Degrés topologiques et applications

Jérôme Droniou[1]

20/06/2006

[1]Département de Mathématiques, UMR CNRS 5149, CC 051, Université Montpellier II, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France. email: droniou@math.univ-montp2.fr

Table des Matières

Notations générales.
N désigne un entier supérieur ou égal à 1. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^N$ est noté $x \cdot y$, et $|\cdot|$ est la norme euclidienne associée.
Si E est un espace vectoriel normé, on notera $||\cdot||$ sa norme (sauf dans le cas particulier de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$, cf ci-dessus); "dist" est la distance correspondante et $B(x,r)$ (respectivement $\overline{B}(x,r)$) la boule ouverte (respectivement fermée) de centre $x \in E$ et de rayon r. Id désigne l'application identité de E.
Si A est une partie d'un espace topologique, $\overline{A}$ désigne son adhérence et ∂A son bord. Lorsque A est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^N$, $|A|$ est la mesure de Lebesgue de A.
Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est de classe C^1, $f'(x)$ désigne la différentielle de f en x et $Jf(x) = \det(f'(x))$ le déterminant jacobien de f en x.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Avant-propos

Soit $y \in \mathbb{R}^N$, $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application au moins continue et considérons l'équation

$$f(x) = y. \tag{1.1.1}$$

Comment peut-on s'assurer de manière “un peu pratique” qu'il existe au moins une solution x à (1.1.1)?

Il y a une réponse relativement simple dans le cas où f est linéaire: si le déterminant de f est non nul, alors il existe une solution (et même une seule) à (1.1.1), et ce pour tout $y \in \mathbb{R}^N$.
Ceci n'est pas une condition nécessaire et suffisante: il peut exister des solutions, pour certains y, lorsque le déterminant de f s'annule; dans ce cas, on peut cependant constater que ces solutions ne sont pas stables: si l'on perturbe un peu y, il peut ne plus exister de solution du tout. C'est particulièrement critique si l'on veut calculer une solution de (1.1.1), par exemple à l'aide d'un algorithme tournant dans un ordinateur: les erreurs machines sur y vont à coup presque sûr faire sortir celui-ci de la (très fine) zone dans laquelle on sait que (1.1.1) est soluble, empêchant en pratique de trouver les solutions de cette équation.
A l'inverse, dans la situation où le déterminant de f est non-nul, la solution de (1.1.1) est particulièrement stable: si l'on perturbe y ou f (par une application linéaire), on sait qu'il continue à exister une solution à (1.1.1), qui est de plus proche de la solution originellement cherchée.

Nous souhaitons ici développer un outil jouant, pour des applications non-linéaires, ce rôle du déterminant pour les applications linéaires: un réel, le “degré”, qui indique par sa non-nullité que (1.1.1) a au moins une solution, et qui plus est une solution “stable”. De manière évidente, ce degré dépendra de f et y, mais aussi de l'ensemble sur lequel on cherche les solutions à (1.1.1) (cette question n'était pas d'actualité dans le cas des applications linéaires, qui sont naturellement définies sur tout l'espace et pour lesquelles il est naturel, du moins dans un premier temps, de ne pas restreindre la zone sur laquelle on cherche à résoudre (1.1.1)).

Une première idée pour définir le degré de f en y sur un ensemble Ω pourrait être “*c'est le nombre de solutions à (1.1.1) dans* Ω”. Cependant, on souhaite quand même qu'il soit plus facile en pratique de prouver la non-nullité du degré que de prouver que (1.1.1) a des solutions. En ce sens, la définition précédente ne semble pas faire avancer grand chose: on veut savoir qu'il existe des solutions à (1.1.1) en prouvant que le degré correspondant est non-nul, et pour prouver ceci il faut savoir qu'il existe des solutions à (1.1.1)...
Cette première définition peut donc paraître trop naïve, mais elle n'est curieusement pas si éloignée que cela de la définition finale; en fait, il manque juste deux ingrédients pour faire de cette définition

l'outil extrèmement puissant que nous allons étudier: il ne faut compter que les solutions "stables", et les compter avec une "orientation".

L'idée principale du degré est de "suivre" les solutions au fur et à mesure que l'on modifie f. On commence par partir d'une fonction f_0 assez simple, pour laquelle on sait dire qu'il existe des solutions à $f_0(x) = y$, et on cherche à modifier continuement cette fonction pour arriver à f (en terme précis, on utilise une homotopie entre f_0 et f), tout en suivant le devenir des solutions de (1.1.1) au cours de cette modification pour espérer en conserver au moins une jusqu'au bout, qui sera donc solution de $f(x) = y$. Ceci n'est bien sûr pas faisable en général: les solutions que l'on suit peuvent sortir du domaine, ou bien disparaître tout simplement (prendre une parabole sur $\mathbb{R}$ orientée vers le haut et ayant deux zéros, et la monter progressivement: à un moment donné, ses deux zéros se rejoignent, puis disparaissent).
Dans notre construction du degré, il faudra donc éliminer ces deux situations. La première (fuite d'une solution par le bord du domaine concerné) sera évitée en ne regardant que des fonctions pour lesquelles les solutions éventuelles de $f(x) = y$ restent éloignées du bord du domaine. La deuxième situation (disparition des solutions — principalement parce qu'elles se rassemblent avant de s'évanouir) sera réglée en collant à chaque solution de $f(x) = y$ une étiquette (un signe) indiquant si elle est susceptible ou non de disparaître après s'être rassemblée avec une de ses consoeurs.

1.2 Applications du degré

Afin d'illustrer l'intérêt et la diversité des champs d'application du degré topologique (ou plutôt *des* degrés), nous présentons quelques résultats, plusieurs assez classiques, qui peuvent être vus comme conséquences du degré. Les preuves de ces résultats sont données dans les sections indiquées après les titres.

1.2.1 Points fixes

(VOIR SECTION 4.1.1)

A tout seigneur tout honneur: un des degrés que nous allons étudier est attribué à L.E.J. Brouwer, et le plus célèbre des théorèmes de Brouwer est probablement celui du point fixe.

Théorème 1.2.1 (Point fixe de Brouwer) *Soit $\overline{B}$ la boule unité fermée $\mathbb{R}^N$ et $f : \overline{B} \to \overline{B}$ continue. Alors f a un point fixe: il existe $x \in \overline{B}$ tel que $f(x) = x$.*

Ce théorème a une extension en dimension infinie, le théorème de point fixe de Schauder.

Théorème 1.2.2 (Point fixe de Schauder) *Soit $\overline{B}$ la boule unité fermée d'un Banach E et $f : \overline{B} \to \overline{B}$ continue telle que $f(\overline{B})$ est relativement compacte dans E. Alors f a un point fixe: il existe $x \in \overline{B}$ tel que $f(x) = x$.*

Les preuves de ces deux théorèmes seront immédiates une fois le degré topologique construit. On peut aussi noter, et c'est classique, que le théorème de Schauder peut se déduire du théorème de Brouwer.

En fait, beaucoup de conséquences du degré topologique sont souvent vues comme de simples applications des deux théorèmes précédents. Il faut cependant comprendre que le degré topologique est un outil bien plus puissant, plus général et souvent même plus facile d'utilisation que ces théorèmes de point fixe. Nous verrons plusieurs exemples de ceci dans la suite, et pour commencer nous pouvons déjà donner à ruminer le résultat suivant, dont la preuve par degré topologique est immédiate mais qui ne semble pourtant pas être une conséquence évidente du théorème de point fixe de Brouwer (c'est plutôt l'inverse!).

Proposition 1.2.3 *Soit $f : \overline{B} \to \mathbb{R}^N$ une application continue sur la boule unité fermée de $\mathbb{R}^N$ telle que, pour tout $x \in \partial B$, $f(x)$ n'est pas sur la demi-droite vectorielle issue de x (i.e. $f(x) \notin]1, \infty[x$). Alors f a un point fixe dans $\overline{B}$.*

1.2.2 Les fonctions continues ne se déchirent pas

(VOIR SECTION 4.1.2)

Comme indiqué dans l'avant-propos, le degré est conçu pour signaler qu'une fonction donnée prend une valeur donnée; il est donc naturel que plusieurs de ses applications concernent des résultats de surjectivité de fonctions.

Proposition 1.2.4 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^N$ *continue telle que* $f_{|\partial\Omega}=\mathrm{Id}$. *Alors* $\Omega\subset f(\Omega)$.

Proposition 1.2.5 *Soit* $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ *une fonction continue telle que* $\frac{f(x)\cdot x}{|x|}\to\infty$ *lorsque* $|x|\to\infty$. *Alors* f *est surjective sur* $\mathbb{R}^N$.

Formellement, ces propositions ne sont pas trop surprenantes puisqu'elles ne font que traduire que l'image d'une fonction continue ne peut se "déchirer" pour laisser apparaître des trous: si on contrôle le comportement de la fonction au bord du domaine ou à l'infini, on peut assurer que son image n'a pas de trop gros trous. Ce qui est plus surprenant, c'est que l'on arrive à prouver ces résultats! Car si l'idée qu'"une fonction continue ne peut se déchirer" est bien naturelle, mettre des arguments mathématiques derrière peut être nettement plus compliqué. Sans degré topologique, ces deux propositions ne semblent pas du tout évidentes à prouver; à l'aide du degré topologique, leurs preuves seront très simples. Ceci atteste de la puissance du degré... et, par le principe de conservation de la difficulté, nous laisse soupçonner que la construction dudit degré sera ardue!

A noter que la proposition 1.2.5 est un des outils essentiels pour prouver l'existence d'une solution faible u à l'équation aux dérivées partielles non-linéaire

$$\left\{\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=g & \text{dans } U,\\ u=0 & \text{sur } \partial U,\end{array}\right. \tag{1.2.1}$$

où $p\in]1,\infty[$ ([1]), U est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et g est donnée. Voir par exemple [10].

1.2.3 $\mathbb{C}$ est algébriquement clos

(VOIR SECTION 4.1.3)

Le fait que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos est une conséquence assez immédiate du théorème de D'Alembert-Gauss, aussi appelé "théorème fondamental de l'algèbre" et l'un des dignes représentants de la famille des théorèmes ayant une multitude de démonstrations "différentes" ([2]). Toutes ces démonstrations font forcément appel, à un moment donné ou un autre, à des outils d'analyse (puisque ce théorème repose sur des propriétés de $\mathbb{R}$); l'une peut justement se faire via le degré topologique, comme nous le verrons.

Théorème 1.2.6 (D'Alembert-Gauss) *Tout polynôme non constant à coefficients complexes a au moins une racine dans* $\mathbb{C}$.

1.2.4 Continuité des zéros d'une fonction holomorphe

(VOIR SECTION 4.1.4)

Comme on l'a vu plus haut avec l'exemple de la parabole montante, lorsque qu'une équation $f(x)=0$ a des solutions et que l'on perturbe même très légèrement f, en général on peut très bien totalement perdre ces solutions. Le théorème de Rouché affirme que, dans le cas de fonctions holomorphes, ceci ne peut se produire.

[1] L'opérateur $u\to-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ s'appelle le p-lapacien et, lorsque $p=2$, correspond au laplacien usuel... enfin, celui des analystes.

[2] Gauss semble coutumier des théorèmes aux nombreuses démonstrations... en témoigne sa loi de réciprocité quadratique pour laquelle il existe près de 200 démonstrations différentes aujourd'hui.

Théorème 1.2.7 (Rouché) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et f et g deux fonctions holomorphes sur un voisinage de $\overline{\Omega}$. On suppose que f n'a aucun zéro sur $\partial\Omega$. Si $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ pour tout $z \in \partial\Omega$, alors f et g ont même nombre de zéros dans Ω (comptés avec leur multiplicité).*

On peut préférer énoncer la conséquence suivante qui, bien que moins précise, est plus parlante puisqu'elle établit en quelques sortes que les zéros d'une fonction holomorphe sont "continus" par rapport aux perturbations de ladite fonction.

Proposition 1.2.8 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega}$ n'ayant aucun zéro sur $\partial\Omega$. On note $(z_1, \ldots, z_k)$ les zéros de f dans Ω et $(n_1, \ldots, n_k)$ leurs multiplicités respectives. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute fonction g holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega}$ vérifiant $\sup_{\overline{\Omega}} |f - g| < \delta$, tous les zéros de g dans Ω sont dans $\cup_{i=1}^k B(z_i, \varepsilon)$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, g a exactement n_i zéros (comptés avec leur multiplicité) dans $B(z_i, \varepsilon)$.*

Ce résultat a de nombreuses applications, la plus célèbre étant probablement la "continuité" des valeurs propres d'une matrice par rapport à ses coefficients.

1.2.5 Injection ouverte et conservation de la dimension

(voir section 4.2.1)

C'est un fait algébrique bien connu, et assez simple, qu'une application linéaire $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ injective est aussi surjective, donc un isomorphisme et en particulier ouverte: l'image directe par l'application en question de tout ouvert de $\mathbb{R}^N$ est aussi un ouvert.
Cette dernière propriété reste vraie pour les applications continues injectives mais non forcément linéaires; la preuve de ce résultat est cependant nettement plus compliquée que dans le cas linéaire, même à l'aide du degré topologique.

Théorème 1.2.9 (Injection ouverte) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f : U \to \mathbb{R}^N$ une application continue injective. Alors f est ouverte: pour tout ω ouvert inclus dans U, $f(\omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$.*

Une autre propriété simple des applications linéaire est qu'il est impossible d'injecter linéairement $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^p$ lorsque $N > p$: une application linéaire injective doit conserver la dimension. C'est assez compréhensible dans le sens où une application linéaire est quasiment un arrangement combinatoire fini de directions; si l'on veut une propriété d'injectivité, il faut avoir assez de place pour arranger ces directions (de la même manière que pour mettre un ensemble fini de manière injective dans un autre, ce qui est aussi un exercice combinatoire fini, il faut avoir un cardinal assez important à l'arrivée, pour avoir la place de faire cette combinatoire injective).
C'est peut-être un peu plus étonnant de réaliser que même si l'on s'autorise à "plier", de manière aussi compliquée que voulue, un espace de dimension finie (ce qui n'est plus un exercice combinatoire de ré-arrangement de quelques directions), on ne pourra quand même pas le mettre dans un espace de dimension plus petite; il n'y aussi pas la "place", mais la place en question est cette fois topologique et non combinatoire. C'est ce que le résultat suivant, conséquence immédiate du théorème 1.2.9, énonce.

Théorème 1.2.10 (Conservation de la dimension) *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$ et $p < N$. Alors il n'existe pas d'application continue injective $U \to \mathbb{R}^p$.*

1.2.6 Température et pression à la surface de la terre

(voir section 4.2.1)

A chaque instant, il existe deux points antipodaux à la surface de la terre qui ont exactement même température et même pression... c'est une conséquence du théorème suivant.

