Sorbonne Université
Théorie des Nombres 2 (MU4MA034)
Mars–Mai 2021.

Séance 7, 30 mars 2021

- Un premier de K est un idéal premier de $\mathfrak{O}_K$.
- On dit qu'un premier $\mathfrak{p}$ de K divise un $a \in \mathfrak{O}_K$ si $a \in \mathfrak{p}$.
- Le groupe des classes de $\mathfrak{O}_K$ est noté Cl_K. La classe d'un idéal fractionnaire $\mathfrak{a}$ dans Cl_K sera désignée par $[\mathfrak{a}]$.

Autour des théorèmes de Minkowski

Exercice 1. 1/ Soit K un corps de nombres de signature (r, s), degré n et plongement canonique $\sigma : K \to \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$. On choisit une base entière $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de K. Rappeler pourquoi les vecteurs $\sigma(\alpha_1), \ldots, \sigma(\alpha_n)$ sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants.

2/ Déterminer deux vecteurs $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ qui sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, mais qui ne sont pas $\mathbb{R}$-linéairement indépendants. Le sous-groupe $A = \mathbb{Z}\boldsymbol{u} + \mathbb{Z}\boldsymbol{v}$ est-il discret ?

Exercice 2. Soit $\alpha = \sqrt[3]{3}$ et soit $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

1/ Décrire explicitement le plongement canonique σ de K.

2/ Vérifiez directement que $\{\sigma(1), \sigma(\alpha), \sigma(\alpha^2)\}$ est une $\mathbb{R}$-base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ et que

$$\big[\det(\sigma(1), \sigma(\alpha), \sigma(\alpha^2))\big]^2 = \frac{|\Delta_K(1, \alpha, \alpha^2)|}{4}$$

Exercice 3. Quels sont les corps de nombres où chaque nombre premier est non-ramifié ?

Exercice 4. On fixe K un corps de nombres de degré n, signature (r, s) et constante de Minkowski $M_K = \left(\frac{4}{\pi}\right)^s \frac{n!}{n^n}\sqrt{|\Delta_K|}$. (Attention : La terminologie n'est pas universellement acceptée.)

1/ Montrer que Cl_K est engendré par (les classes des) idéaux premiers dont la norme est au plus M_K. (Note : On dira que l'ensemble $\varnothing$ engendre un groupe si et seulement si le groupe est trivial.)

2/ Pour chaque nombre premier p, on écrit

$$\mathscr{D}_p = \{\mathfrak{p} \text{ premier de } \mathfrak{O}_K \;:\; \mathfrak{p} \mid p\}.$$

Montrer que les (classes des) éléments de $\mathscr{M} = \bigcup_{p \leqslant M_K} \mathscr{D}_p$ engendrent Cl_K.

3/ Soit K un corps de nombres parmi $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$. Montrer que l'ensemble $\mathscr{M}$ de la question précédente est vide et en déduire que $\mathfrak{O}_K$ est principal.

4/ Pour chaque $d \in \{11, 19, 43, 67, 163\}$, soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Exprimer $\mathfrak{O}_K$ comme $\mathbb{Z}[\alpha]$; ensuite déterminer le polynôme minimal f de α ainsi que $\operatorname{disc}(f)$. Indication : Dans tous les cas, $d \equiv 3\ (4)$.

5/ Montrer que les anneaux d'entiers des corps K de la question précédente sont tous principaux. (Gauss avait déjà conjecturé que $\mathfrak{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d})}$ était principal *seulement si*,

$$d \in \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163\}.$$

Cette conjecture a été vérifiée au siècle XX.) Indication : Faire appel à une calculatrice et à $\frac{2}{\pi} < 0,637$.

Exercice 5. Déterminer la structure du groupe de classes des corps de nombres suivantes : $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-10})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-13})$.