

Séance 8, 2 avril 2021

- Un premier de K est un idéal premier de \mathfrak{O}_K .
- On dit qu'un premier \mathfrak{p} de K divise un $a \in \mathfrak{O}_K$ si $a \in \mathfrak{p}$. On désigne par \mathcal{D}_a (les diviseurs) l'ensemble des premiers de K qui contiennent a .
- Le groupe des classes de \mathfrak{O}_K est noté Cl_K . La classe d'un idéal fractionnaire \mathfrak{a} dans Cl_K sera désignée par $[\mathfrak{a}]$.
- Si K est un corps de nombres de degré n et signature (r, s) , la constante de Minkowski de K est $M_K = \frac{4^s n!}{\pi^s n^n} \sqrt{|\Delta_K|}$. (Cette terminologie n'est pas universelle.)

Groupes de classes

Exercice 1. Soient $m > 0$ un entier qui n'est pas un cube, α la racine $\sqrt[3]{m}$ et K le corps de nombres $\mathbb{Q}(\alpha)$. On étudie, dans des cas spécifiques, le groupe de classes de l'anneau d'entiers \mathfrak{O}_K . (Une technique utile qui est présentée dans la suite est une méthode pour trouver des générateurs d'un idéal.)

- 1/ Justifier brièvement pourquoi $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ est une \mathbb{Q} -base de K . Ensuite, exprimer $N_K(x + y\alpha + z\alpha^2)$ en fonction de x, y et z .
- 2/ En supposant que m n'a pas de facteur carré et que $m \not\equiv \pm 1 \pmod{9}$, déterminer une base entière de \mathfrak{O}_K et le discriminant Δ_K . (Vous pouvez consulter les Exercices de la séance du 13 mars 2021.)
- 3/ Montrer que si $m = 2$, alors \mathfrak{O}_K est principal.
- 4/ On se concentre sur le cas $m = 3$.
 - a/ Montrer que
$$2\mathfrak{O}_K = \mathfrak{p}\mathfrak{q},$$
où $\mathfrak{p} = (2, f(\alpha))$ et $\mathfrak{q} = (2, g(\alpha))$ avec f et g dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que $f \equiv X + 1 \pmod{2}$ et $g \equiv X^2 + X + 1 \pmod{2}$. Par un choix judicieux de f et g , déduire que \mathfrak{p} et \mathfrak{q} sont principaux. Indication : Considérer $N(f(\alpha)\mathfrak{O}_K)$ et $N(g(\alpha)\mathfrak{O}_K)$.
 - b/ En déduire que \mathfrak{O}_K est principal.
- 5/ On se concentre sur le cas $m = 5$.
 - a/ Montrer que chaque premier de \mathcal{D}_5 et de \mathcal{D}_7 est principal.

- b/ Montrer que \mathcal{D}_3 possède un unique élément et que cet élément, \mathfrak{p} disons, est de la forme $(3, f(\alpha))$, où $f \in \mathbb{Z}[X]$ est tel que $f \equiv X + 1 \pmod{3}$. Prouver que \mathfrak{p} est principal en choisissant judicieusement f .
- c/ Montrer que $(2) = \mathfrak{p}\mathfrak{q}$ avec $\mathfrak{p} = (2, \alpha + 1)$ et $\mathfrak{q} = (2, \alpha^2 + \alpha + 1)$. Montrer que \mathfrak{p} et \mathfrak{q} sont principaux. Indication : Pour trouver un générateur de \mathfrak{p} , on montrera que l'unique idéal de \mathcal{D}_3 (trouvé dans la question précédente) divise $(\alpha + 1)$, et pour \mathfrak{q} on remplacera $\alpha^2 + \alpha + 1$ par $(1 + \varepsilon_2)\alpha^2 + (1 + \varepsilon_1)\alpha + (1 + \varepsilon_0)$, où chaque ε_i est pair.
- d/ En déduire que \mathfrak{D}_K est principal.

Exercice 2. Montrer que le groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{-14})$ est $\mathbb{Z}/4$. Indications : (a) On considère un diviseur \mathfrak{p}_2 de 2 et un diviseur \mathfrak{p}_3 de 3 et on montre que $[\mathfrak{p}_3]^2 = [\mathfrak{p}_2]$. (b) Pour déterminer des générateurs d'un idéal \mathfrak{a} , on travaillera avec l'isomorphisme $\mathfrak{D}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-14})} \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 14)$.