Théorème 1.2.11 *Soit $N > p$ deux entiers et $f : S^{N-1} \to \mathbb{R}^p$ continue (S^{N-1} désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^N$). Alors il existe $x \in S^{N-1}$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Notons cependant que ni ce théorème ni la preuve que nous en ferons ne permettent d'exhiber en pratique un point de la sphère vérifiant la conclusion. Le degré topologique est un formidable outil pour prouver l'existence de solutions à des équations, mais c'est un outil en majeure partie non-constructif, et qui ne donne même aucun moyen vraiment utile pour approcher les objets dont il affirme l'existence (contrairement à ce que la section 2.4.4 pourra faire croire...).

1.2.7 Une sphère sur deux est mal peignée

(VOIR SECTION 4.2.2)

Considérons la sphère unité S^2 de $\mathbb{R}^3$; en chaque point x, on fixe un cheveu "vertical" (aligné avec x) de longueur éventuellement dépendant de x, mais non-nulle, et on essaie ensuite de peigner cette sphère chevelue, c'est à dire de pencher chaque cheveu pour qu'il se retrouve tangeant à la sphère en son point d'attache; il est en fait impossible de réaliser une telle coiffure de manière continue. En effet, la coiffure en question serait un champ de vecteurs continu $f : S^2 \to \mathbb{R}^3$ (chaque $f(x)$ représentant le cheveu attaché en x et peigné), tangeant en chaque point à la sphère et jamais nul (puisque chaque cheveu a été choisi de longueur non-nulle), ce que le résultat suivant interdit (pas uniquement pour la sphère de $\mathbb{R}^3$, mais pour toute sphère en dimension impaire).

Proposition 1.2.12 *Soit N un entier impair; on note S^{N-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^N$. Soit $f : S^{N-1} \to \mathbb{R}^N$ un champ continu de vecteurs tangeants à la sphère (i.e. $f(x) \cdot x = 0$ pour tout $x \in S^{N-1}$). Alors f a un zéro.*

En dimension paire, par contre, les sphères sont peignables; en effet, l'application $f : S^{2p-1} \to \mathbb{R}^{2p}$ définie par $f(x) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{2p}, -x_{2p-1})$ est continue, ne s'annule pas, et $f(x) \cdot x = 0$ pour tout $x \in S^{2p-1}$.

1.2.8 Les homéomorphismes lipschitziens ont une orientation

(VOIR SECTION 4.2.3)

Soit $\varphi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme entre ouverts connexes de $\mathbb{R}^N$; comme $\varphi'(x)$ est inversible pour tout $x \in U$, il est évident que $J\varphi$ ne change pas de signe sur le connexe U. On peut alors dire que φ a une orientation: uniformément sur U, sa matrice jacobienne conserve l'orientation canonique, ou la renverse (selon le signe de $J\varphi$).
Considérons maintenant le cas où φ n'est qu'un homéomorphisme lipschitzien. Le théorème de Rademacher (voir [8, 2]) permet de voir que φ est dérivable en presque tout point de U (au sens de la mesure de Lebesgue); cependant, cela ne fait de $J\varphi$ qu'une fonction définie presque partout et mesurable (et en fait bornée, par le caractère lipschitzien de φ) et il n'y a aucune raison qu'elle garde un signe constant, ou même qu'elle ne s'annule pas. Pour l'annulation, on ne peut pas faire grand chose comme le montre l'exemple $\varphi(x) = x^3$ sur $]-1, 1[$; cependant, c'est la pire situation qui puisse arriver: dans tous les cas, le déterminant jacobien d'un homéomorphisme lipschitzien sur un ouvert connexe ne peut pas changer de signe.

Proposition 1.2.13 *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^N$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^N$ une application lipschitzienne injective. Alors il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que, pour tout $x \in U$ point de dérivabilité de φ, on a $\varepsilon J\varphi(x) \geq 0$.*

Ce résultat est particulièrement crucial pour établir la formule de Stokes dans le cas où l'on considère des ouverts à bord peu régulier (mais adaptés aux espaces de Sobolev), voir [8]. Nous verrons qu'il peut aussi servir à définir et étudier les sous-variétés lipschitziennes de $\mathbb{R}^N$.

1.2.9 Existence de solutions d'EDO en dimension infinie

(VOIR SECTION 4.3.1)

La base de la théorie des équations différentielles est le théorème de Cauchy-Lipschitz, dont un énoncé simple dit que, si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est localement lipschitzienne et $a \in \mathbb{R}$, alors il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$, contenant 0 dans son intérieur, tel que le problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} x'(t) = f(t, x(t)) & t \in I\,, \\ x(0) = a \end{array} \right. \tag{1.2.2}$$

a une unique solution. Si l'on remplace l'hypothèse de lipschitziannité de f par de la simple continuité, alors l'existence d'une solution reste vérifiée, mais pas son unicité; c'est le théorème de Cauchy-Peano. Contrairement au théorème de Cauchy-Lipschitz, le théorème de Cauchy-Peano est faux si l'on remplace $\mathbb{R}^N$ par un espace de Banach E de dimension infinie. Il suffit de considérer $E = c_0(\mathbb{N})$, l'espace des suites tendant vers 0, et $f : \mathbb{R} \times E \to E$ autonome définie par $f(t, (x_0, x_1, \ldots)) = 2(\sqrt{|x_0|}, \sqrt{|x_1|}, \ldots)$; on vérifie alors que f est bien continue sur $\mathbb{R} \times E$ mais que (1.2.2) n'a de solution sur aucun intervalle ouvert I dès que $a = (n^{-2})_{n \geq 1}$ ([3]).

Cependant, en rajoutant un peu d'hypothèse de compacité sur la fonction, on peut énoncer un théorème de Cauchy-Peano en dimension infinie.

Théorème 1.2.14 *Soit E un espace de Banach et $f : \mathbb{R} \times E \to E$ continue. On suppose que l'image par f de tout ensemble borné de $\mathbb{R} \times E$ est un ensemble relativement compact dans E. Alors, pour tout $a \in E$, il existe un intervalle I contenant 0 dans son intérieur tel que (1.2.2) a au moins une solution sur I.*

Le lecteur familier avec la preuve classique du théorème de Cauchy-Peano en dimension finie (faisant intervenir un schéma numérique d'Euler) pourra, à titre d'exercice, l'adapter pour prouver le théorème 1.2.14. Pour notre part, nous donnerons une preuve totalement différente — et probablement plus rapide — qui fera apparaître le théorème usuel de Cauchy-Peano comme un cas particulier du théorème 1.2.14 (notez que, en dimension finie, toute fonction continue envoie les bornés sur des ensembles relativement compacts).

La preuve en question ne sera d'ailleurs pas basée sur le degré topologique, mais sur le théorème de point fixe de Schauder. Nous avons indiqué plus haut que beaucoup de conséquences du degré étaient souvent vues comme des applications des théorèmes de point fixe de Brouwer et Schauder, mais nous avons aussi signalé que l'emploi du degré topologique était souvent plus simple et permettait d'énoncer des résultats plus généraux. Nous illustrerons en particulier cela au travers des démonstrations du théorème 1.2.14 et du théorème suivant, qui donne directement une solution globale sur un intervalle de temps fixé a priori.

Théorème 1.2.15 *Soit E un espace de Banach, I un intervalle compact de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f : I \times E \to E$ continue. On suppose que l'image par f de tout ensemble borné de $I \times E$ est un ensemble relativement compact dans E. Soit $a \in E$. Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, toute solution potentielle de*

$$\left\{ \begin{array}{ll} x'(t) = \lambda f(t, x(t)) & t \in I\,, \\ x(0) = a \end{array} \right. \tag{1.2.3}$$

reste bornée par M. Alors (1.2.2) admet au moins une solution sur I.

[3] On peut résoudre $x'(t) = f(x(t))$ composante par composante; le candidat solution a alors pour n-ème coordonnée $x_n(t) = (t + n^{-1})^2$ pour $t \geq 0$, mais le $x(t)$ ainsi créé n'est plus dans $c_0(\mathbb{N})$ dès que $t \neq 0$.

1.2.10 Solutions périodiques d'EDO

(VOIR SECTION 4.3.2)

Il existe une solution 1-périodique à

$$x'(t) = \sin(2\pi t) - x(t)^3. \tag{1.2.4}$$

Même dit si abruptement, ceci ne semble pas trop choquant: le champ définissant cette équation différentielle étant 1-périodique en t, il parait raisonnable qu'il existe au moins une solution périodique. Cependant, si l'on considère maintenant

$$x'(t) = 1 + x(t)^2 ,$$

dont le champ est aussi 1-périodique en t (il est autonome!), on se rend compte que ce second problème n'admet aucune solution périodique (toutes les solutions sont strictement croissantes).

La recherche de solutions périodiques à des équations différentielles est quelque chose d'assez délicat en général. Même dans le cas linéaire les choses ne sont pas forcément simples, mais une théorie existe (voir [1] par exemple). Dans le cas non-linéaire, comme d'habitude, c'est plus compliqué... Il existe cependant des résultats généraux qui assurent l'existence de solutions périodiques. En voilà un, que nous prouverons à l'aide du degré.

Théorème 1.2.16 *Soit $f : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to f(t, x) \in \mathbb{R}$ une fonction continue 1-périodique par rapport à t et monotone par rapport à x (le sens de monotonie ne dépendant pas de t). Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution 1-périodique à $x'(t) = f(t, x(t))$ est qu'il existe $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(t, y(t))\, dt = 0$.*

L'existence d'une solution périodique à (1.2.4), et plus généralement à toute équation de la forme $x'(t) = g(t) + h(x(t))$ avec g 1-périodique et h monotone surjective sur $\mathbb{R}$, est une conséquence immédiate de ce théorème.

1.2.11 Equations aux dérivées partielles

(VOIR SECTION 4.3.3)

Le théorème de Riesz (associé à l'inégalité de Poincaré) permet de résoudre, en un sens faible, des équations aux dérivées partielles elliptiques linéaires du genre

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.2.5}$$

(Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et f étant une fonction donnée sur Ω). A partir de la résolution de ces équations linéaires, on parvient alors, à l'aide du degré, à résoudre toute une famille d'équations non-linéaires, comme par exemple

$$-\Delta u + \sin(u) = f \quad \text{dans } \Omega \tag{1.2.6}$$

ou

$$-\Delta u + u^3 = f \quad \text{dans } \Omega \tag{1.2.7}$$

(avec la même condition au bord $u = 0$ sur $\partial\Omega$). Ces deux équations ont une différence cruciale: dans la première, le terme non-linéaire est borné, alors que cela n'est pas le cas dans la seconde (il est même surlinéaire). Cette différence fondamentale nous demandera d'aborder chacune de ces équations avec un outil différent: (1.2.6) pourra être résolue à l'aide du théorème de point fixe de Schauder, tandis que nous aurons besoin du degré pour traiter (1.2.7). Comme pour les théorèmes de Cauchy-Peano plus haut, nous reviendrons à l'occasion de l'étude de (1.2.6) et (1.2.7) sur la différence fondamentale entre une preuve faite par théorème de point fixe et une preuve faite par degré topologique.

Un autre exemple d'utilisation du degré topologique, et de sa puissance par rapport à un simple théorème de point fixe, est rencontré dans la résolution d'équations linéaires de convection-diffusion, dites "non-coercitives", de la forme

$$\begin{cases} -\Delta u + \mathrm{div}(\mathbf{V}u) = f & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{1.2.8}$$

où $\mathbf{V} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ est un champ fixé.

Chapitre 2

Degré topologique de Brouwer: la dimension finie

2.1 Cas particulier: la dimension 1

En dimension $N = 1$, les choses sont toujours plus simples. Considérons la situation suivante: soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue qui ne s'annule ni en 0 ni en 1, et notons $d(f) = \frac{1}{2}(\mathrm{sgn}(f(1)) - \mathrm{sgn}(f(0)))$. Si $d(f) \neq 0$, alors $f(1)$ et $f(0)$ ont des signes différents donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [0,1]$ tel que

$$f(x) = 0. \tag{2.1.1}$$

L'entier $d(f)$ (en fait toujours égal à -1, 0 ou 1) permet donc de s'assurer que (2.1.1) a au moins une solution dans $[0,1]$ (il suffit qu'il soit non-nul); il est de plus très simple à calculer: il ne demande qu'a estimer le signe de f au bord du domaine de définition. Si l'on perturbe légèrement f, alors comme f est non-nulle en 0 et 1, son signe en ces deux points ne change pas, donc $d(f)$ reste constant; s'il était non-nul avant perturbation, il reste non-nul après perturbation et une solution à (2.1.1) continue donc à exister.
L'entier $d(f)$ répond donc au cahier des charges initial exposé en section 1.1: c'est une quantité facile à calculer, et qui par sa non-nullité indique que (2.1.1) a au moins une solution stable.

On peut voir que l'idée initiale que l'on a caressée un moment dans l'introduction, à savoir que le degré compte les solutions, ne tient pas ici: pour $\lambda > 4$, la fonction $f(x) = 1 - \lambda x(1-x)$ vérifie $d(f) = 0$ mais a pourtant deux zéros dans $[0,1]$. Cela est dû au fait que ces solutions ne sont pas stables: si λ se rapproche de 4, les deux zéros en question se rapprochent l'un de l'autre, puis disparaissent, "s'annulant mutuellement" lorsque λ passe en dessous de 4.
Etant donné que l'on cherche des solutions stables de (2.1.1), ce comportement de $d(f)$ n'est pas rédhibitoire et même plutôt bienvenu.

A noter que la stabilité des zéros détectés par le degré ci-dessus n'est pas seulement vérifiée pour de petites perturbations de f: on peut modifier f continuement autant que l'on veut sans changer $d(f)$, pourvu que les valeurs au bord de $[0,1]$ ne traversent jamais 0; en particulier, si $d(f)$ détectait un zéro de f avant modification, il continue à le détecter après modification.

Si l'on souhaite un degré adapté à (1.1.1) (i.e. avec un second membre pas forcément nul) et qui prenne en compte l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ sur lequel on cherche les solutions, alors en décomposant Ω en ses composantes connexes $\Omega = \cup_{i\in I}]a_i, b_i[$ on peut définir

$$d(f,\Omega,y) = \frac{1}{2}\sum_{i\in I}(\mathrm{sgn}(f(b_i)-y) - \mathrm{sgn}(f(a_i)-y)) \tag{2.1.2}$$

lorsque $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas sur $\partial\Omega$ (comme Ω est borné, cette non-annulation implique que $f - y$ ne peut changer de signe que sur un nombre fini de composantes connexes de Ω, et que la somme sur I est en fait finie).
La formule (2.1.2) correspond bien, en dimension $N = 1$, au degré que nous allons étudier ci-dessous. En dimension supérieure, il n'y a malheureusement ([1]) pas de formule aussi simple...

