Sorbonne Université
Théorie des Nombres 2 (MU4MA034)
Mars–Mai 2021.

---

# Séance 4, 19 Mars 2021

---

**Notations et conventions.**

- Pour chaque $n > 1$, $\mu_n$, respectivement $\mu'_n$, note l'ensemble des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$, respectivement les racines primitives.
- Si $K$ est un corps de nombres, $\mathfrak{O}_K$ désigne son anneau d'entiers.
- Si $K$ est un corps de nombres, $\Delta_K$ note *le* discriminant de $K$. Il s'agit d'un entier.
- Si $K$ est un corps de nombres, un idéal premier de $K$ est un idéal premier de $\mathfrak{O}_K$. Pour un tel premier $\mathfrak{p}$, le corps résiduel $\mathfrak{O}_K/\mathfrak{p}$ sera noté $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$.

## Détermination des anneaux d'entiers

**Exercice 1.** Soient $p$ un nombre premier, $q = p^m$ et $K$ le corps de nombres $\mathbb{Q}(\theta)$ où $\theta = \sqrt[q]{p}$. Montrer que $\mathfrak{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$.

**Exercice 2.** Soient $p$ un nombre premier, $q > 1$ une puissance de $p$, $\zeta$ une racine primitive $q$-ème de l'unité et $K$ le corps de nombres $\mathbb{Q}(\zeta)$. Montrer que $\mathscr{B} = \{1, \zeta, \ldots, \zeta^{\varphi(q)-1}\}$ est une base entière de $\mathfrak{O}_K$ et calculer ensuite, à signe près, $\Delta_K$.

**Exercice 3.** Soit $K = \mathbb{Q}(\mathrm{i}, \sqrt{2})$. En utilisant un corps cyclotomique et l'exercice 2, déterminer le discriminant de $K$. Ensuite, montrer que $\mathscr{B} = \left\{1, \mathrm{i}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right\}$ est base entière de $\mathfrak{O}_K$.

**Exercice 4** (Extensions monogènes cubiques)**.** Soient $m > 0$ un entier qui n'est pas un cube, $\theta = \sqrt[3]{m}$ et $K = \mathbb{Q}(\theta)$.

1/ Soit $\mathscr{B} = \{1, \theta, \theta^2\}$. Calculer $\Delta_K(\mathscr{B})$.

2/ On suppose désormais que $m$ *n'a pas de facteur carré et* $m \not\equiv \pm 1 \mod 9$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base entière de $\mathfrak{O}_K$ et en particulier $\mathfrak{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$. Indication : Si $3 \nmid m$, on considère $\mathbb{Z}[\sigma]$, où $\sigma = \theta - m$.