Sorbonne Université
Séries numériques et séries de fonctions (LU2MA260)
Septembre–Décembre 2019.

Feuille d'exercices sur les suites de fonctions

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants on considère une suite de fonctions ($f_n : I \to \mathbb{R}$). Déterminer, si possible, la limite simple f de (f_n). Puis, étudier la convergence uniforme.

(1) $I = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \sin(x + 1/n)$.

(2) $I = [0, \infty[$ et $f_n(x) = x/n$.

(3) $I = [0, 10]$ et $f_n(x) = x/n$.

(4) $I = [0, \infty[$ et $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n, \\ -n^2 x + 2n, & \text{si } 1/n \leqslant x \leqslant 2/n \\ 0, & \text{si } x \geqslant 2/n. \end{cases}$

(5) $I = \mathbb{R}_+$ et $f_n(x) = e^{-nx}$.

(6) $I = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \dfrac{4^{nx}}{3^{nx} + 5^{nx}}$.

(7) $I = [1, +\infty[$ et $f_n(x) = \dfrac{4^{nx}}{3^{nx} + 5^{nx}}$.

(8) $I = [0, \infty[$ et $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^3 x^3}$. (Indication : Dresser le tableau de variations de f_n.)

(9) $I = [0, \infty[$ et $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2 x^2}$. (Indication : Dresser le tableau de variations de f_n.)

Exercice 2 (Le critère de Cauchy uniforme)**.** Soit ($f_n : I \to \mathbb{C}$) une suite de fonctions. Prouver que (f_n) converge uniformément vers une fonction f si et seulement si la condition suivante est satisfaite. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n \geqslant m \geqslant N$ et $x \in I$ on ait $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 3. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x) > 0$ pour tout $x \in I$. On se donne une suite de fonction ($f_n : I \to \mathbb{R}$) convergeant uniformément vers f et on désigne par C le nombre réel $\inf_{x \in I} f(x)$.

(1) On suppose que $C > 0$. Montrer qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(x) > 0$ quelque soit $x \in I$ et $n \geqslant N$.

(2) Donner un contre exemple à la proposition précédente lorsque $C = 0$.

(3) Donner un contre exemple à (1) lorsque l'hypothèse de convergence uniforme est remplacée par la convergence simple. (Indication : Employer une des fonctions de l'exercice 1.)

Exercice 4. On suppose que $(f_n : I \to \mathbb{C})$ est une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f. Soit $a \in I$ fixé et soit $p_n(x) := \int_a^x f_n(y)\,dy$.

1. Montrer que p_n converge uniformément vers $p(x) = \int_a^x f(y)\,dy$ *sur chaque intervalle* $[p,q]$ *contenant* a.
2. Montrer, par un contre-exemple, que l'affirmation précédente peut être fausse si on supprime mention à l'intervalle $[p,q]$. Indication : Considérer les fonctions $f_n(x) = 1/n$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Dans cet exercice, on souhaite étudier des exemples où "l'intégration terme à terme" ou la "dérivation terme à terme" échouent.

1. Soit $(f_n : [0,\pi/2] \to \mathbb{R})_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $x \mapsto (n+1)\cos(x)\sin^n(x)$. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction $f : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ mais que $\int_0^{\pi/2} f_n(t)\,dt$ ne converge par vers $\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt$. (Voir figure.)