2.2 Le degré topologique de Brouwer

Nous donnons ici une formulation précise du degré topologique de Brouwer et de ses propriétés principales.

2.2.1 Définition

Le théorème suivant établit l'existence et l'unicité du degré topologique via ses propriétés clefs.

Théorème 2.2.1 *Soit $N \geq 1$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des triplets (f, Ω, y) où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$ et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ est continue et telle que $y \notin f(\partial\Omega)$. Il existe une et une seule application $d : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ qui vérifie les propriétés suivantes:*

- (normalisation) *si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $y \in \Omega$ alors $d(\mathrm{Id}, \Omega, y) = 1$.*
- (additivité) *si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ est continue et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints inclus dans Ω tels que $y \notin f(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2))$, alors $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$.*
- (invariance par homotopie) *si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ et $y : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ sont continues et, pour tout $t \in [0,1]$, $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$, alors $d(h(0,\cdot), \Omega, y(0)) = d(h(1,\cdot), \Omega, y(1))$.*

d est appelé le degré topologique de Brouwer.

Remarque 2.2.2 *On peut vérifier que, dans ces trois propriétés, on applique toujours le degré à des triplets de $\mathcal{A}$.*

La preuve de ce théorème occupera la majeure partie du reste de ce chapitre. Avant de nous y atteler, donnons quelques conséquences simples, mais cruciales, de la définition du degré topologique.

2.2.2 Quelques propriétés

Proposition 2.2.3 *Le degré topologique de Brouwer vérifie les propriétés suivantes.*

i) Si $d(f, \Omega, y) \neq 0$ alors il existe $x \in \Omega$ tel que $f(x) = y$.

ii) Pour tout $z \in \mathbb{R}^N$, $d(f, \Omega, y) = d(f - z, \Omega, y - z)$.

iii) Soit $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ et $r = \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)) > 0$. Si $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ continue et $z \in \mathbb{R}^N$ sont tels que $\sup_{\partial\Omega}(|g - f|) + |y - z| < r$, alors $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, z)$.

iv) $d(f, \Omega, \cdot)$ est constant sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$.

[1] Ou plutôt heureusement, car si le degré en dimension $N \geq 1$ était un outil aussi évident qu'en dimension $N = 1$, il ne serait probablement pas intéressant.

v) Pour tout $z \in \mathbb{R}^N$, $d(f, \Omega, y) = d(f(\cdot - z), z + \Omega, y)$.

Remarque 2.2.4 *En guise de cas particulier de iii), on voit que $d(f, \Omega, y)$ ne dépend que des valeurs de f sur $\partial\Omega$: si $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ est continue et $g = f$ sur $\partial\Omega$ alors $d(g, \Omega, y) = d(f, \Omega, y)$.*

Remarque 2.2.5 *Lorsque $d(f, \Omega, y) \neq 0$, alors non seulement (1.1.1) a au moins une solution dans Ω (point i) de la proposition ci-dessus), mais cette équation est encore soluble dans Ω pour tous les seconds membres dans un petit voisinage de y (points iii) et i) de la proposition), voire dans un voisinage pas si petit que cela (points iv) et i) de la proposition).*

Preuve de la proposition 2.2.3
Prouvons i) par l'absurde. Si un tel x n'existe pas, alors $y \notin f(\Omega)$ et comme on a déjà par hypothèse $y \notin f(\partial\Omega)$, cela signifie $y \notin f(\overline{\Omega})$. Considérons alors les ouverts $\Omega_1 = \Omega_2 = \emptyset$, disjoints et inclus dans Ω. On a $y \notin f(\overline{\Omega}) = f(\overline{\Omega} \backslash (\emptyset \cup \emptyset))$ donc, par la propriété d'additivité du degré topologique, $d(f, \Omega, y) = d(f, \emptyset, y) + d(f, \emptyset, y)$. Mais, comme on a clairement $y \notin f(\overline{\emptyset} \backslash (\emptyset \cup \emptyset))$, cette même propriété d'additivité donne aussi $d(f, \emptyset, y) = d(f, \emptyset, y) + d(f, \emptyset, y)$ et donc $d(f, \emptyset, y) = 0$; on en déduit alors que $d(f, \Omega, y) = 0$, ce qui conclut la preuve de i) par l'absurde.

Pour prouver ii), on considère l'homotopie naturelle entre (f, y) et $(f - z, y - z)$, c'est à dire $h(t, x) = (1-t)f(x) + t(f(x) - z) = f(x) - tz$ et $y(t) = (1-t)y + t(y - z) = y - tz$. L'invariance par homotopie du degré prouve alors ii) pourvu que, pour tout $t \in [0, 1]$, il n'existe pas $x \in \partial\Omega$ tel que $f(x) - tz = y - tz$, c'est à dire $f(x) = y$, ce qui est sous-entendu dans l'énoncé de ii) puisque, ayant parlé du degré de (f, Ω, y), on a supposé que ce triplet était dans $\mathcal{A}$.

La propriété iii) découle aussi de l'invariance par homotopie. Constatons d'abord que r est bien strictement positif car, Ω étant borné, $\partial\Omega$ est compact, de sorte que $f(\partial\Omega)$ est fermé (en fait compact); tout point qui n'appartient pas à $f(\partial\Omega)$ est donc à distance strictement positive de cet ensemble. Considérons $h(t, x) = tg(x) + (1-t)f(x)$ et $y(t) = tz + (1-t)y$. S'il existe $t \in [0, 1]$ et $x \in \partial\Omega$ tels que $tg(x) + (1-t)f(x) = tz + (1-t)y$, alors $|y - f(x)| \leq t|g(x) - f(x)| + t|y - z| < r$ (puisque $|g(x) - f(x)| + |y - z| < r$), ce qui contredit la définition de r. On peut donc affirmer, grâce à l'invariance du degré par homotopie, que $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, z)$.

L'application $y \to d(f, \Omega, y)$ est définie sur $\mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$ et, par le point iii), est localement constante; on en déduit qu'elle est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$, ce qui prouve iv).

La propriété v) sera évidente à partir de la construction que l'on va faire du degré topologique, mais ne découle pas très simplement des propriétés de base. Cependant, comme nous allons l'utiliser avant d'avoir construit le degré (pour simplifier certains arguments dans la preuve de l'unicité), nous en donnons une preuve à partir des seules propriétés que l'on a pour l'instant sur le degré topologique.
Soit $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ et notons $T_{f,\Omega,y}(z) = d(f(\cdot - z), z + \Omega, y)$. Comme $\partial(z + \Omega) = z + \partial\Omega$, il est clair que $y \notin f(\partial(z + \Omega) - z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}^N$ et que $T_{f,\Omega,y}$ est donc définie sur $\mathbb{R}^N$. Nous allons montrer que $T_{f,\Omega,y}$ est localement constante; comme $\mathbb{R}^N$ est connexe, cela impliquera que $T_{f,\Omega,y}$ est constante sur $\mathbb{R}^N$ et cela prouvera donc v). Comme $T_{f,\Omega,y}(z_0 + z) = T_{f(\cdot - z_0), z_0 + \Omega, y}(z)$, il suffit de montrer que $T_{f,\Omega,y}$ est constante au voisinage de 0 pour tout $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ pour en déduire qu'elle est constante au voisinage de tout point z_0 de $\mathbb{R}^N$ (en utilisant la constance au voisinage de 0 de $T_{f(\cdot - z_0), z_0 + \Omega, y}$).
Soit $\Omega_s = \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > s\}$, ouvert inclus dans Ω. Comme $y \notin f(\partial\Omega)$, il existe $s > 0$ tel que $y \notin f(\overline{\Omega} \backslash \Omega_{2s})$ (si ce n'était pas le cas, pour tout $s > 0$ il existerait $x_s \in \overline{\Omega} \backslash \Omega_{2s}$, vérifiant donc $\mathrm{dist}(x_s, \partial\Omega) \leq 2s$, tel que $f(x_s) = y$; à extraction près d'une sous-suite lorsque $s \to 0$, on aurait $x_s \to x \in \partial\Omega$ et $f(x) = y$, ce qui est exclus). Comme $\Omega_s \supset \Omega_{2s}$, on a aussi $y \notin f(\overline{\Omega} \backslash \Omega_s)$ et par additivité du degré avec les ouverts Ω_s et $\emptyset$ disjoints inclus dans Ω, et puisque $d(f, \emptyset, y) = 0$, on en déduit

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_s, y). \tag{2.2.1}$$

Par ailleurs, dès que $z \in B(0,s)$, on a $\Omega_s \subset z+\Omega$ et $y \notin f((\overline{z+\Omega}\backslash\Omega_s)-z)$ (car $(\overline{z+\Omega}\backslash\Omega_s)-z = \overline{\Omega}\backslash(\Omega_s - z) \subset \overline{\Omega}\backslash\Omega_{2s}$ et $y \notin f(\overline{\Omega}\backslash\Omega_{2s})$); l'additivité du degré donne donc aussi

$$d(f(\cdot - z), z+\Omega, y) = d(f(\cdot - z), \Omega_s, y) \quad \text{pour } |z| < s. \tag{2.2.2}$$

Fixons $z \in B(0,s)$ et considérons l'homotopie $h(t,x) = f(x-tz)$ sur $\overline{\Omega_s}$ entre f et $f(\cdot - z)$ (pour tout $t \in [0,1]$, on a $\overline{\Omega_s} - tz \subset \overline{\Omega}$ et h est donc bien définie). Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in \partial\Omega_s$, on a $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) = s$, ce qui assure que $\mathrm{dist}(x-tz,\partial\Omega) \leq \mathrm{dist}(x,\partial\Omega) + |tz| \leq 2s$; on en déduit que $x - tz \in \overline{\Omega}\backslash\Omega_{2s}$, et donc que $y \neq f(x-tz)$, c'est à dire $y \notin h(t,\partial\Omega_s)$ pour tout $t \in [0,1]$. L'invariance par homotopie donne donc $d(f,\Omega_s,y) = d(f(\cdot - z),\Omega_s,y)$, ceci pour tout $z \in B(0,s)$, ce qui permet de conclure grâce (2.2.1) et (2.2.2). ■

2.3 Unicité du degré de Brouwer

Cela peut paraître bizarre d'aborder la question de l'unicité avant celle de l'existence (quel intérêt de montrer qu'un objet est unique si l'on ne sait pas qu'il existe?). Cependant, la preuve qu'il existe au plus une application vérifiant les propriétés énoncées dans le théorème 2.2.1 va en fait nous demander de décortiquer cette application, de sorte qu'à la fin on aura compris comment la construire, et comment donc en prouver l'existence.
A noter que l'unicité du degré de Brouwer sera très importante quand on construira le degré de Leray-Schauder.

2.3.1 Réduction aux applications et valeurs régulières

Nous montrons ici que le degré, défini sur $\mathcal{A}$, est en fait entièrement déterminé par ses valeurs sur un sous-ensemble particulier de $\mathcal{A}$.

Fixons Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et notons $\mathcal{A}_\Omega = \{(f,y)\,,\ (f,\Omega,y) \in \mathcal{A}\} \subset C(\overline{\Omega})^N \times \mathbb{R}^N$. Il est clair que $\mathcal{A}_\Omega$ est un ouvert de $C(\overline{\Omega})^N \times \mathbb{R}^N$: en effet, si $(f,y) \in \mathcal{A}_\Omega$ alors $r = \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)) > 0$ donc, en prenant $(g,z) \in C(\overline{\Omega})^N \times \mathbb{R}^N$ tel que $\sup_{\overline{\Omega}} |g-f| < r/2$ et $z \in B(y,r/2)$ on a, pour tout $x \in \partial\Omega$, $|g(x)-z| \geq |f(x)-z| - |g(x)-f(x)| \geq |f(x)-y| - |y-z| - |g(x)-f(x)| > r - r/2 - r/2 > 0$ et donc $(g,z) \in \mathcal{A}_\Omega$.
En notant $C^\infty(\overline{\Omega})$ l'ensemble des restrictions à $\overline{\Omega}$ de fonctions dans $C^\infty(\mathbb{R}^N)$, la proposition 5.1.2 en annexes montre que $C^\infty(\overline{\Omega})^N$ est dense dans $C(\overline{\Omega})^N$. Comme A_Ω est un ouvert de $C(\overline{\Omega})^N \times \mathbb{R}^N$, on en déduit que $\mathcal{A}_\Omega^\infty = \{(f,y) \in \mathcal{A}_\Omega\,,\ f \in C^\infty(\overline{\Omega})^N\}$ est dense dans $\mathcal{A}_\Omega$.
Pour f régulière sur Ω, on note $C_f = \{x \in \Omega \mid Jf(x) = 0\}$ et $R_f = \mathbb{R}^N \backslash f(C_f)$ l'ensemble des valeurs régulières de f; ce sont les $y \in \mathbb{R}^N$ qui vérifient que, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $f(x) = y$, $f'(x)$ est inversible (notons qu'un y qui n'est pas dans l'image de f est en particulier une valeur régulière de f). Le théorème de Sard (voir théorème 5.2.1 en annexes) affirme que $|f(C_f)| = 0$, et donc en particulier que R_f est dense dans $\mathbb{R}^N$ (son complémentaire est d'intérieur vide, puisque de mesure de Lebesgue nulle). Ceci permet de voir que $\mathcal{A}_\Omega^{\infty,R} = \{(f,y) \in \mathcal{A}_\Omega^\infty \mid y \in R_f\}$ est dense dans $\mathcal{A}_\Omega^\infty$ pour la topologie de $C(\overline{\Omega})^N \times \mathbb{R}^N$, et donc aussi dans $\mathcal{A}_\Omega$ pour cette même topologie.
Mais le point iii) de la proposition 2.2.3 montre que $d(\cdot,\Omega,\cdot)$ est continu sur $\mathcal{A}_\Omega$ (et en fait localement constant sur cet ensemble, ce qui est normal puisqu'à valeurs dans $\mathbb{Z}$). L'application $d(\cdot,\Omega,\cdot)$ est donc entièrement déterminée sur $\mathcal{A}_\Omega$ par ses valeurs sur $\mathcal{A}_\Omega^{\infty,R}$ (ensemble dense dans $\mathcal{A}_\Omega$), et il suffit de connaître le degré sur $\mathcal{A}^{\infty,R} = \{(f,\Omega,y) \in \mathcal{A} \mid f \in C^\infty(\overline{\Omega})^N\,,\ y \in R_f\}$ pour le connaître sur $\mathcal{A}$.

2.3.2 Réduction au cas linéaire

Nous allons voir ici qu'il suffit en fait de déterminer le degré sur les applications linéaires et avec $y = 0$ pour le déterminer sur $\mathcal{A}^{\infty,R}$.

