Sorbonne Université
Séries numériques et séries de fonctions (LU2MA260)
Septembre–Décembre 2019.

Feuille d'exercices : Séries entières et leurs applications

Exercice 1. Soit $S(z) = \sum a_n z^n$ une série entière (à coefficients complexes comme toujours).

1. Rappeler la définition de son rayon de convergence ρ.
2. Montrer que si $|z| < \rho$, alors $S(z)$ converge, et que si $|z| > \rho$, alors $S(z)$ diverge.
3. Soit r un réel positif tel que $S(z)$ converge si $|z| < r$ et $S(z)$ diverge si $|z| > r$. Montrer que $r = \rho$.

Exercice 2 (Rayons de convergence)**.** Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ dans les cas suivantes

1. $a_n = q^n$, avec $q \in \mathbb{C} - \{0\}$.
2. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ pour $n \geqslant 1$.
3. $a_n = \dfrac{1}{n^{100}}$ pour $n \geqslant 1$.
4. $\lim a_n = \ell$ et $\ell \neq 0$.
5. $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$.
6. $a_n = (\log n)^{-\log n}$ pour $n \geqslant 3$.
7. $a_n = \cos(2\pi n/5)$.
8. $a_n = \dfrac{\sin(n\pi/3)}{5^n(2n+1)}$.

Exercice 3. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ.

1. Soit k un entier strictement positif. Montrer que la série entière $\sum a_n z^{kn}$ a rayon de convergence $\sqrt[k]{\rho}$.
2. Déterminer le rayon de convergence de $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{2^n}$, et $T = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{5n}}{(n^2+3)3^n}$.

Exercice 4 (Quelques questions théoriques sur le rayon de convergence)**.** Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. En donner une démonstration ou un contre-exemple.

1. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.
3. Si la série $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence infini, alors elle converge normalement sur $\mathbb{R}$.
4. Si $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence fini $R > 0$ et si $f(x)$ note sa somme, alors soit $\lim_{x \uparrow R} f(x)$, soit $\lim_{x \downarrow -R} f(x)$ existe.

Exercice 5. On souhaite étudier une variation de l'Exercice 1. Soit $S(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ.

1. Montrer que si $|z| < \rho$, alors $(a_n z^n)$ est une suite bornée. Ensuite, montrer que si $(a_n z^n)$ est bornée, alors $|z| \leqslant \rho$.

2. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon ρ. Soit r un réel positif tel que $(a_n z^n)$ est bornée si $|z| < r$, et non-bornée si $|z| > r$. Montrer que $r = \rho$.

Exercice 6 (Sommes de séries entières)**.** Après avoir déterminé les rayons de convergence, donner la valeur, en termes de fonctions élémentaires, des séries entières suivantes :

1. $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.
2. $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$.
3. $L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.
4. $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$.
5. $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+k}$, où k est un entier strictement positif.
6. $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$. (Indication : Écrire $\frac{1}{n(n+2)}$ comme somme $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+2}$.)

Exercice 7 (Développement en série entière)**.** Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ est développable en série entière sur $]-1, +1[$.

Exercice 8 (La suite de Fibonacci)**.** Il y a plus de 800 ans, Leonardo Pisano, connu comme Fibonacci, s'est mis à étudier la suite numérique suivante :

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad \cdots,$$

c'est à dire, la suite (F_n) définie par

$$F_0 = F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ pour } n \geqslant 2.$$

A. de Moivre a montré que la suite de Fibonacci est liée à une autre merveille mathématique : le nombre d'or $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dans cet exercice, on va retrouver cette connexion à l'aide des séries entières.

1. On définit la série entière $S(x) = \sum_0^\infty F_n x^n$. Montrer que son rayon de convergence est $\geqslant \frac{1}{2}$.
   Indication : Montrer par récurrence que $F_n \leqslant 2^n$.
2. Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right[$ on a
$$(1 - x - x^2)S(x) = 1.$$
3. Soient
$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

les deux racines de $x^2 + x - 1$. Trouver $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{\alpha, \beta\}$ on ait

$$\frac{1}{x^2 + x - 1} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}.$$

4. Montrer que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}\right\},$$

où $\psi = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

5. Quel est le rayon de convergence de S ?

Autour du théorème d'Abel

Exercice 9. Dans cet exercice, on fera appel à la série entière de la fonction arctan : $\mathbb{R} \to]-\pi/4, +\pi/4[$ pour montrer la formule de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots$$

(On ne peut pas s'empêcher de penser à ce que C. G. Jacobi dit dans une de ses lettres : Le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain !)

