Sorbonne Université
Théorie des Nombres 2 (MU4MA034)
Mars–Mai 2020.

Séance 10, 3 avril 2020

- Si a et b sont des entiers, $(a \mid b)$ désigne le symbole de Kronecker associé à eux.
- Si A est un groupe abstrait, $\mathbb{X}(A)$ note le groupe des caractères linéaires de A, c'est à dire, de morphismes de groupe $A \to \mathbb{C}^\times$.
- Une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est complètement multiplicative si $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$.

Caractères de Dirichlet

Exercice 1. Soit $t > 0$ un entier.

1/ On écrit

$$X_t = \left\{ \chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \quad : \quad \begin{array}{l} \chi \text{ est } t\text{-périodique}, \\ \chi(mn) = \chi(m)\chi(n) \text{ pour tous } m, n \in \mathbb{Z} \text{ et} \\ \chi(m) \text{ s'annule uniquement si } m \wedge t \neq 1. \end{array} \right\}.$$

Quel est le lien entre X_t est les caractères de Dirichlet modulo t ?

2/ Déterminer explicitement X_2, X_4 et X_8.

Exercice 2. 1/ Exprimer les symboles de Kronecker suivants à l'aides des caractères de Dirichlet décrits à l'Exercice 1.

$$(* \mid 2), \quad (2 \mid *), \quad (4 \mid *), \quad (-4 \mid *), \quad (8 \mid *), \quad (-8 \mid *).$$

2/ On souhaite étudier $(3 \mid *)$.

a/ Calculer $(3 \mid n)$ pour $n \in \{1, \ldots, 7\}$ en utilisant la réciprocité quadratique pour le symbole de Jacobi. Constater que $(3 \mid *)$ n'est pas un caractère de Dirichlet modulo 3.

b/ Montrer que $(3 \mid 6k+1) = (-1)^k$. Utiliser ce fait pour prouver que si $q > 0$ est une période de $(3 \mid *)$, alors $6 \mid q$. Puis, à partir de $(3 \mid 2^l) = (3 \mid 2^l + q)$, déduire que

$$2^l \cdot 6 \mid q \quad \Rightarrow \quad 2^{l+1} \cdot 6 \mid q.$$

Conclure que $(3 \mid *)$ n'est pas périodique. (Un résultat de Allouche et Goldmakher montre que $(d \mid *)$ n'est jamais périodique si $d \equiv 3 \ (4)$.)

Exercice 3. On étudie la périodicité du symbole de Kronecker $(d \mid *)$.

1/ Soit p un nombre premier $\equiv 1$ (4). Montrer que $(p \mid n) = (n \mid p)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En déduire que $(p \mid *)$ est un caractère de Dirichlet modulo p.

2/ Soit p un nombre premier $\equiv 3$ (4). Montrer que $(-p \mid n) = (n \mid p)$; en déduire que $(-p \mid *)$ est un caractère de Dirichlet modulo p.

3/ Soient d et e des entiers tels que $(d \mid *)$ et $(e \mid *)$ sont des caractères de Dirichlet modulo $|d|$ et $|e|$ respectivement. Prouver que $(de \mid *) = (d \mid *)(e \mid *)$. En déduire que $(de \mid *)$ est un caractère de Dirichlet modulo $|de|$.

4/ Soit d un entier qui est $\equiv 1$ (4) et qui n'a pas de facteurs carrés. Montrer que $(d \mid *)$ est un caractère de Dirichlet modulo $|d|$. Indication : Faire une récurrence sur le nombre de facteur premiers de $|d|$.

5/ Soit $d = 4m$ avec $m \equiv 3$ (4) sans facteurs carrés. Montrer que $(d \mid *)$ est un caractère de Dirichlet modulo $|d|$. Indication : Faire une récurrence sur le nombre de facteur premiers de $|m|$.

6/ Soit $d = 8m$ avec m un entier impair sans facteur carré. Montrer que $(d \mid *)$ est un caractère de Dirichlet modulo $|d|$.

7/ En déduire que si d est le discriminant d'un corps quadratique, alors $(d \mid *)$ est un caractère de Dirichlet modulo $|d|$.

Exercice 4. Soient m un entier sans facteur carré, K le corps de nombres $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ et d le discriminant de K. Le résultat suivant a été vu lors de la séance 6, 20 mars 2020.

$$p \text{ premier impair} \implies \begin{cases} (d \mid p) = 0 & \Leftrightarrow \ p \text{ ramifie en } K \\ (d \mid p) = 1 & \Leftrightarrow \ p \text{ se décompose en } K. \\ (d \mid p) = -1 & \Leftrightarrow \ p \text{ est inerte en } K. \end{cases}$$

De même, on a vu que

$$\begin{aligned} d \equiv 0 \ (4) \quad & \Leftrightarrow \quad 2 \text{ ramifie en } K \\ d \equiv 1 \ (8) \quad & \Leftrightarrow \quad 2 \text{ se décompose en } K. \\ d \equiv 5 \ (8) \quad & \Leftrightarrow \quad 2 \text{ est inerte en } K. \end{aligned}$$

Montrer que pour un nombre premier quelconque p, les implications suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned} (d \mid p) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad p \text{ ramifie en } K \\ (d \mid p) = 1 \quad & \Leftrightarrow \quad p \text{ se décompose en } K. \\ (d \mid p) = -1 \quad & \Leftrightarrow \quad p \text{ est inerte en } K. \end{aligned}$$

Produits d'Euler

Exercice 5. On étudie quelques propriétés autour des produits d'Euler.

1/ Pour chaque entier $x \geqslant 2$, soit

$$\mathscr{N}_x = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N}^* \ : \text{si } p \text{ est facteur premier de } n, \text{ alors } p \leqslant x\}.$$

Montrer que

$$\prod_{p \leqslant x} (1 - p^{-1})^{-1} = \sum_{n \in \mathscr{N}_x} n^{-1}.$$

2/ $\star$ En déduire que

$$\prod_{p \leqslant x} (1 - p^{-1})^{-1} \geqslant \log(x + 1).$$

3/ $\star$ Utiliser la minoration précédente et l'égalité $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = 1$ pour montrer que

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} \geqslant \log\log(x + 1) - \frac{1}{2}.$$

Remarque : La somme de $\sum_{m \geqslant 2} \frac{1}{m(m-1)}$ se fait à l'aide d'une décomposition en éléments simples. Cette série est connue comme la série de Mengoli.

4/ $\star$ Soit E le sous-ensemble de $[0, 1]$ définit par les quotients $\varphi(n)/n$, où φ est l'indicatrice d'Euler et n est entier strictement positif. Possède-t-il des points adhérents ? Est-il dense ?