Soit $(f,\Omega,y)\in\mathcal{A}^{\infty,R}$. Comme y est une valeur régulière de f, si x est un antécédent de y par f alors x est forcément dans Ω (et non sur $\partial\Omega$) et $f'(x)$ est inversible; par le théorème d'inversion locale, f est donc un difféomorphisme local d'un voisinage de x sur un voisinage de y; cela montre en particulier que, au voisinage de x, il ne peut exister d'autre antécédent de y (f est injective au voisinage de x). Ces antécédents sont donc isolés et, comme Ω est borné, cela montre qu'ils sont en nombre fini (sinon, ils auraient un point d'accumulation qui serait lui-même un antécédent, mais non isolé).
Si δ est choisi assez petit de sorte que les boules centrées sur les antécédents de y et de rayon δ soient deux à deux disjointes, comme y n'a pas d'antécédent par f en dehors de ces boules, la propriété d'additivité du degré associée aux propriétés ii) et v) de la proposition 2.2.3 montre que

$$\begin{aligned} d(f,\Omega,y) &= \sum_{z\in f^{-1}(\{y\})} d(f,B(z,\delta),y) \\ &= \sum_{z\in f^{-1}(\{y\})} d(f-y,B(z,\delta),0) \\ &= \sum_{z\in f^{-1}(\{y\})} d(f(z+\cdot)-y,B(0,\delta),0) \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

(et ce pour tout δ assez petit).

Soit z un antécédent de y. Comme f' est uniformément continue sur Ω (car $f\in C^\infty(\overline{\Omega})^N$), le théorème des accroissements finis donne

$$|f(z+x)-y-f'(z)x| \leq \sup_{t\in[0,1]} ||f'(z+tx)-f'(z)||\,|x| \leq \omega(|x|)|x| \tag{2.3.2}$$

où $||\cdot||$ est la norme d'endomorphisme induite par $|\cdot|$ et $\omega(r)\to 0$ lorsque $r\to 0$ (module d'uniforme continuité de f'). Considérons l'homotopie $(t,x)\to t(f(z+x)-y)+(1-t)f'(z)x$ et prenons $\delta>0$; s'il existe $x\in\partial B(0,\delta)$ et $t\in[0,1]$ tel que $h(t,x)=0$, alors $t(f(z+x)-y-f'(z)x)=-f'(z)x$ et, par (2.3.2), $|f'(z)x|\leq\omega(\delta)\delta$. Mais, comme $f'(z)$ est inversible, on peut trouver $C_z>0$ indépendant de δ et x tel que $|f'(z)x|\geq C_z|x|=C_z\delta$ et on aboutirait donc à $C_z\leq\omega(\delta)$, ce qui n'est pas possible lorsque δ est assez petit. Dans cette situation, on peut alors appliquer l'invariance par homotopie du degré pour voir que

$$d(f(z+\cdot)-y,B(0,\delta),0)=d(f'(z),B(0,\delta),0).$$

En utilisant ceci avec un δ suffisamment petit qui convient à tous les antécédents de y (en nombre finis), (2.3.1) donne

$$d(f,\Omega,y)=\sum_{z\in f^{-1}(\{y\})} d(f'(z),B(0,\delta),0). \tag{2.3.3}$$

Pour chaque antécédent z, la seule solution de $f'(z)x=0$ est $x=0$ (car $f'(z)$ est inversible); l'additivité du degré topologique permet donc de voir que cette formule est en fait valable pour tout $\delta>0$.

Pour résumer, (2.3.3) montre que le degré est entièrement déterminé par les valeurs qu'il prend sur les applications linéaires inversibles.

2.3.3 Degré d'un isomorphisme de $\mathbb{R}^N$

Il reste donc à calculer $d(A,B(0,\delta),0)$ lorsque $\delta>0$ et A est un isomorphisme de $\mathbb{R}^N$. Nous avons besoin pour cela d'un peu d'algèbre linéaire.

La décomposition polaire de A nous assure qu'il existe un endomorphisme S symétrique défini positif et un endomorphisme O orthogonal tel que $A=SO$.
Toutes les valeurs propres de S sont strictement positives, et S est diagonalisable. En choisissant une base dans laquelle S est diagonal et en effectuant, dans cette base, des homotopies dans $\mathbb{R}^+_*$ entre chacune

de ses valeurs propres et 1, nous obtenons une homotopie d'endomorphismes $S(t)$ ayant tous des valeurs propres strictement positives (donc une homotopie d'isomorphismes) entre S et Id.
La décomposition en rotations 2×2 des endomorphismes orthogonaux permet, classiquement, de construire une homotopie d'endomorphismes orthorgonaux $O(t)$ entre O et

$$J_A = P \begin{pmatrix} \mathrm{sgn}(\det(A)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec P une matrice de passage (remarquons que $\det(O) = \mathrm{sgn}(\det(A))$ puisque S est symétrique définie positive).
L'application $t \to S(t)O(t)$ est donc une homotopie d'isomorphismes entre A et J_A. Comme chaque $S(t)O(t)$ est un isomorphisme, il est clair qu'il ne peut y avoir de solution de $S(t)O(t)x = 0$ sur $\partial B(0,\delta)$ et l'invariance par homotopie du degré donne donc $d(A, B(0,\delta), 0) = d(J_A, B(0,\delta), 0)$.
Si $\det(A) > 0$ alors on a fini: $J_A = \mathrm{Id}$ et la propriété de normalisation du degré donne $d(A, B(0,\delta), 0) = 1$.

Dans le cas où $\det(A) < 0$, les choses sont un peu plus compliquées.
Commençons par regarder le cas de la dimension $N = 1$ ([2]). On cherche donc à calculer le degré de l'application $J_A(x) = -x$ sur $]-\delta,\delta[$. Soit $g(x) = J_A(x) = -x$ sur $[-\delta,\delta]$ et $g(x) = x + 2\delta$ sur $[-3\delta,-\delta]$. La fonction g est continue sur $[-3\delta,\delta]$ et vaut $-\delta$ en $x = -3\delta$ et $x = \delta$; par la remarque 2.2.4, on voit donc que $d(g,]-3\delta,\delta[, 0) = d(w,]-3\delta,\delta[, 0)$ où w est la fonction constante égale à $-\delta$; comme $w(x) = 0$ n'a pas de solution, le i) de la proposition 2.2.3 donne $d(g,]-3\delta,\delta[, 0) = 0$. Par additivité du degré, on a aussi $d(g,]-3\delta,\delta[, 0) = d(g,]-3\delta,-\delta[, 0) + d(g,]-\delta,\delta[, 0)$, et donc $d(J_A,]-\delta,\delta[, 0) = d(g,]-\delta,\delta[, 0) = -d(g,]-3\delta,-\delta[, 0) = -d(\mathrm{Id} + 2\delta,]-3\delta,-\delta[, 0)$. Enfin, en utilisant v) de la proposition 2.2.3, on aboutit à $d(J_A,]-\delta,\delta[, 0) = -d(\mathrm{Id},]-\delta,\delta[, 0) = -1$.
Ce raisonnement peut être reproduit en dimension $N \geq 2$ pour calculer $d(J_A, B(0,\delta), 0)$. On commence par constater que, par additivité du degré et le fait qu'il n'y a pas de zéro de J_A en dehors de 0, on peut remplacer $B(0,\delta)$ par un cube $]-\delta,\delta[^N$ en coordonnées associées à P. En se plaçant dans ces coordonnées, on définit sur l'adhérence de $C_\delta =]-3\delta,\delta[\times]-\delta,\delta[^{N-1}$ la fonction $g(x) = (\mathbf{1}_{[-3\delta,-\delta[}(x_1)(x_1 + 2\delta) - \mathbf{1}_{[-\delta,\delta]}(x_1)x_1, x_2, \dots, x_N)$ égale à J_A sur $[-\delta,\delta]^N$. Pour calculer le degré de g, on réalise l'homotopie naturelle entre g et $w(x) = (-\delta, x_2, \dots, x_N)$ et, en traitant séparément les sous-ensembles $\{x_1 = -3\delta\} \cup \{x_1 = \delta\}$ et $\cup_{i=2,\dots,N}\{x_i = \pm\delta\}$ de ∂C_δ, on constate que cette homotopie naturelle n'a pas de zéro sur le bord de C_δ; on a donc $d(g, C_\delta, 0) = d(w, C_\delta, 0) = 0$ puisque w n'a pas de zéro dans C_δ, et on conclut comme précédemment, via l'additivité du degré, la propriété v) de la proposition 2.2.3 et la normalisation du degré, que $d(J_A, B(0,\delta), 0) = -1$.

On déduit finalement de tout ceci que, lorsque A est un isomorphisme, $d(A, B(0,\delta), 0) = \mathrm{sgn}(\det(A))$, ce qui conclut la preuve de l'unicité du degré puisque l'on a vu que celui-ci est entièrement déterminé par ses valeurs sur les isomorphismes, et que ladite valeur est simplement le signe du déterminant de l'isomorphisme considéré.

2.4 Construction du degré de Brouwer

Nous allons maintenant prouver qu'il existe une application vérifiant les propriétés du théorème 2.2.1. La preuve en question consiste à construire cette application; il est en fait tout aussi important de retenir les propriétés du degré que sa construction, qui permet de mieux le comprendre et souvent de le calculer dans des cas particuliers.

[2] Notons que tout le raisonnement qui a été fait en section 2.1 ne peut pas aider ici car on ne sait pas encore que le degré a, en dimension $N = 1$, l'expression qu'on lui a donné en 2.1.

Le principe de construction consiste à parcourir en sens inverse le raisonnement que l'on a suivi pour prouver l'unicité du degré. Nous allons d'abord construire un degré pour les fonctions et valeurs régulières, puis utiliser celui-ci pour construire un degré sur les fonctions régulières (et n'importe quel type de valeur), et enfin en déduire un degré pour les fonctions continues.

2.4.1 Degré pour les fonctions et valeurs régulières

Rappelons que $\mathcal{A}^{\infty,R}$ désigne l'ensemble des $(f,\Omega,y) \in \mathcal{A}$ tels que $f \in C^\infty(\overline{\Omega})^N$ et y est une valeur régulière de f (ce qui signifie que tout antécédent $x \in \Omega$ de y par f, s'il en existe, est tel que $f'(x)$ est inversible). Nous avons vu que, puisque Ω est borné, une valeur régulière ne peut avoir qu'un nombre fini d'antécédents, et le raisonnement effectué en section 2.3 suggère de définir le degré sur $\mathcal{A}^{\infty,R}$ de la manière suivante:

$$d^{\infty,R}(f,\Omega,y) = \sum_{x\in f^{-1}(\{y\})} \mathrm{sgn}(Jf(x)) \tag{2.4.1}$$

(une somme sur une famille vide est posée égale à 0).
Il est assez clair que $d^{\infty,R}$ vérifie les propriétés de normalisation et d'additivité (pourvu que l'on considère uniquement des fonctions et valeurs régulières). Nous pourrions prouver que ce degré vérifie aussi l'invariance par homotopie (du moment que l'homotopie en question reste dans la classe des fonctions et valeurs régulières), mais cette propriété ne sera pas utile dans la suite (précisément parce qu'il faudrait trouver des homotopies qui respectent les valeurs régulières, ce qui n'est pas évident du tout). Cependant, pour continuer la construction du degré topologique il sera crucial de savoir que $d^{\infty,R}$ est localement constant en y, ce que nous allons nous attacher à prouver maintenant.

La définition (2.4.1) n'est pas évidente à manipuler sur les grosses perturbations de y... nous allons donc commencer par établir une autre expression de $d^{\infty,R}$.

Lemme 2.4.1 *Soit* $(f,\Omega,y) \in \mathcal{A}^{\infty,R}$ *et* $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *une approximation de l'unité vérifiant* $\mathrm{supp}(\rho_\varepsilon) \subset B(0,\varepsilon)$. *Il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que, pour tout* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$,

$$d^{\infty,R}(f,\Omega,y) = \int_\Omega \rho_\varepsilon(f(x)-y)Jf(x)\,dx.$$

Preuve du lemme 2.4.1
Si y n'a pas d'antécédent, alors $\varepsilon_0 = \mathrm{dist}(y, f(\overline{\Omega})) > 0$ convient car, dans ce cas, $\rho_\varepsilon(f(x)-y) = 0$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$.

Dans le cas contraire, notons $x_1,\dots,x_n$ les antécédents de y par f. Pour tout $i = 1,\dots,n$, $f'(x_i)$ est inversible donc par le théorème d'inversion locale f est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert U_i de x_i sur une boule ouverte $B(y,r_i)$ centrée en y (on peut supposer les U_i deux à deux disjoints). Sur U_i, Jf ne change pas de signe et on a donc, grâce au théorème de changement de variable,

$$\begin{aligned}
\int_{U_i} \rho_\varepsilon(f(x)-y)Jf(x)\,dx &= \mathrm{sgn}(Jf(x_i)) \int_{U_i} \rho_\varepsilon(f(x)-y)|Jf(x)|\,dx \\
&= \mathrm{sgn}(Jf(x_i)) \int_{B(y,r_i)} \rho_\varepsilon(z-y)\,dz \\
&= \mathrm{sgn}(Jf(x_i)) \int_{B(0,r_i)} \rho_\varepsilon(u)\,du \\
&= \mathrm{sgn}(Jf(x_i))
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

dès que $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1 = \inf(r_1,\dots,r_n)$ (car alors $\mathrm{supp}(\rho_\varepsilon) \subset B(0,r_i)$ pour tout $i = 1,\dots,r_n$).

Par définition, $y \notin f(\overline{\Omega}\backslash(\cup_{i=1}^n U_i))$ (les seuls antécédents de y sont $x_1, \ldots, x_n$) et, comme $\overline{\Omega}\backslash(\cup_{i=1}^n U_i)$ est un compact, on en déduit que $\varepsilon_2 = \mathrm{dist}(y, f(\overline{\Omega}\backslash(\cup_{i=1}^n U_i))) > 0$. Si l'on prend $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$, on a alors $|f(x) - y| \geq \varepsilon$ dès que $x \in \overline{\Omega}\backslash(\cup_{i=1}^n U_i)$ et donc, dans cette situation, $\rho_\varepsilon(f(x) - y) = 0$. On en déduit que, pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$, puisque les U_i ont été pris deux à deux disjoints,

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon(f(x) - y)Jf(x)\,dx = \int_{\cup_{i=1}^n U_i} \rho_\varepsilon(f(x) - y)Jf(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{U_i} \rho_\varepsilon(f(x) - y)Jf(x)\,dx.$$

Cette relation et (2.4.2) concluent la preuve en montrant que $\varepsilon_0 = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ convient. ■

Nous pouvons maintenant prouver que $d^{\infty,R}$ est localement constant en y (et même pas si localement que ça).