1. En utilisant que $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, obtenir le développement de arctan en série entière.
2. Utiliser le théorème d'Abel pour montrer la formule de Leibniz.

Exercice 10. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$ fixé. On souhaite calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ (dont la convergence est assurée par les théorèmes d'Abel-Dirichlet). On considère la série entière

$$S(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} r^n$$

1. Montrer que le rayon de convergence de S est au moins 1.
2. Montrer que
$$S'(r) = \frac{\cos\theta - r}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$
3. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\theta)}{n} = -\frac{1}{2} \log(2 - 2\cos\theta).$$

Séries entières et équations différentielles

Exercice 11 (L'équation de Weber)**.** Soit k un nombre réel arbitraire. Montrer que l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + ky = 0 \qquad \text{(W)}$$

possède une solution $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est développable en série entière à l'origine avec rayon de convergence infini, et qui satisfait $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$.

Exercice 12 (L'équation de Legendre)**.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On considère l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0. \tag{L}$$

1. Soit $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. En le justifiant soigneusement, montrer que φ est solution de (L) si et seulement si les coefficients a_n vérifient des relations de récurrence que l'on précisera.
2. On suppose que $\lambda \notin \mathbb{N}$. Soit $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ qui est solution de (L). En supposant $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$, déterminer R.
3. On suppose que $\lambda = \ell(\ell+1)$ où ℓ est un entier positif.
   (a) On suppose ℓ pair. Montrer que (L) possède une solution polynomiale φ telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$.
   (b) On suppose ℓ impair. Montrer que (L) possède une solution polynomiale φ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$.

Exercice 13 (L'équation hypergéométrique)**.** Soient α, β, γ des nombres complexes. En supposant que γ n'est pas un entier négatif, on introduit l'équation différentielle, dite hypergéométrique,

$$(z - z^2)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]y' - \alpha\beta y = 0.$$

1. On admet l'existence d'une série entière $S(z) = \sum a_n z^n$ de rayon ρ non-nul, et qui est une solution de l'équation hypergéométrique. Montrer que
$$a_{n+1} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)} a_n.$$
2. Montrer que l'équation hypergéométrique possède une solution $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ayant rayon de convergence $\rho > 0$ et satisfaisant $S(0) = 1$. Ensuite, déterminer précisément ρ. Cette solution est connue comme *la série hypergéometrique*, et est notée $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$.
3. Les exercices suivants montrent comment obtenir quelques fonctions usuelles à partir d'une série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$.
   (a) Montrer que pour chaque $n \geqslant 1$, on a
   $$a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)\cdot n!}.$$
   (b) Soit $\nu \in \mathbb{R}$ et $|z| < 1$. Montrer que $(1-z)^\nu = F(-\nu, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z)$.
   (c) Soit $x \in \left]-1, +1\right[$. Montrer que $\log(1-x) = -xF(1,1,2,x)$.
   (d) Pour tout $c \in \mathbb{C}$, on a $e^c = \lim\limits_{\substack{|\lambda|<1/|c| \\ \lambda \to 0}} F(1, 1/\lambda, 1, \lambda c)$.

Exercice 14 (Séries de Bessel)**.** On souhaite étudier les solutions des équations différentielles ordinaires, dites de Bessel,

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \alpha^2\right) y = 0 \tag{B_α}$$

1. Montrer que l'équation différentielle B_0 possède une solution $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est développable en série entière à l'origine avec rayon de convergence infini, et qui satisfait $J(0) = 1$ et $J'(0) = 0$.
2. On souhaite maintenant généraliser la question précédente. Soit α un réel qui n'est pas un entier négatif. Montrer que l'équation différentielle B_α possède une solution de la forme $x^\alpha \phi(x)$, où ϕ est développable en série entière à l'origine avec rayon de convergence infini et satisfait $\phi(0) = 1$ et $\phi'(0) = 0$. [Indication : Déterminer d'abord l'équation différentielle que ϕ doit satisfaire.]

Exercice 15 (Échec de la méthode des coefficients à déterminer)**.** On considère le système différentiel

$$x^2 y'' + (3x - 1)y' + y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Est-il possible de trouver une solution développable en série entière ϕ ayant rayon de convergence strictement positif ?