Sorbonne Université
Théorie des Nombres 2 (MU4MA034)
Mars–Mai 2020.

Séance 11, 21 Avril 2020

- Si A est un groupe abélien, $\mathbb{X}(A)$ note le groupe des caractères linéaires, c'est-à-dire, les morphismes de groupe $A \to \mathbb{C}^\times$. Si m est un entier positif, X_m désigne les caractères de Dirichlet modulo m.
- $\mathbb{1}_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est le caractère trivial modulo m, c'est-à-dire, le caractère de Dirichlet induit par le caractère linéaire trivial $(\mathbb{Z}/m)^\times \to \mathbb{C}^\times$.
- $(a \mid b)$ est le symbole de Kronecker.
- $D(a, r)$ désigne le disque ouvert du plan complexe centré en a et de rayon r. De même, $\overline{D}(a, r)$ désigne son adhérence.

Exercice 1 (L'équation fonctionnelle de ζ)**.** On souhaite suivre une méthode de Riemann pour montrer que la fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. La preuve est basée sur une identité remarquable d'une “fonction θ de Jacobi” (voir l'exercice 4) et la fonction Γ (voir exercices 6 à 9).

1/ Soit $\Re s > 0$. Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation suivant est vérifiée :

$$\pi^{-s/2}\frac{\Gamma(s/2)}{n^s} = \int_0^\infty x^{s/2-1}e^{-n^2\pi x}\,dx.$$

2/ Soit $\omega(x) = \sum_{n\geqslant 1} e^{-\pi n^2 x}$, pour $x > 0$. Justifier brièvement pourquoi ω est une fonction de classe C^1 sur $]0, \infty[$.

3/ En déduire de la question 1, que si $\Re s > 1$, alors

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_0^\infty x^{s/2-1}\omega(x)\,dx,$$

où $\omega(x) = \sum_{n\geqslant 1} e^{-n^2\pi x}$. (Attention : tout le travail consiste à bien justifier l'inversion dans l'intégration.)

4/ Soit s un complexe dont la partie réelle est > 1. En employant l'équation, valable pour $x > 0$,

$$\omega(1/x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^{1/2} + x^{1/2}\omega(x),$$

montrer que

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + I(s),$$

où

$$I(s) = \int_1^\infty (x^{s/2-1} + x^{-s/2-1/2})\omega(x)\,dx.$$

5/ $\star$ Pour chaque s tel que $\Re s > 1$, on définit

$$\xi(s) := s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

Prouver que ξ possède un prolongement à une fonction entière, notée encore ξ, telle que, si $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ désigne la symétrie centrale par rapport à $\frac{1}{2}$ (à savoir $s \mapsto 1-s$), alors

$$\xi(\alpha(s)) = \xi(s).$$

6/ $\star$ En déduire que

$$Z(s) = \frac{\pi^{s/2}\xi(s)}{s(s-1)\Gamma(s/2)}$$

définit un prolongement de ζ à une fonction méromorphe ayant un unique pôle simple en $s = 1$.

Indication : On devra faire appel aux propriétés de Γ définies plus bas.

7/ $\star$ Déterminer $\zeta(0)$. Utiliser le fait que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ et $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ pour calculer $\zeta(-1)$.

Exercice 2. Soient ω une racine primitive 8-ème de l'unité, K le corps de nombres $\mathbb{Q}(\omega)$ et χ_d le caractère de Dirichlet défini par le symbole de Kronecker : $\chi_d(n) = (d \mid n)$. Montrer que si $\Re s > 1$, alors

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)L(\chi_{-4}; s)L(\chi_8; s)L(\chi_{-8}; s).$$

Exercice 3. Soient ℓ un nombre premier, $n > 1$ une puissance de ℓ, ω une racine primitive n-ème de l'unité et K le corps de nombres $\mathbb{Q}(\omega)$. On souhaite arriver à la formule générale

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) \prod_{\substack{\chi \in X_n \\ \chi \neq \mathbb{1}_n}} L(\chi, s), \qquad s > 1.$$

1/ Si $f > 0$ est un entier justifier légalité en $\mathbb{C}[T]$:

$$1 - T^f = \prod_{\xi \in \mu_f} (1 - \xi T).$$

En déduire que si A est un groupe cyclique d'ordre f et a un générateur, alors

$$1 - T^f = \prod_{\chi \in \mathbb{X}(A)} (1 - \chi(a)T).$$

2/ Soit $p \neq \ell$ un nombre premier ; on désigne par f_p l'ordre de $p + n\mathbb{Z}$ dans le groupe $(\mathbb{Z}/n)^\times$. Déduire l'identité polynomiale

$$\prod_{\chi \in X_n} (1 - \chi(p)T) = \left(1 - T^{f_p}\right)^{\frac{\varphi(n)}{f_p}}.$$

Indication : Si A note le sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n)^\times$ engendré par la classe de p, et π : $\mathbb{X}((\mathbb{Z}/n)^\times) \to \mathbb{X}(A)$ l'homomorphisme naturel, on dénombrera $\mathbb{X}((\mathbb{Z}/n)^\times)$ suivant les images réciproques et on appliquera la question précédente.