Proposition 2.4.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})^N$ et B une boule ouverte incluse dans $\mathbb{R}^N\backslash f(\partial\Omega)$. Si $(y^1, y^2) \in B$ sont des valeurs régulières de f alors $d^{\infty,R}(f, \Omega, y^1) = d^{\infty,R}(f, \Omega, y^2)$.*

Preuve de la proposition 2.4.2
Par le lemme 2.4.1, pour ε assez petit on a

$$d^{\infty,R}(f, \Omega, y^1) - d^{\infty,R}(f, \Omega, y^2) = \int_\Omega \left(\rho_\varepsilon(f(x) - y^1) - \rho_\varepsilon(f(x) - y^2)\right) Jf(x)\,dx. \tag{2.4.3}$$

On constate que

$$\begin{aligned}
\rho_\varepsilon(z - y^1) - \rho_\varepsilon(z - y^2) &= \int_0^1 \nabla\rho_\varepsilon(z - y^1 + t(y^1 - y^2)) \cdot (y^1 - y^2)\,dt \\
&= \sum_{i=1}^N (y_i^1 - y_i^2) \int_0^1 \partial_i\rho_\varepsilon(z - y^1 + t(y^1 - y^2))\,dt \\
&= \mathrm{div}(w^\varepsilon)(z) \qquad (2.4.4)
\end{aligned}$$

où $w^\varepsilon(z) = (y^1 - y^2)\int_0^1 \rho_\varepsilon(z - y^1 + t(y^1 - y^2))\,dt$ (on a noté $y^1 = (y_1^1, \ldots, y_N^1)$ et $y^2 = (y_1^2, \ldots, y_N^2)$). Remarquons que $w^\varepsilon(z) = 0$ dès que z est à une distance supérieure à ε du segment $[y^1, y^2]$.

Soit $\Delta_{i,j}(x)$ le cofacteur (i, j) de $f'(x)$ (c'est à dire $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant de la matrice $(N - 1) \times (N - 1)$ obtenue en enlevant la ligne i et la colonne j à la matrice de $f'(x)$) et notons

$$v_j^\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^N w_i^\varepsilon(f(x))\Delta_{i,j}(x).$$

La fonction $v^\varepsilon = (v_1^\varepsilon, \ldots, v_N^\varepsilon)$ ainsi définie est dans $C^\infty(\overline{\Omega})^N$. On constate que, pour ε assez petit, $v^\varepsilon = 0$ au voisinage de $\partial\Omega$: en effet, le compact $[y^1, y^2]$ est inclus dans B et ne rencontre donc pas le compact $f(\partial\Omega)$, de sorte qu'il existe $\delta > 0$ tel que deux points quelconques de chacun de ces deux compacts sont à distance au moins δ l'un de l'autre; par ailleurs, par uniforme continuité de f, il existe un voisinage U de $\partial\Omega$ dans $\overline{\Omega}$ tel que tout point de $f(U)$ est à distance au plus $\delta/2$ de $f(\partial\Omega)$, et donc à distance au moins $\delta/2$ de $[y^1, y^2]$; comme $w^\varepsilon = 0$ hors de $[y^1, y^2] + B(0, \varepsilon)$, si on prend $0 < \varepsilon \leq \delta/2$ on a $w^\varepsilon(f) = 0$ sur U. Ceci permet donc de prolonger v^ε à $\mathbb{R}^N$ par 0 en dehors de $\overline{\Omega}$, en conservant sa régularité.
On a, grâce au lemme 5.3.1 en annexes et à (2.4.4),

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(v^\varepsilon)(x) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \partial_j(w_i^\varepsilon(f(x)))\Delta_{i,j}(x) + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N w_i^\varepsilon(f(x))\partial_j\Delta_{i,j}(x) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^N \partial_k w_i^\varepsilon(f(x))\partial_j f_k(x)\Delta_{i,j}(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{N} \partial_i w_i^\varepsilon(f(x)) Jf(x) \\
&= \operatorname{div}(w^\varepsilon)(f(x)) Jf(x) \\
&= \left(\rho_\varepsilon(f(x)-y^1) - \rho_\varepsilon(f(x)-y^2)\right) Jf(x).
\end{aligned}
\tag{2.4.5}
$$

En prenant ε assez petit, puisque v^ε est régulière à support compact dans Ω, (2.4.3) et (2.4.5) donnent, à l'aide d'intégrations par parties,

$$
d^{\infty,R}(f,\Omega,y^1) - d^{\infty,R}(f,\Omega,y^2) = \int_\Omega \operatorname{div}(v^\varepsilon)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(v^\varepsilon)(x)\,dx = 0\,,
$$

ce qui conclut la preuve. ■

2.4.2 Degré pour les fonctions régulières et tout type de valeur

Nous souhaitons maintenant définir le degré sur $\mathcal{A}^\infty = \{(f,\Omega,y)\in\mathcal{A} \mid f\in C^\infty(\overline{\Omega})^N\}$. Soit $(f,\Omega,y)\in\mathcal{A}^\infty$; y n'est pas forcément une valeur régulière de f mais le théorème de Sard (théorème 5.2.1) nous permet de voir que les valeurs régulières de f sont denses dans $\mathbb{R}^N$ de sorte que, en notant $r=\operatorname{dist}(y,f(\partial\Omega))>0$, on sait qu'il existe au moins une valeur régulière y^1 de f dans $B(y,r)$. Comme cette boule est incluse dans $\mathbb{R}^N\backslash f(\partial\Omega)$, la proposition 2.4.2 montre que $d^{\infty,R}(f,\Omega,y^1)$ ne dépend pas de la valeur régulière y^1 choisie dans $B(y,r)$.
Ces considérations nous permettent donc de définir un degré d^∞ sur $\mathcal{A}^\infty$ de la manière suivante:

$$
\begin{array}{c}
d^\infty(f,\Omega,y) = d^{\infty,R}(f,\Omega,y^1)\,,\ \text{où } y^1 \text{ est n'importe quelle valeur régulière}\\
\text{de } f \text{ dans } B(y,r) \text{ avec } r=\operatorname{dist}(y,f(\partial\Omega)).
\end{array}
$$

Il est clair que d^∞ vérifie encore la propriété de normalisation (puisque toute valeur est régulière pour Id). La propriété d'additivité n'est pas beaucoup plus dure à voir: si $y\notin f(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2))$ alors en prenant une valeur régulière à distance de y plus petite que $\operatorname{dist}(y,f(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2))$, on a $|y-y_1| < \inf(\operatorname{dist}(y,f(\partial\Omega)),\operatorname{dist}(y,f(\partial\Omega_1)),\operatorname{dist}(y,f(\partial\Omega_2)))$ et donc $d^\infty(f,\Omega,y)=d^{\infty,R}(f,\Omega,y^1)$, $d^\infty(f,\Omega_1,y) = d^{\infty,R}(f,\Omega_1,y^1)$ et $d^\infty(f,\Omega_2,y)=d^{\infty,R}(f,\Omega_2,y^1)$, avec $y^1\notin f(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2))$. L'additivité de $d^{\infty,R}$ donne alors l'additivité de d^∞. Nous allons maintenant montrer que d^∞ est invariant par homotopie.

Proposition 2.4.3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $h\in C^\infty([0,1]\times\overline{\Omega})^N$ et $y\in C^\infty([0,1])$ tels que, pour tout $t\in[0,1]$, $y(t)\notin h(t,\partial\Omega)$. Alors $d^\infty(h(t,\cdot),\Omega,y(t))$ est indépendant de t.*

Preuve de la proposition 2.4.3
Nous allons montrer que la fonction $t\to d(h(t,\cdot),\Omega,y(t))$ est localement constante (comme $[0,1]$ est connexe, cela montrera qu'elle est constante sur $[0,1]$). On notera au besoin $h_t=h(t,\cdot)$.
Soit $T\in[0,1]$ et $r=\operatorname{dist}(y(T),h(T,\partial\Omega))$. Prenons y^1 une valeur régulière de $h(T,\cdot)$ dans $B(y(T),r)$; par définition,

$$
d^\infty(h(T,\cdot),\Omega,y(T)) = d^{\infty,R}(h(T,\cdot),\Omega,y^1) = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{sgn}(Jh_T(x_i))
\tag{2.4.6}
$$

où $x_1,\ldots,x_n$ sont les antécédents de y^1 par $h(T,\cdot)$.
Pour tout $i=1,\ldots,n$, l'endomorphisme $\partial_x h(T,x_i)$ est donc inversible et le théorème des fonctions implicites nous montre qu'il existe un voisinage ouvert V_i de x_i dans Ω, un voisinage U_i de T dans $[0,1]$ et une application $X_i: U_i\to\mathbb{R}^N$ tels que $X_i(T)=x_i$ et, pour tout $t\in U_i$, $X_i(t)$ est l'unique $x\in V_i$ vérifiant $h(t,x)=y^1$. Quitte à réduire les U_i, on peut supposer qu'ils sont tous égaux à un intervalle U contenant T et ouvert dans $[0,1]$.
Comme $\partial_x h(t,X_i(t))$ est continu en t et inversible en $t=T$, quitte à réduire U on peut aussi supposer que $\partial_x h(t,X_i(t))$ est inversible pour tout $t\in U$. Par ailleurs, comme $\operatorname{dist}(y^1,h(T,\overline{\Omega}\backslash(\cup_{i=1}^n V_i)))>0$ (les seuls antécédents de y^1 par h_T sont $x_1,\ldots,x_n$) et $\overline{\Omega}\backslash(\cup_{i=1}^n V_i)$ est compact, il est aisé de voir

$\mathrm{dist}(y^1, h(t, \overline{\Omega}\backslash(\cup_{i=1}^n V_i))) > 0$ pour tout t dans un voisinage de T ([3]). Quitte à réduire encore U, on est donc sûr que les seuls antécédents possibles de y^1 par h_t lorsque $t \in U$ sont dans $\cup_{i=1}^n V_i$, et sont donc les $X_i(t)$ précédemment trouvés.
Cela montre que y^1 reste une valeur régulière de h_t lorsque $t \in U$ (tous les $h'_t(X_i(t)) = \partial_x h(t, X_i(t))$ sont inversibles) et donc que, pour de tels t,

$$d^{\infty,R}(h(t,\cdot),\Omega,y^1) = \sum_{i=1}^n \mathrm{sgn}(Jh_t(X_i(t))).$$

Par ailleurs, on a choisi l'intervalle U de telle sorte que $\partial_x h(t, X_i(t))$ reste inversible pour tout $t \in U$ et tout $i = 1, \ldots, n$, de sorte que le signe du déterminant de cette application ne peut pas changer lorsque t bouge dans U; on a donc, par (2.4.6) et pour tout $t \in U$,

$$d^{\infty,R}(h(t,\cdot),\Omega,y^1) = \sum_{i=1}^n \mathrm{sgn}(Jh_T(X_i(T))) = d^\infty(h(T,\cdot),\Omega,y(T)). \tag{2.4.7}$$

Comme $|y^1 - y(T)| < \mathrm{dist}(y(T), h(T,\partial\Omega))$ et $\partial\Omega$ est compact, pour tout t dans un voisinage de T on a $|y^1 - y(t)| < \mathrm{dist}(y(t), h(t,\partial\Omega))$ (raisonner par l'absurde comme dans la note 3 en bas de page 21). Quitte à réduire encore U, par définition de d^∞ et puisque y^1 est une valeur régulière de h_t pour tous les $t \in U$, on a, pour ces t,

$$d^\infty(h(t,\cdot),\Omega,y(t)) = d^{\infty,R}(h(t,\cdot),\Omega,y^1).$$

Grâce à (2.4.7), cela conclut la preuve du fait que $t \to d^\infty(h(t,\cdot),\Omega,y(t))$ est constant au voisinage de T, et donc que d^∞ est invariant par homotopie. ■

2.4.3 Degré pour les fonctions continues

Il nous reste à conclure en construisant finalement d sur $\mathcal{A}$. Soit $(f,\Omega,y) \in \mathcal{A}$ et $r = \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)) > 0$. Par la proposition 5.1.2 en annexes, on sait qu'il existe $g \in C^\infty(\overline{\Omega})^N$ telle que $\sup_{\overline{\Omega}} |g - f| < r$; il est alors clair que $y \notin g(\partial\Omega)$ de sorte que l'on peut parler de $d^\infty(g,\Omega,y)$. Grâce à la proposition 2.4.3, il n'est pas dur de voir que cette quantité ne dépend pas de la fonction g ainsi choisie; si $\widetilde{g}$ est une autre fonction régulière telle que $\sup_{\overline{\Omega}} |g - f| < r$ alors l'homotopie régulière $h(t,x) = tg(x) + (1-t)\widetilde{g}(x)$ vérifie aussi, pour tout $t \in [0,1]$, $\sup_{\overline{\Omega}} |h(t,\cdot) - f| < r$, de sorte que $y \notin h(t,\partial\Omega)$ et la proposition 2.4.3 donne donc $d^\infty(\widetilde{g},\Omega,y) = d^\infty(h(0,\cdot),\Omega,y) = d^\infty(h(1,\cdot),\Omega,y) = d^\infty(g,\Omega,y)$.
On peut donc bien définir le degré sur $\mathcal{A}$ par:

$$d(f,\Omega,y) = d^\infty(g,\Omega,y)\,,\ \text{où } g \text{ est n'importe quelle fonction régulière telle que } \sup_{\overline{\Omega}} |g-f| < r \text{ avec } r = \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)).$$

Encore une fois, la propriété de normalisation de d est évidente (puisque $d = d^\infty$ sur les fonctions régulières). L'additivité de d est elle aussi simple à voir: en prenant une fonction régulière g qui vérifie $\sup_{\overline{\Omega}} |g - f| < \mathrm{dist}(y, f(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2)))$, on a $\sup_{\overline{\omega}} |g - f| < \mathrm{dist}(y, f(\partial\omega))$ pour $\omega = \Omega$, Ω_1 et Ω_2, de sorte que $d(f,\omega,y) = d^\infty(g,\omega,y)$ pour tous ces ω et l'additivité de d^∞ donne alors celle de d.

Pour conclure la construction du degré, il nous reste à voir que d est invariant par homotopie. On commence par constater que, puisque d^∞ est invariant par homotopie de fonctions régulières, il vérifie la propriété ii) de la proposition 2.2.3; en particulier, $d^\infty(g,\Omega,y) = d^\infty(g-y,\Omega,0)$. Vu sa définition, d vérifie donc aussi cette égalité et il suffit de montrer l'invariance par homotopie lorsque $y = 0$ pour avoir l'invariance par homotopie dans le cas général.

[3] Si cela n'était pas vrai, on pourrait trouver une suite $t_m \to T$ et $z_m \in \overline{\Omega}\backslash(\cup_{i=1}^n V_i)$, donc convergeant à une sous-suite près vers un $z \in \overline{\Omega}\backslash(\cup_{i=1}^n V_i)$, tels que $\mathrm{dist}(h(t_m, z_m), y^1) \to 0$, ce qui donnerait en passant à la limite $h(T,z) = y^1$, chose exclue.

