Sorbonne Université
Théorie des Nombres 2 (MU4MA034)
Mars–Mai 2021.

Séance 10, 9 avril 2021

- Si a et b sont des entiers, $(a \mid b)$ désigne le symbole de Kronecker associé à eux.
- Si A est un groupe abstrait, $\mathbb{X}(A)$ note le groupe des caractères linéaires de A, c'est à dire, de morphismes de groupe $A \to \mathbb{C}^\times$.
- Une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est totalement multiplicative si $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$.
- Pour chaque entier $d > 0$, on désigne par $\mathbb{1}_d$ la fonction $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ qui vaut 1 sur les entiers premiers avec d et zéro ailleurs.

Exercice 1. Dans cet exercice, on fera appel aux caractères de Dirichlet décrits à l'Exercice 3 de la dernière séance :

$$\widetilde{\psi}(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 1, & \text{si } k \equiv 1 \ (4), \\ -1, & \text{si } k \equiv 3 \ (4), \end{cases} \qquad \widetilde{\lambda}(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 1, & \text{si } k \equiv 1, 5 \ (8), \\ -1, & \text{si } k \equiv 3, 7 \ (8), \end{cases}$$

$$\widetilde{\mu}(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 1, & \text{si } k \equiv 1, 3 \ (8), \\ -1, & \text{si } k \equiv 5, 7 \ (8), \end{cases} \qquad \widetilde{\nu}(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 1, & \text{si } k \equiv \pm 1 \ (8), \\ -1, & \text{si } k \equiv \pm 3 \ (8). \end{cases}$$

(On note que $\widetilde{\psi} = \widetilde{\lambda}$.)

1/ Exprimer les symboles de Kronecker suivants à l'aides des caractères de Dirichlet précédents.

$$(* \mid 2), \quad (2 \mid *), \quad (4 \mid *), \quad (-4 \mid *), \quad (8 \mid *), \quad (-8 \mid *).$$

2/ On souhaite étudier $(3 \mid *)$ et constater qu'il n'est pas un caractère de Dirichlet.

a/ Calculer $(3 \mid n)$ pour $n \in \{1, \ldots, 7\}$ en utilisant la réciprocité quadratique pour le symbole de Jacobi. Constater que $(3 \mid *)$ *n'est pas un caractère de Dirichlet modulo 3*.

b/ Montrer que $(3 \mid 6k + 1) = (-1)^k$. Utiliser ce fait pour prouver que si $q > 0$ est une période de $(3 \mid *)$, alors $6 \mid q$. Puis, à partir de $(3 \mid 2^l) = (3 \mid 2^l + q)$, déduire que

$$2^l \cdot 6 \mid q \quad \Rightarrow \quad 2^{l+1} \cdot 6 \mid q.$$

Conclure que $(3 \mid *)$ n'est pas périodique et donc *n'est pas un caractère de Dirichlet.* (Un résultat de Allouche et Goldmakher montre que $(d \mid *)$ n'est jamais périodique si $d \equiv 3\ (4)$.)

Exercice 2 (Périodicité du symbole de Kronecker)**.** On étudie la périodicité du symbole de Kronecker $(d \mid *)$ pour d convenable.

1/ Soit p un nombre premier $\equiv 1\ (4)$. Montrer que $(p \mid n) = (n \mid p)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En déduire que $(p \mid *)$ est un caractère de Dirichlet modulo p.

2/ Soit p un nombre premier $\equiv 3\ (4)$. Montrer que $(-p \mid n) = (n \mid p)$; en déduire que $(-p \mid *)$ est un caractère de Dirichlet modulo p.

3/ Soient d et e des entiers tels que $(d \mid *)$ et $(e \mid *)$ sont des caractères de Dirichlet modulo $|d|$ et $|e|$ respectivement. Prouver que $(de \mid *) = (d \mid *)(e \mid *)$. En déduire que $(de \mid *)$ est un caractère de Dirichlet modulo $|de|$.

4/ Soit d un entier qui est $\equiv 1\ (4)$ et qui n'a pas de facteurs carrés. Montrer que $(d \mid *)$ est un caractère de Dirichlet modulo $|d|$. Indication : Faire une récurrence sur le nombre de facteur premiers de $|d|$.

5/ Soit $d = 4m$ avec $m \equiv 3\ (4)$ sans facteurs carrés. Montrer que $(d \mid *)$ est un caractère de Dirichlet modulo $|d|$. Indication : Faire une récurrence sur le nombre de facteur premiers de $|m|$.

6/ Soit $d = 8m$ avec m un entier impair sans facteur carré. Montrer que $(d \mid *)$ est un caractère de Dirichlet modulo $|d|$.

7/ En déduire que si d est le discriminant d'un corps quadratique, alors $(d \mid *)$ est un caractère de Dirichlet modulo $|d|$.

Exercice 3. Soient ω une racine primitive 8-ème de l'unité, K le corps de nombres $\mathbb{Q}(\omega)$ et χ_d le caractère de Dirichlet défini par le symbole de Kronecker : $\chi_d(n) = (d \mid n)$. (Ceci signifie que d est choisi pour que χ_d soit un caractère de Dirichlet.) Montrer que si $\Re s > 1$, alors

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) L(\chi_{-4}; s) L(\chi_8; s) L(\chi_{-8}; s).$$