3/ Montrer que, pour tout $s > 1$, on a

$$\zeta_K(s) = (1 - \ell^{-s})^{-1} \prod_{p \neq \ell} \left(1 - p^{-f_p s}\right)^{-\frac{\varphi(n)}{f_p}}.$$

En déduire la formule

$$\zeta_K(s) = (1 - \ell^{-s})^{-1} \prod_{p \neq \ell} \prod_{\chi \in X_n} \left(1 - \chi(p) p^{-s}\right)^{-1}.$$

4/ Déduire que

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) \prod_{\substack{\chi \in X_n \\ \chi \neq \mathbb{1}_n}} L(\chi, s), \qquad s > 1.$$

Compléments analytiques

Propos. Dans ces compléments, j'ai réuni plusieurs exercices et théorèmes (transformés en exercices) qui ont fait partie de mes enseignements. L'objectif étant de montrer à l'étudiant comment obtenir les bases pour bien comprendre la brève partie sur la théorie analytique de nombres étudiée dans ce cours sans avoir besoin de faire des détours inutiles et couteaux. (Plusieurs textes contemporains d'analyse complexe se contentent que la fonction Γ soit son produit de Weierstrass (exercice 8), ce qui est gênant pour l'étude de ζ. La raison pour cela est probablement le fait que les théorèmes sur les fonctions holomorphes définies par les intégrales (exercice 5) y reçoivent peu d'attention et que les critère de "dérivation sous le signe d'intégrale" ne sont pas rapprochés des critères pour les séries.)

Littérature

B07 T. J. I. Bromwich, Introduction to the theory of infinite series, MacMilland and Co. 1908. Disponible sur `https://archive.org`.

G25 E. Goursat, Cours d'Analyse Mathématique. Tomme I et II. Troisième Édition. 1925. Disponible sur `https://archive.org`.

Cours19 Mon cours "Séries de fonctions et intégrales à un paramètre". Disbonible sur `https://webusers.imj-prg.fr/~joao-pedro.dos-santos/2M261_Notes_Cours_2019.pdf`

Formule sommatoire de Poisson

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ et $x \mapsto x^2 f'(x)$ sont bornées.

1/ Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $F(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi k)$ converge absolument et définit une fonction 2π-périodique de classe C^1.

2/ Si $\widehat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\mathrm{i}x\xi}\, dx$ désigne la transformée de Fourier de f (sur $\mathbb{R}$) et $\widehat{F}(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(x)e^{-\mathrm{i}nx}\, dx$ celle de F (sur le cercle) prouver que

$$2\pi\widehat{F}(n) = \widehat{f}(n).$$

3/ En déduire la formule sommatoire de Poisson :

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2\pi k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n).$$

4/ On définit $\gamma(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Montrer que $\widehat{\gamma}'(\xi) = -\xi\widehat{\gamma}(\xi)$. En utilisant que $1 = \int_{\mathbb{R}} \gamma(x)\,dx$, en déduire que $\widehat{\gamma} = \sqrt{2\pi} \cdot \gamma$.

5/ Pour chaque $\lambda > 0$ on pose

$$\theta(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \lambda^2}.$$

Prouver que $\theta(1/\lambda) = \lambda\theta(\lambda)$. Indication : Si $\gamma_\lambda(x) = \gamma(\lambda x)$, alors $\widehat{\gamma}_\lambda(\xi) = \lambda^{-1}\widehat{\gamma}(\xi/\lambda) = \sqrt{2\pi} \cdot \lambda^{-1} \cdot \gamma(\xi/\lambda)$.

Fonctions holomorphes définies par des intégrales

Exercice 5. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : I \times U \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que pour chaque $t \in I$, la fonction $z \mapsto f(t,z)$ soit holomorphe et, si $f'(t,z)$ désigne la dérivée de $w \mapsto f(t,w)$ en z, alors $(t,z) \mapsto f'(t,z)$ est continue. De plus, on introduit l'hypothèse que pour chaque $z \in U$, l'intégrale

$$F(z) := \int_I f(t,z)\,dt$$

converge.

1/ On suppose que $I = [a,b]$. Soit $x \in U$ tel que $\overline{D}(x,r) \subset U$.

a/ Soit $t \in I$ fixé. Rappeler la formule

$$\frac{f(t,x+h) - f(t,x)}{h} - f'(t,x) = \frac{h}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t,z)}{(z-x)^2(z-x-h)}\,dz.$$

b/ En déduire

$$F'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_I f'(t,x)\,dt.$$

2/ On suppose désormais que $I = [a,b[$. On dira que F converge uniformément si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $P \in [a,b[$ tel que si $p \geqslant P$, alors

$$\left| F(z) - \int_a^p f(t,z)\,dt \right| \leqslant \varepsilon$$

pour tout $z \in U$.

a/ Montrer que le "test M de Weierstrass" ou "convergence normale $\Rightarrow$ uniforme" est vérifié dans ce contexte : l'intégrale F converge uniformément s'il existe une fonction continue $M : I \to \mathbb{R}_+$ telle que $|f(t,z)| \leqslant M(t)$ pour tout $z \in U$ et $\int_I M(t)\,dt$ converge.