Soit $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ tel que $0 \notin h([0,1] \times \partial\Omega)$; comme cet ensemble est compact, $r = \mathrm{dist}(0, h([0,1] \times \partial\Omega)$ est strictement positif. Par la proposition 5.1.2 en annexes, il existe $\widetilde{h} \in C^\infty([0,1] \times \overline{\Omega})^N$ telle que $\sup_{[0,1]\times\overline{\Omega}} |\widetilde{h} - h| < r$. En particulier, pour tout $t \in [0,1]$, $\sup_{\overline{\Omega}} |\widetilde{h}(t,\cdot) - h(t,\cdot)| < \mathrm{dist}(0, h(t, \partial\Omega))$ et on a donc par définition $d(h(t,\cdot), \Omega, 0) = d^\infty(\widetilde{h}(t,\cdot), \Omega, 0)$. L'invariance par homotopie de d^∞ conclut la preuve.

2.4.4 A propos des solutions de (1.1.1) obtenues via le degré topologique

Comme l'indique le point i) de la proposition 2.2.3, la non-nullité du degré permet de s'assurer que (1.1.1) a au moins une solution dans Ω. Le degré topologique de Brouwer répond donc bien à notre volonté initiale telle que formulée dans la section 1.1. Mais nous avons construit un degré qui ne vaut pas uniquement 0 ou 1; peut-on alors obtenir des renseignements supplémentaires sur les solutions de (1.1.1) en fonction de la valeur exacte du degré?

Rappelons tout d'abord que, comme on l'a vu dans le cas de la dimension $N = 1$ (cf section 2.1), le degré n'attrape pas tout type de solution de (1.1.1): cette équation peut avoir des solutions alors que le degré de f en y est nul.

Pour rester dans le cas particulier de la dimension $N = 1$, on constate cependant qu'on a toujours la chose suivante: il y a au moins autant de solutions dans Ω à (1.1.1) que $|d(f, \Omega, y)|$ (voir (2.1.2): au moins $|d(f, \Omega, y)|$ termes de la somme dans le membre de droite de cette expression doivent être non-nuls, ce qui donne $|d(f, \Omega, y)|$ composantes connexes de Ω dans lesquelles on trouve au moins une solution à (1.1.1)).

Cette propriété n'est pas généralisable à la dimension supérieure. Considérons $f : \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ définie par $f(z) = z^n$. Tout complexe $y \neq 0$ a n antécédents distincts par f qui sont tous non-nuls (si $y = \rho e^{i\theta}$ en coordonnées polaires, ces antécédents sont $\rho^{1/n} e^{i(\theta + 2k\pi)/n}$ pour $k = 0, \ldots, n-1$), et est donc une valeur régulière de f (puisque $f'(z) = nz^{n-1} \neq 0$ si $z \neq 0$); comme f est holomorphe, la différentielle de f a en tout point un déterminant positif (c'est une similitude qui conserve l'orientation du plan); on en déduit que $d^{\infty,R}(f, B(0,1), y) = n$ dès que y est non-nul et proche de 0, et donc que $d(f, B(0,1), 0) = n$. Cependant, l'équation $f(z) = 0$ n'a qu'une seule racine.
Ainsi, non seulement le degré ne “compte” pas les solutions de (1.1.1) parce qu'il peut en rater (être inférieur en valeur absolue au nombre réel de solutions), mais aussi parce qu'il peut sembler en indiquer plus qu'il n'y en a.

Le fait que le degré puisse rater des solutions n'est pas si étonnant puisque l'on s'est fixé comme objectif de ne repérer que les solutions “stables”, et le point iii) de la proposition 2.2.3 indique bien que les solutions repérées par le degré sont stables: si $d(f, \Omega, y)$ est non-nul, de sorte que (1.1.1) a au moins une solution dans Ω, alors il reste non-nul quand on perturbe f et y, et l'équation correspondante à ces perturbations est encore soluble dans Ω.

Quand au fait que le degré semble parfois “trop optimiste” et indique plus de solutions qu'il n'y en a vraiment (comme dans le cas $z^n = 0$), cela n'est pas si vrai que ça. Prenons $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ tel que $d(f, \Omega, y) = n$ et $\varepsilon > 0$ assez petit; en perturbant f en une fonction régulière f_ε et y en une valeur régulière y_ε de f_ε (les deux perturbations en question restant à distance $\leq \varepsilon/2$ de f et y respectivement), on a $d(f_\varepsilon, \Omega, y_\varepsilon) = d(f, \Omega, y) = n$ (par construction du degré) et, par la définition (2.4.1) du degré sur les applications et valeurs régulières, on voit que cela implique l'existence d'au moins $|n|$ solutions distinctes $(x_\varepsilon^1, \ldots, x_\varepsilon^n)$ dans Ω de $f_\varepsilon(x) = y_\varepsilon$ (et on a alors $|f(x_\varepsilon^i) - y| < \varepsilon$ pour tout $i = 1, \ldots, n$). Ainsi, même si $d(f, \Omega, y) = n$ n'implique pas forcément l'existence de $|n|$ solutions à (1.1.1), cela implique quand même l'existence d'au moins $|n|$ solutions distinctes à une équation approchée. De plus, en faisant $\varepsilon \to 0$ et en utilisant la compacité de $\overline{\Omega}$, on constate que ces solutions approchées convergent à une sous-suite près vers des solutions de (1.1.1) (éventuellement en se rassemblant, comme l'exemple $f(z) = z^n$ le montre).

On constate donc qu'il n'y a pas forcément $|d(f, \Omega, y)|$ solutions dans Ω à (1.1.1), mais que les solutions que le degré repère ont une "somme de multiplicités" égale à $|d(f, \Omega, y)|$ (voir aussi le lemme 4.1.8).

Chapitre 3

Degré topologique de Leray-Schauder: la dimension infinie

3.1 Une obstruction en dimension infinie

Nous souhaitons maintenant construire un degré ayant la même finalité que le degré de Brouwer, mais en dimension infinie, c'est à dire un outil qui permette d'assurer qu'une équation de la forme $f(x) = y$, où f est continue d'un Banach E dans lui-même, a au moins une solution x.

On se rend cependant vite compte, sur un exemple, qu'il n'y a aucun espoir en dimension infinie de construire un degré topologique pour toute application continue (et même pas toute application linéaire!). Considérons $E = l^\infty$, l'espace des suites $x = (x_n)_{n\geq 1}$ bornées, et $S : E \to E$ le shift à droite, c'est à dire $S(x) = (0, x_1, x_2, \ldots\ldots)$. Soit $h(t, x) = tx + (1 - t)S(x) = (tx_1, tx_2 + (1 - t)x_1, tx_3 + (1 - t)x_2, \ldots)$ l'homotopie naturelle entre Id et S. On constate que, pour tout $t \in [0, 1]$, la seule solution de $h(t, x) = 0$ est la suite nulle. Si un degré (normalisé, additif et invariant par homotopie) existait pour toutes les applications continues sur E, on aurait donc $1 = d(\mathrm{Id}, B(0, 1), 0) = d(S, B(0, 1), 0)$. Toujours en utilisant l'invariance par homotopie et puisque $\mathrm{dist}(0, S(\partial B(0, 1))) = 1 > 0$, on aurait encore $d(S, B(0, 1), z) = 1$ pour tout $z \in E$ proche de 0; en particulier, tout z proche de 0 aurait un antécédent par S, ce qui est clairement faux: $z = (\varepsilon, 0, 0, \ldots)$ n'a pas d'antécédent par S dès que $\varepsilon \neq 0$.

3.2 Le degré topologique de Leray-Schauder

3.2.1 Définition

Le degré topologique en dimension infinie ne pourra donc pas être défini pour toutes les applications continues d'un Banach E dans lui-même: il faut restreindre les fonctions que l'on considère. Il existe plusieurs degrés en dimension infinie, qui ont justement pour principale différence la classe de fonctions à laquelle chacun s'applique; le degré que nous allons étudier ici, appelé degré de Leray-Schauder, est construit sur les applications qui diffèrent de l'identité par une application compacte (cf. définition suivante).

Définition 3.2.1 *Soit $\mathcal{E}$ et E des Banach et A un fermé de $\mathcal{E}$. Une application $f : A \to E$ est dite compacte si elle est continue et si, pour tout $R > 0$, $f(A \cap \overline{B}(0, R))$ est relativement compact dans E. Il est équivalent de dire que, pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ bornée dans A, on peut extraire de $(f(x_n))_{n\geq 1}$ une suite qui converge dans E.*

Voici le résultat principal de ce chapitre, qui énonce l'existence du degré de Leray-Schauder en même temps que ses propriétés principales, tout à fait similaires à celles du degré de Brouwer.

Théorème 3.2.2 *Soit E un Banach et $\mathcal{A}_c$ l'ensemble des triplets $(\mathrm{Id}-f,\Omega,y)$ où Ω est un ouvert borné de E, $y\in E$ et $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^N$ est compacte et telle que $y\notin(\mathrm{Id}-f)(\partial\Omega)$. Il existe une application $d:\mathcal{A}_c\to\mathbb{Z}$ telle que*

- (normalisation) *si Ω est un ouvert borné de E et $y\in\Omega$ alors $d(\mathrm{Id},\Omega,y)=1$.*
- (additivité) *si Ω est un ouvert borné de E, $y\in E$, $f:\overline{\Omega}\to E$ est compacte et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints inclus dans Ω tels que $y\notin(\mathrm{Id}-f)(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2))$, alors $d(\mathrm{Id}-f,\Omega,y)=d(\mathrm{Id}-f,\Omega_1,y)+d(\mathrm{Id}-f,\Omega_2,y)$.*
- (invariance par homotopie) *si Ω est un ouvert borné de E, $h:[0,1]\times\overline{\Omega}\to E$ est compacte, $y:[0,1]\to E$ est continue et, pour tout $t\in[0,1]$, $y(t)\notin(\mathrm{Id}-h(t,\cdot))(\partial\Omega)$, alors $d(\mathrm{Id}-h(0,\cdot),\Omega,y(0))=d(\mathrm{Id}-h(1,\cdot),\Omega,y(1))$.*

d est appelé le degré topologique de Leray-Schauder.

Remarque 3.2.3 *En fait, ce degré est unique (ce qui justifie d'ailleurs que l'on puisse lui donner un nom...). L'unicité du degré de Leray-Schauder est cependant moins instructive et moins utile pour nous que celle du degré de Brouwer, nous n'en parlerons donc pas plus.*

Remarque 3.2.4 *Il est aussi possible de définir un degré topologique pour des perturbations "compactes" d'un opérateur de Fredholm (entre espaces pas nécessairement identiques), voir [11].*

3.2.2 Quelques propriétés

La raison pour laquelle c'est sur les perturbations compactes de l'identité que l'on pourra construire le degré topologique apparaitra clairement lors de ladite construction (voir section 3.3.2). Cependant, il peut déjà être instructif de constater la petite propriété topologique suivante, spécifique aux perturbations compactes de l'identité (et de se rappeler combien il était utile, dans la construction du degré de Brouwer, que $\mathrm{dist}(y,f(\partial\Omega))$ soit strictement positif quand (f,Ω,y) était dans $\mathcal{A}$).

Lemme 3.2.5 *Soient $\mathcal{E}$ et E des Banach et A un fermé de $\mathcal{E}$. Si $f:A\to E$ est compacte et si X est un fermé borné dans A alors $(\mathrm{Id}-f)(X)$ est fermé.*

Preuve du lemme 3.2.5
Si $y_n=x_n-f(x_n)$ est une suite de $(\mathrm{Id}-f)(X)$ qui converge vers un y, alors comme $(x_n)_{n\geq1}\in X$ est borné on peut extraire de $(f(x_n))_{n\geq1}$ une suite qui converge; cela montre que $x_n=y_n+f(x_n)$ converge elle-même vers un $x\in X$ (X est fermé) et, par continuité, que $y=x-f(x)\in(\mathrm{Id}-f)(X)$. ■

Comme pour le degré de Brouwer, on peut déduire des propriétés de normalisation, d'additivité et d'invariance par homotopie du degré de Leray-Schauder quelques propriétés supplémentaires.

Proposition 3.2.6 *Le degré topologique de Leray-Schauder vérifie les propriétés suivantes.*

i) *Si $d(\mathrm{Id}-f,\Omega,y)\neq0$ alors il existe $x\in\Omega$ tel que $x-f(x)=y$.*

ii) *Pour tout $z\in E$, $d(\mathrm{Id}-f,\Omega,y)=d(\mathrm{Id}-f-z,\Omega,y-z)$.*

iii) *Soit $(\mathrm{Id}-f,\Omega,y)\in\mathcal{A}_c$ et $r=\mathrm{dist}(y,(\mathrm{Id}-f)(\partial\Omega))>0$. Si $g:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^N$ compacte et $z\in\mathbb{R}^N$ sont tels que $\sup_{\partial\Omega}(||g-f||)+||y-z||<r$, alors $d(\mathrm{Id}-f,\Omega,y)=d(\mathrm{Id}-g,\Omega,z)$.*

iv) *$d(\mathrm{Id}-f,\Omega,\cdot)$ est constant sur les composantes connexes de $E\backslash(\mathrm{Id}-f)(\partial\Omega)$.*

v) *Pour tout $z\in E$, $d(\mathrm{Id}-f,\Omega,y)=d((\mathrm{Id}-f)(\cdot-z),z+\Omega,y)$.*

Preuve de la proposition 3.2.6
Cette proposition découle du théorème 3.2.2 de la même manière que la proposition 2.2.3 découlait du théorème 2.2.1; il suffit principalement de vérifier que les homotopies que l'on a employées dans la preuve de la proposition 2.2.3 sont des perturbations compactes de l'identité, lorsque les fonctions considérées sont elles-même des perturbations compactes de l'identité.
Les seuls arguments qui ne se transportent pas tels quels depuis la dimension finie sont ceux qui reposaient sur la compacité de $\overline{\Omega}$, et qui sont:

- $f(\partial\Omega)$ est fermé (et donc tout point qui n'est pas dans $f(\partial\Omega)$ est à distance strictement positive de cet ensemble) ce qui, transposé à la situation actuelle, revient à dire que $(\mathrm{Id}-f)(\partial\Omega)$ est fermé.
- $y \notin f(\overline{\Omega}\backslash\Omega_{2s})$ pour s assez petit soit, dans notre cas, $y \notin (\mathrm{Id}-f)(\overline{\Omega}\backslash\Omega_{2s})$ pour s assez petit.