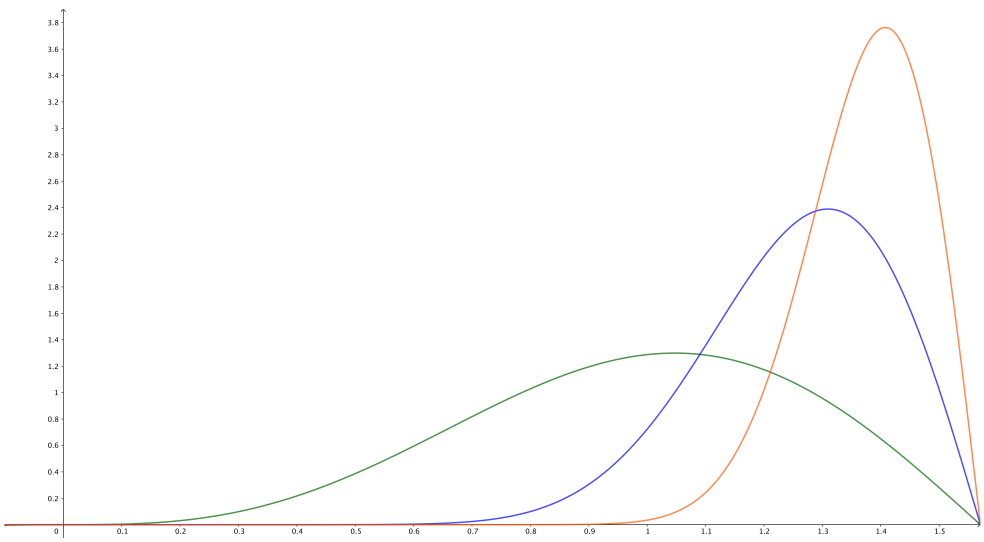

FIGURE 1 – Contre-exemple à $\lim \int_a^b = \int_a^b \lim$.

2. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on écrit : $f_n(x) = \sqrt{1/n + x^2}$.
   (a) Les fonctions f_n, sont-elles de classe C^1 ? Justifiez brièvement.
   (b) Montrer que (f_n) converge uniformément vers une fonction f qu'on déterminera.
   (c) Observer que f n'est pas dérivable en 0 et expliquer pourquoi ce fait ne contredit pas le théorème d'échange entre limite et dérivation.

Exercice 6. Soit $(f_n : [a,b] \to \mathbb{C})$ une suite de fonctions continues définie sur l'intervalle $[a,b]$. On suppose que (f_n) converge simplement sur $[a,b]$ (vers une certaine fonction), et que la convergence est uniforme sur l'intervalle $[a,b[$. Montrer qu'en fait la convergence est *uniforme sur* $[a, b]$. Dit autrement, le "lieu de convergence uniforme est fermé." Indication : Utiliser le critère de Cauchy uniforme.

Exercices avancés

Exercice 7 (Théorème de Dini)**.** Soit $(f_n : [a, b] \to \mathbb{R})$ une suite de fonctions continues qui converge ponctuellement vers une fonction continue f. On suppose de plus que pour chaque $x \in [a, b]$ fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est croissante (et convergente). On souhaite prouver que (f_n) converge uniformément vers f. L'idée derrière la preuve consiste à considérer, étant fixé un $\varepsilon > 0$, les ensembles

$$X_n := \{x \in [a, b] \,:\, f(x) - f_n(x) \geqslant \varepsilon\}.$$

1. Montrer que X_n est fermé et que $X_n \supset X_{n+1}$.
2. Montrer que $\cap_n X_n = \varnothing$.
3. Montrer que il existe un certain $N \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = \varnothing$ pour tout $n \geqslant N$. (Il s'agit de la clé de l'argument et est une conséquence du Théorème de Bolzano-Weierstrass.)
4. En déduire le Théorème mentionné.

Exercice 8. Soit I un intervalle ouvert $]a, b[$ de longueur $L > 0$, et soit $C^0(I)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur I. Pour chaque entier n strictement supérieur à $\delta := \frac{2}{L}$, pose $K_n = [a + 1/n, b - 1/n]$ et on définit

$$\|f\|_n := \sup_{x \in K_n} |f(x)|$$

1. Soit $f, g \in C^0(I)$. Montrer que
$$\sum_{n \geqslant \delta} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - g\|_n}{1 + \|f - g\|_n}.$$
converge.
2. On définit une fonction $d : C^0(I) \times C^0(I) \to \mathbb{R}_+$ par $d(f, g) = \displaystyle\sum_{n \geqslant \delta} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - g\|_n}{1 + \|f - g\|_n}$.

   Établir les propriétés suivantes :[1]
   (a) $d(f, g) = 0$ si et seulement si $f = g$.
   (b) $d(f, g) = d(g, f)$.
   (c) Si $h \in C^0(I)$, alors $d(f, g) \leqslant d(f, h) + d(h, g)$. (Indication : Étudier la fonction $\varphi(x) = \dfrac{x}{1 + x}$ ainsi que φ' et φ''.)

1. Un ensemble ayant une telle fonction est dit un espace métrique.