b/ Montrer que si F converge uniformément alors, pour toute suite $(b_n) \subset [a, b[$ ayant b pour limite, la suite de fonctions

$$F_n(z) := \int_a^{b_n} f(t, z)\, dt$$

converge uniformément vers F.

c/ En déduire que si F converge uniformément, alors F est holomorphe et

$$F'(z) = \int_I f'(t, z)\, dz.$$

La fonction Γ

Exercice 6 (Premières propriétés)**.** Pour chaque complexe s tel que $\Re s > 0$, on écrit

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt.$$

1/ Montrer, dans la terminologie de l'exercice 5, que Γ converge uniformément sur chaque bande $\{a \leqslant \Re s \leqslant A\}$, où $a > 0$. En déduire que Γ est une fonction holomorphe. Indication : On pourra écrire $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_\infty$, où Γ_0 correspond à l'intégrale $\int_0^1$ et Γ_∞ à $\int_1^\infty$.

2/ Soit s tel que $\Re s > 0$. En faisant une intégration par parties, montrer que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \geqslant 1$ entier.

3/ Si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$\Gamma_n(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}, \qquad \Re s > -n.$$

Montrer que

$$\Gamma_n(s) = \Gamma(s), \qquad \Re s > 0$$

et en déduire que Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, toujours notée Γ, n'ayant que des *pôles simples* sur $\{0, -1, \ldots\}$.

4/ $\star$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le résidu de Γ en $-n$?

Exercice 7 (La formule d'Euler pour Γ)**.** On souhaite montrer la formule d'Euler

$$\Gamma(s) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!\, n^s}{s(s+1)\ldots(s+n)}, \qquad \Re s > 0.$$

[Cette formule était la définition initiale de la fonction Γ. Ici je suis l'exposition du classique [Br08]. Il arrive à contourner l'emploi de la convergence dominée par une remarque assez simple.]

1/ On commence par des remarques simples.

a/ Montrer que les inégalités suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned} e^{\theta} &> 1+\theta \quad && \text{si } \theta > 0, \\ e^{-\theta} &> 1-\theta, \quad && \text{si } \theta > 0, \\ (1-\theta)^n &> 1-n\theta \quad && \text{si } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Indication : Utiliser le théorème des accroissements finis.

b/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que si $0 < t < n$, alors

$$0 < e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < e^{-t}\frac{t^2}{n}.$$

2/ On fixe s un complexe tel que $\Re s > 0$. Utiliser l'encadrement

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}\frac{t^2}{n}, \qquad \text{pour tout } 0 < t < n,$$

pour prouver

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cdot t^{s-1}\, dt.$$

3/ Montrer que

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to+\infty} n^s \int_0^1 (1-u)^n u^{s-1}\, du.$$

4/ En integrant successivement par parties, démontrer la formule d'Euler.

Exercice 8 (Le produit de Weierstrass pour la fonction Γ)**.** On souhaite montrer que pour chaque s tel que $\Re s > 0$, la fonction Γ possède un expression comme un produit infini :

$$\Gamma(s) = \frac{1}{se^{\gamma s}} \prod_{k=1}^{\infty} e^{s/k}\left(1 + \frac{s}{k}\right)^{-1},$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni (définie dans la suite).

1/ En étudiant la série $\sum_{k\geqslant 1} \delta_k$, où $\delta_k = \dfrac{1}{k} - \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$, montrer que la suite

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$$

converge. La limite, notée γ, est connue comme la constante d'Euler-Mascheroni.

2/ À l'aide de la formule d'Euler pour Γ, en déduire la formule de Weierstrass pour Γ.

Exercice 9 (Propriétés du produit de Weierstrass)**.** On souhaite montrer que la formule du produit de Weierstrass pour Γ est valable sur $\mathbb{C}$ et ainsi déduire que Γ ne s'annule jamais. Pour chaque $s \in \mathbb{C}$, on écrit

$$P_n(s) = \prod_{k=1}^{n} e^{-s/k} \left(1 + \frac{s}{k}\right).$$

1/ Soit $\log : D(1,1) \to \mathbb{C}$ la branche principale du logarithme. Soit $R > 0$ un réel. Montrer que, pour chaque entier N tel que $2R \leqslant N$, la série de fonctions

$$\sum_{n \geqslant N} \log\left(1 + \frac{s}{n}\right) - \frac{s}{n}$$

converge normalement sur le disque $\overline{D}(0,R) = \{s \in \mathbb{C} \ : \ |s| \leqslant R\}$.

2/ Pour chaque $s \in \mathbb{C}$, montrer que

$$P(s) := \lim_{n \to \infty} P_n(s)$$

existe et que la fonction P ainsi déduite est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Puis, prouver que P s'annule exclusivement sur $\{-1, -2, \ldots\}$.

3/ En déduire que pour chaque $s \in \mathbb{C} \backslash \{0, -1, \ldots\}$, on a

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s e^{\gamma s}} \prod_{k=1}^{\infty} e^{s/k} \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{-1},$$

et que Γ ne s'annule jamais.