Le premier point est une conséquence immédiate du lemme 3.2.5, et le deuxième se prouve par l'absurde, exactement comme dans la preuve de la proposition 2.2.3, en utilisant le même argument que dans la preuve du lemme 3.2.5. ∎

3.3 Construction du degré de Leray-Schauder

3.3.1 Degré de Brouwer dans un espace vectoriel de dimension finie

Dans le chapitre 2, le degré topologique de Brouwer a été construit sur $\mathbb{R}^N$ (i.e. pour des applications définies sur des parties de $\mathbb{R}^N$). Dans la suite, nous allons avoir besoin, pour tout espace vectoriel F normé de dimension finie, d'un degré topologique d_F sur F.
L'idée est très simple: comme F est de dimension finie, disons N, il existe un isomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^N \to F$. En définissant $\mathcal{A}_F$ comme l'ensemble des triplets (f,Ω,y) tels que Ω est un ouvert borné de F, $y\in F$ et $f:\overline{\Omega}\to F$ est continue et vérifie $y\notin f(\partial\Omega)$, on constate que pour tout $(f,\Omega,y)\in\mathcal{A}_F$ on a $(\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi,\varphi^{-1}(\Omega),\varphi^{-1}(y))\in\mathcal{A}$ et on est donc incité à poser

$$d_F(f,\Omega,y) = d(\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi,\varphi^{-1}(\Omega),\varphi^{-1}(y)) \tag{3.3.1}$$

(où "d" est le degré de Brouwer dans $\mathbb{R}^N$). Il est alors clair que d_F vérifie les propriétés de normalisation, d'additivité et d'invariance par homotopie.

En fait, on n'a pas vraiment le choix de cette définition, car il ne peut exister sur F qu'un seul degré vérifiant les propriétés du théorème 2.2.1. En effet, si d_F est un tel degré et $\varphi:\mathbb{R}^N\to F$ est un isomorphisme, alors il est clair que $\widetilde{d}(g,U,z) = d_F(\varphi\circ g\circ\varphi^{-1},\varphi(U),\varphi(z))$ définit un degré topologique sur $\mathbb{R}^N$, ce qui implique que $\widetilde{d}$ doit être égal au degré de Brouwer d (par unicité de ce dernier) et que d_F a forcément l'expression (3.3.1). Cela prouve au passage que cette définition ne dépend pas de l'isomorphisme φ choisi (puisqu'un degré construit via (3.3.1) à l'aide d'un autre isomorphisme serait aussi un degré sur F, et donc *le* degré sur F).

Dans la suite, nous allons devoir jongler simultanément avec plusieurs espaces vectoriels, et comparer les degrés topologiques de ces différents espaces. Soient $F\subset G$ deux espaces vectoriels de dimension finie et Ω un ouvert borné de G; si $f:\overline{\Omega}\to F$ est continue et $y\in F\backslash f(\partial\Omega)$, alors on peut parler de $d_G(f,\Omega,y)$. De plus, la restriction $f_{|\overline{\Omega\cap F}}:\overline{\Omega\cap F}\to F$ est continue et $y\in F\backslash f_{|\overline{\Omega\cap F}}(\partial_F(\Omega\cap F))$ (car le bord $\partial_F(\Omega\cap F)$ de $\Omega\cap F$ relativement à F est inclus dans $\partial\Omega$), de sorte que l'on peut parler $d_F(f_{|\overline{\Omega\cap F}},\Omega\cap F,y)$. La première idée qui vient à l'esprit serait de se demander si $d_G(f,\Omega,y) = d_F(f_{|\overline{\Omega\cap F}},\Omega\cap F,y)$; en réfléchissant un peu, on se rend compte que ceci n'a aucune chance d'avoir lieu en général: en effet, y pourrait avoir des antécédents par f dans $\Omega\backslash F$, des antécédents parfaitement "stables" et qui seraient donc repérés par $d_G(f,\Omega,y)$ mais n'ont aucune chance d'être détectés par $d_F(f_{|\overline{\Omega\cap F}},\Omega\cap F,y)$.
Si l'on considère maintenant que f est une perturbation de l'identité, c'est à dire $f=\mathrm{Id}-g$ avec g à valeurs dans F, alors cette situation ne peut pas se produire: si x est un antécédent de y par $\mathrm{Id}-g$ on a

forcément $x = g(x) + y \in F$. On peut donc comparer les degrés de divers espaces vectoriels inclus les uns dans les autres, pourvu qu'on les regarde sur des perturbations de l'identité. C'est le propos de l'énoncé suivant.

Proposition 3.3.1 *Soit G un espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous-espace de G. Soit Ω un ouvert borné de G, $y \in F$ et $f : \overline{\Omega} \to F$ une application continue telle que $y \notin (\mathrm{Id} - f)(\partial\Omega)$. Alors $d_G(\mathrm{Id} - f, \Omega, y) = d_F(\mathrm{Id} - f_{|\overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, y)$.*

Preuve de la proposition 3.3.1
On constate d'abord que $\partial_F(\Omega \cap F)$ (le bord relatif dans F de l'ouvert $\Omega \cap F$ de F) est inclus dans $\partial\Omega$, de sorte que $y \notin (\mathrm{Id} - f_{|\overline{\Omega \cap F}})(\partial_F(\Omega \cap F))$ et $d_F(\mathrm{Id} - f_{|\overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, y)$ est bien défini. Pour prouver le résultat de la proposition, nous allons revenir à la définition du degré via fonctions et valeurs régulières.

En choisissant un isomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^m \to G$ tel que $\varphi(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = F$, on peut se ramener via la définition (3.3.1) au cas où $G = \mathbb{R}^m$ et $F = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ (notons que l'on utilise ici le fait que la définition du degré sur un espace vectoriel de dimension finie ne dépend pas de l'isomorphisme choisi entre cet espace et un $\mathbb{R}^N$ de référence). Il est clair que, dans cette situation, le degré sur F est calculé comme celui sur $\mathbb{R}^n$ (via réduction à des fonctions et des valeurs régulières sur $\mathbb{R}^n \times \{0\} \approx \mathbb{R}^n$).
Comme f est continue à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, en raisonnant composante par composante dans cet espace la proposition 5.1.2 nous permet de trouver une application $\widetilde{f} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n \times \{0\}$ régulière et aussi uniformément proche de f que souhaité. On sait alors que $d_{\mathbb{R}^m}(\mathrm{Id} - f, \Omega, y) = d_{\mathbb{R}^m}(\mathrm{Id} - \widetilde{f}, \Omega, y)$ et que $d_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}(\mathrm{Id} - f_{|\overline{\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})}}, \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}), y) = d_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}(\mathrm{Id} - \widetilde{f}_{|\overline{\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})}}, \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}), y)$.
Soit $\widetilde{y} \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$ une valeur régulière de $\mathrm{Id} - \widetilde{f}_{|\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})}$ suffisamment proche de y. Par construction du degré, on a

$$d_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}(\mathrm{Id} - \widetilde{f}_{|\overline{\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})}}, \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}), y) = \sum_{\substack{x \in \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \\ \text{t.q. } x - \widetilde{f}(x) = \widetilde{y}}} \mathrm{sgn}(J_n(\mathrm{Id} - \widetilde{f}_{|\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})})(x))$$

(J_n désigne le déterminant jacobien dans l'espace $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ identifié à $\mathbb{R}^n$).
Si x est un antécédent dans Ω de $\widetilde{y}$ par $\mathrm{Id} - \widetilde{f}$ alors $x = \widetilde{f}(x) + \widetilde{y} \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$, et x est donc un antécédent dans $\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ de $\widetilde{y}$ par $\mathrm{Id} - \widetilde{f}_{|\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})}$. Comme $\widetilde{f}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, la matrice de $\widetilde{f}'(x)$ a alors pour expression

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \widetilde{f}_1(x) & \cdots & \partial_m \widetilde{f}_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 \widetilde{f}_n(x) & \cdots & \partial_m \widetilde{f}_n(x) \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\widetilde{f}_{|\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})})'(x) & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où A est une matrice $n \times (m - n)$. La matrice de $\mathrm{Id} - \widetilde{f}'(x)$ est donc

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id} - (\widetilde{f}_{|\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})})'(x) & -A \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

et il est alors clair que $J_m(\mathrm{Id} - \widetilde{f})(x) = J_n(\mathrm{Id} - \widetilde{f}_{|\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})})(x)$ (J_m est le jacobien dans $\mathbb{R}^m$). On en déduit que tous les antécédents dans Ω de $\widetilde{y}$ par $\mathrm{Id} - \widetilde{f}$, qui sont en fait les antécédents dans $\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ de $\widetilde{y}$ par $\mathrm{Id} - \widetilde{f}_{|\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})}$, sont des points réguliers de $\mathrm{Id} - \widetilde{f}$ et que

$$d_{\mathbb{R}^m}(\mathrm{Id} - \widetilde{f}, \Omega, y) \quad = \sum_{x \in \Omega \mid x - \widetilde{f}(x) = \widetilde{y}} \mathrm{sgn}(J_m(\mathrm{Id} - \widetilde{f})(x))$$

$$= \sum_{\substack{x \in \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \\ \text{t.q. } x - \widetilde{f}(x) = \widetilde{y}}} \mathrm{sgn}(J_n(\mathrm{Id} - \widetilde{f}_{|\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})})(x))$$

$$= d_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}(\mathrm{Id} - \widetilde{f}_{|\overline{\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})}}, \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}), y),$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. ■

3.3.2 Du degré de Brouwer au degré de Leray-Schauder

La raison pour laquelle on est capable de construire un degré pour les perturbations compactes de l'identité est que les applications compactes s'approchent bien par des applications "en dimension finie" (pour lesquelles on a déjà un degré).

Définition 3.3.2 *Soient $\mathcal{E}$ et E des Banach et A un fermé de $\mathcal{E}$. Une application $f : A \to E$ est de rang fini si elle est continue et si $f(A)$ est inclus dans un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.*

Proposition 3.3.3 *Soient $\mathcal{E}$ et E des Banach et A un fermé borné dans $\mathcal{E}$. Si $f : A \to E$ est une application compacte alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : A \to E$ de rang fini tel que* $\sup_A ||g - f|| \le \varepsilon$.

Preuve de la proposition 3.3.3
On a $f(A) \subset \cup_{y \in f(A)} B(y, \varepsilon)$ et, puisque $f(A)$ est relativement compact (car A est borné), $f(A)$ est précompact et il existe donc $y_1, \ldots, y_n$ tels que $f(A) \subset \cup_{i=1}^n B(y_i, \varepsilon)$.
Nous allons maintenant construire une partition de l'unité associée à ce recouvrement fini. Pour cela, on considère $\theta_i(y) = \max(0, 1 - \frac{\mathrm{dist}(y, y_i)}{\varepsilon})$. La fonction θ_i est clairement positive continue sur E et strictement positive sur $B(y_i, \varepsilon)$; on en déduit que $\Theta = \sum_{i=1}^n \theta_i$ est continue sur E et strictement positive sur $f(A) \subset \cup_{i=1}^n B(y_i, \varepsilon)$. On peut alors poser $\lambda_i = \theta_i / \Theta$, fonction positive continue sur $f(A)$, à support dans $B(y_i, \varepsilon)$ et qui vérifie $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ sur $f(A)$.
Considérons alors $g(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(f(x)) y_i$. Cette fonction est continue $A \to E$ et a son image incluse dans l'espace vectoriel engendré par $y_1, \ldots, y_n$; elle est donc de rang fini. Par ailleurs, si on prend $x \in A$, comme $\sum_{i=1}^n \lambda_i(f(x)) = 1$ on a $g(x) - f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(f(x))(y_i - f(x))$; mais $\lambda_i(f(x)) = 0$ si $f(x) \notin B(y_i, \varepsilon)$, ce qui implique $||g(x) - f(x)|| \le \varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i(f(x)) = \varepsilon$ et conclut la preuve. ■

Nous pouvons maintenant construire le degré de Leray-Schauder, à partir du degré de Brouwer. L'idée ressemble à celles qui ont guidé nos pas lors de la construction du degré de Brouwer: nous connaissons un degré sur une certaine classe I d'applications (celles définies sur un espace de dimension finie et à valeurs dans ce même espace); pour définir le degré sur une application "générale" (i.e. perturbation compacte de l'unité en ce qui nous concerne), nous allons simplement dire qu'il est égal au degré de n'importe quelle application de I proche de notre application "générale", en montrant que cette définition est cohérente (c'est à dire que deux applications de I proches de notre application "générale" ont même degré).

Soit $(\mathrm{Id} - f, \Omega, y) \in \mathcal{A}_c$. Par le lemme 3.2.5, $r = \mathrm{dist}(y, (\mathrm{Id} - f)(\partial\Omega))$ est strictement positif. Soit $g : \overline{\Omega} \to E$ une application de rang fini telle que $\sup_{\overline{\Omega}} ||g - f|| < r$ (voir la proposition 3.3.3); il est clair que $y \notin (\mathrm{Id} - g)(\partial\Omega)$ (car $\sup_{\partial\Omega} ||\mathrm{Id} - g - (\mathrm{Id} - f)|| < \mathrm{dist}(y, (\mathrm{Id} - f)(\partial\Omega))$). Notons F un espace de dimension finie qui contient l'image de g et y. La restriction $\mathrm{Id} - g_{|\overline{\Omega \cap F}}$ de $\mathrm{Id} - g$ à $\overline{\Omega \cap F}$ est à valeurs dans F et, comme le bord $\partial_F(\Omega \cap F)$ de $\Omega \cap F$ relativement à F est inclus dans $\partial\Omega$, on a $(\mathrm{Id} - g_{|\overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, y) \in \mathcal{A}_F$. On peut donc parler de l'entier $d_F(\mathrm{Id} - g_{|\overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, y)$ et on a envie de définir le degré de Leray-Schauder de $(\mathrm{Id} - f, \Omega, y)$ comme étant cet entier; mais ceci ne sera une définition cohérente (et surtout qui nous permettra de prouver les propriétés du degré de Leray-Schauder) que si l'on peut montrer qu'elle ne dépend pas des choix de g et F effectués.
Soit donc g_1 une autre application de rang fini définie sur $\overline{\Omega}$ et à distance de f strictement inférieure à $r = \mathrm{dist}(y, (\mathrm{Id} - f)(\partial\Omega))$, et F_1 un autre espace de dimension finie qui contient y et l'image de g_1. En notant $G = F + F_1$, la proposition 3.3.1 permet de voir que

$$d_F(\mathrm{Id} - g_{|\overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, y) = d_G(\mathrm{Id} - g_{|\overline{\Omega \cap G}}, \Omega \cap G, y) \quad \text{et} \quad d_{F_1}(\mathrm{Id} - g_{1|\overline{\Omega \cap F_1}}, \Omega \cap F_1, y) = d_G(\mathrm{Id} - g_{1|\overline{\Omega \cap G}}, \Omega \cap G, y).$$

On construit maintenant dans G l'homotopie naturelle $h(t,x) = t(\mathrm{Id} - g_{|\overline{\Omega\cap G}})(x) + (1-t)(\mathrm{Id} - g_{1|\overline{\Omega\cap G}})(x)$ entre $\mathrm{Id} - g_{|\overline{\Omega\cap G}}$ et $\mathrm{Id} - g_{1|\overline{\Omega\cap G}}$. Comme ces deux fonctions sont, sur $\partial_G(\Omega\cap G) \subset \overline{\Omega}$, à distance de $\mathrm{Id} - f$ strictement inférieure à r, on voit que pour tout $t \in [0,1]$ la fonction $\mathrm{Id} - h(t,\cdot)$ reste aussi, sur $\partial_G(\Omega\cap G)$, à distance de $\mathrm{Id} - f$ strictement inférieure à r; en particulier, $\mathrm{Id} - h$ ne prend donc jamais y comme valeur sur $[0,1]\times\partial_G(\Omega\cap G)$ et l'invariance par homotopie de d_G donne $d_G(\mathrm{Id} - g_{|\overline{\Omega\cap G}}, \Omega\cap G, y) = d_G(\mathrm{Id} - g_{1|\overline{\Omega\cap G}}, \Omega\cap G, y)$, ce qui conclut le raisonnement.

