fonction continue sur $]0, +\infty[$.