Pour résumer, le degré de Leray-Schauder sur $\mathcal{A}_c$ est donc défini ainsi:

$$
\begin{gathered}
d(\mathrm{Id} - f, \Omega, y) = d_F(\mathrm{Id} - g_{|\overline{\Omega\cap F}}, \Omega\cap F, y)\,,\ \text{où } g : \overline{\Omega} \to E \text{ est n'importe quelle application}\\
\text{de rang fini telle que } \sup_{\overline{\Omega}} ||g - f|| < r, \text{ avec } r = \mathrm{dist}(y, (\mathrm{Id} - f)(\partial\Omega)), \text{ et}\\
F \text{ est un sous-espace de } E \text{ de dimension finie qui contient } y \text{ et l'image de } g.
\end{gathered}
$$

La propriété de normalisation est alors une trivialité. L'additivité du degré n'est pas beaucoup plus dure à prouver: si f est compacte et $y \notin (\mathrm{Id} - f)(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2))$ avec Ω_1 et Ω_2 des ouverts inclus dans Ω, par le lemme 3.2.5 l'ensemble $(\mathrm{Id} - f)(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2))$ est fermé et $r = \mathrm{dist}(y, (\mathrm{Id} - f)(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2)))$ est strictement positif; en prenant g de rang fini telle que $\sup_{\overline{\Omega}} ||g - f|| < r$ et F un sous-espace de dimension finie qui contient y et l'image de g, on a alors $\sup_{\overline{\omega}} ||g - f|| < \mathrm{dist}(y, (\mathrm{Id} - f)(\partial\omega))$ pour $\omega = \Omega$, Ω_1 et Ω_2, de sorte que l'on peut utiliser g et F pour calculer $d(\mathrm{Id} - f, \omega, y)$ pour tous ces ω; de plus $y \notin (\mathrm{Id} - g)(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2))$ donc $y \in F\backslash(\mathrm{Id} - g_{\overline{\Omega\cap F}})(\overline{\Omega\cap F}\backslash((\Omega_1\cap F)\cup(\Omega_2\cap F)))$ (car $\overline{\Omega\cap F}\backslash((\Omega_1\cap F)\cup(\Omega_2\cap F)) \subset \overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2)$). L'additivité du degré d_F sur F permet alors de conclure que

$$
\begin{aligned}
d(\mathrm{Id} - f, \Omega, y) &= d_F(\mathrm{Id} - g_{|\overline{\Omega\cap F}}, \Omega\cap F, y)\\
&= d_F(\mathrm{Id} - g_{|\overline{\Omega\cap F}}, \Omega_1\cap F, y) + d_F(\mathrm{Id} - g_{|\overline{\Omega\cap F}}, \Omega_2\cap F, y)\\
&= d(\mathrm{Id} - f, \Omega_1, y) + d(\mathrm{Id} - f, \Omega_2, y).
\end{aligned}
$$

L'invariance par homotopie se fait aussi directement. On commence par constater que puisque les degrés en dimension finie vérifient la propriété ii) de la proposition 2.2.3, il est clair par sa définition que le degré de Leray-Schauder tout juste construit vérifie la propriété similaire ii) de la proposition 3.2.6; il suffit donc de prouver l'invariance par homotopie lorsque la valeur y est prise égale à 0. Si $h : [0,1]\times\overline{\Omega} \to E$ est une homotopie compacte telle que $0 \notin (\mathrm{Id} - h(t,\cdot))(\partial\Omega)$ pour tout $t \in [0,1]$, alors comme $[0,1]$ est compact on peut voir par l'absurde (en utilisant le même genre de technique que dans la preuve du lemme 3.2.5) que $r = \inf_{t\in[0,1]} \mathrm{dist}(0, (\mathrm{Id} - h(t,\cdot))(\partial\Omega))$ est strictement positif; on prend alors une homotopie $\widetilde{h} : [0,1]\times\overline{\Omega} \to E$ de rang fini et à distance de h strictement inférieure à r de sorte que, si F est un espace de dimension finie qui contient l'image de $\widetilde{h}$, on a par définition, pour tout $t \in [0,1]$, $d(\mathrm{Id} - h(t,\cdot), \Omega, 0) = d_F(\mathrm{Id} - \widetilde{h}(t,\cdot)_{|\overline{\Omega\cap F}}, \Omega\cap F, 0)$, et l'invariance par homotopie de d_F conclut l'argumentaire.

Chapitre 4

Applications

4.1 Résolution d'équations

Le degré topologique a été construit avec en tête la résolution d'équations du genre (1.1.1). Il est donc naturel que nombre de ses applications tournent autour de cette problématique.

4.1.1 Théorèmes de point fixe

Les preuves du théorème de point fixe de Brouwer sont nombreuses et variées: preuves combinatoires, preuves via la topologie algébrique, etc... . La preuve la plus "élémentaire" est probablement celle de [9], qui n'utilise que les théorèmes de changement de variables et d'inversion locale dans $\mathbb{R}^N$.
Le théorème de point fixe de Schauder a nettement moins de preuves différentes, principalement parce que beaucoup des techniques qui peuvent servir à démontrer le théorème de Brouwer passent mal en dimension infinie. La preuve classique du théorème de Schauder est probablement celle qui consiste à se ramener au théorème de Brouwer en utilisant le fait qu'une fonction compacte est approchable par des applications de rang fini.
Les deux théorèmes de point fixe en question sont cependant diablement similaires (en fait, le théorème de Brouwer est un cas particulier du théorème de Schauder, puisque toute application continue est compacte en dimension finie), et il serait naturel d'avoir des preuves similaires pour chacun d'eux. Grâce aux degrés topologiques, nous pouvons justement donner une preuve rapide et totalement commune aux théorèmes de Brouwer et Schauder ([1]).

Théorème 4.1.1 (Point fixe de Brouwer) *Soit $\overline{B}$ la boule unité fermée $\mathbb{R}^N$ et $f : \overline{B} \to \overline{B}$ continue. Alors f a un point fixe: il existe $x \in \overline{B}$ tel que $f(x) = x$.*

Théorème 4.1.2 (Point fixe de Schauder) *Soit $\overline{B}$ la boule unité fermée d'un Banach E et $f : \overline{B} \to \overline{B}$ compacte. Alors f a un point fixe: il existe $x \in \overline{B}$ tel que $f(x) = x$.*

Preuve des théorèmes 4.1.1 et 4.1.2
S'il existe un point fixe sur ∂B, alors il n'y a rien à prouver. On peut donc supposer que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in \partial B$. Puisque f n'a pas de point fixe sur le bord de B, on a bien $(\mathrm{Id} - f, B, 0) \in \mathcal{A}$ (ou $\mathcal{A}_c$ dans le cadre du théorème de Schauder); nous allons montrer que $d(\mathrm{Id} - f, B, 0) = 1$, ce qui prouvera que $\mathrm{Id} - f$ a au moins un zéro dans B, et que f a donc au moins un point fixe dans cet ensemble.
Soit $h(t, x) = tf(x)$, fonction continue sur $[0, 1] \times \overline{B}$ (et compacte dans le cadre du théorème de Schauder). Si, pour un $t \in [0, 1]$ et un $x \in \partial B$, on a $x - h(t, x) = 0$, alors $tf(x) = x$; comme $|x| = 1$ et $|f(x)| \leq 1$, ceci impose $t = 1$ et $x = f(x)$, donc la présence d'un point fixe de f sur ∂B, situation que l'on a exclue. On

[1] Bien sûr, il ne faut pas être dupe: comme le degré de Leray-Schauder a été construit directement à partir du degré de Brouwer, la preuve donnée ici du théorème de Schauder, qui utilise le degré de Leray-Schauder, consiste finalement — comme la preuve classique — à se ramener à la dimension finie... .

peut donc appliquer les propriétés de normalisation et d'invariance par homotopie du degré de Brouwer ou de Leray-Schauder qui donnent $1 = d(\mathrm{Id}, B, 0) = d(\mathrm{Id} - f, B, 0)$ (puisque $h(0, \cdot) = 0$ et $h(1, \cdot) = f$), ce qui conclut la preuve des deux théorèmes. ■

Remarque 4.1.3 *La proposition 1.2.3 se prouve exactement de la même manière (l'hypothèse $f(x) \notin]1, \infty[x$ lorsque $x \in \partial B$ empêchant que l'équation $x - tf(x) = 0$ ait une solution sur ∂B, et ce quel que soit $t \in [0, 1[$ — si une solution à cette équation existe pour $t = 1$, c'est un point fixe de f).*

4.1.2 Surjectivité de fonctions

Le degré topologique permet non seulement de dire, à y fixé, que (1.1.1) a au moins une solution mais, bien souvent, il permet aussi de résoudre cette équation pour de nombreux y différents (voir remarque 2.2.5). Bref, de montrer que l'image de f est assez grosse.

Proposition 4.1.4 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ continue telle que $f_{|\partial\Omega} = \mathrm{Id}$. Alors $\Omega \subset f(\Omega)$.*

Preuve de la proposition 4.1.4
Si $y \in \Omega$, alors $(\mathrm{Id}, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ et, par la remarque 2.2.4, $d(f, \Omega, y) = d(\mathrm{Id}, \Omega, y) = 1$. Le point i) de la proposition 2.2.3 montre alors qu'il existe $x \in \Omega$ tel que $f(x) = y$, ce qui conclut la preuve. ■

Proposition 4.1.5 *Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction continue telle que $\frac{f(x)\cdot x}{|x|} \to \infty$ lorsque $|x| \to \infty$. Alors f est surjective sur $\mathbb{R}^N$.*

Preuve de la proposition 4.1.5
Soit $y \in \mathbb{R}^N$ et $h(t, x) = tf(x) + (1 - t)x$ l'homotopie naturelle entre f et Id. Nous allons montrer que, pour $R > |y|$ assez grand et tout $t \in [0, 1]$, $h(t, x) = y$ n'a pas de solution $x \in \partial B(0, R)$, ce qui permettra de voir, grâce à l'invariance par homotopie et la normalisation du degré, que $d(f, B(0, R), y) = d(\mathrm{Id}, B(0, R), y) = 1$, et donc (par le point i) de la proposition 2.2.3), qu'il existe $x \in B(0, R)$ tel que $f(x) = y$.
Soit donc $x \in \partial B(0, R)$ et $t \in [0, 1]$ tel que $h(t, x) = y$. On a $x \cdot y = x \cdot h(t, x) = tx \cdot f(x) + (1 - t)|x|^2$, ce qui donne

$$|y| \geq \left(t\frac{f(x)\cdot x}{|x|} + (1 - t)|x|\right) = \left(t\frac{f(x)\cdot x}{|x|} + (1 - t)R\right).$$

Prenons $R > |y| + 1$ assez grand de sorte que $\frac{f(x)\cdot x}{|x|} > |y| + 1$ lorsque $|x| \geq R$. On déduit de ce qui précède que $|y| \geq t(|y| + 1) + (1 - t)(|y| + 1) = |y| + 1$, ce qui est une contradiction et montre que, avec ce choix de R, $h(t, x) = y$ ne peut avoir de solution $x \in \partial B(0, R)$, et ce quel que soit $t \in [0, 1]$. ■

4.1.3 Degré topologique des polynômes

Les polynômes sont parmi les fonctions les plus simples, on doit donc pouvoir dire des choses assez précises sur leur degré. Le cas des polynômes sur $\mathbb{R}$ n'est pas le plus intéressant car le degré topologique en dimension 1 est explicite pour toutes les fonctions (voir section 2.1). La situation sur $\mathbb{C}$ est plus intéressante, quoiqu'apparamment tautologique: le degré d'un polynôme complexe est son degré (!).

Lemme 4.1.6 *Soit $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ un polynôme sur $\mathbb{C}$, avec $a_n \neq 0$. Pour tout R assez grand, on a $d(P, B(0, R), 0) = n$.*

Preuve du lemme 4.1.6
Commençons par réaliser une homotopie entre P et $g(a) = a_n z^n$. Soit $h(t, z) = tP(z) + (1 - t)g(z) = a_n z^n + tQ(z)$ avec Q polynôme de degré inférieur ou égal à n. A l'infini, $|Q(z)|$ est négligeable devant $|a_n z^n|$ et il existe donc $R > 0$ tel que $|Q(z)| < |a_n z^n|$ lorsque $|z| = R$; cela montre que, pour tout $t \in [0, 1]$,

l'équation $a_n z^n + tQ(z) = 0$ ne peut pas avoir de solution $z \in \partial B(0,R)$ et donc, par invariance du degré par homotopie, que $d(P, B(0,R), 0) = d(g, B(0,R), 0)$.
Il reste à montrer que $d(g, B(0,R), 0) = n$. Pour cela, nous utilisons le fait qu'il existe une courbe $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ qui relie a_n à 1, de sorte que $H(t,z) = \gamma(t)z^n$ est une homotopie entre $g(z) = a_n z^n$ et $f(z) = z^n$ qui vérifie: $H(t,z) \neq 0$ pour tout $z \in \partial B(0,R)$. On a donc $d(g, B(0,R), 0) = d(f, B(0,R), 0)$ et, par additivité du degré et les calculs de la section 2.4.4, $d(f, B(0,R), 0) = d(f, B(0,1), 0) = n$, ce qui conclut la preuve. ∎

D'Alembert-Gauss découle sans difficulté de ce lemme.

Théorème 4.1.7 (D'Alembert-Gauss) *Tout polynôme non constant à coefficients complexes a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Preuve du théorème 4.1.7
Si P est un polynôme non constant, le lemme 4.1.6 montre que, pour R assez grand, $d(P, B(0,R), 0) \neq 0$, et le i) de la proposition 2.2.3 permet de conclure qu'il existe $x \in B(0,R)$ tel que $P(x) = 0$. ∎

Ceci n'est bien sûr pas la preuve la plus élémentaire que l'on peut faire de ce théorème, puisqu'elle requiert toute la machinerie du degré de Brouwer.

4.1.4 Degré topologique des fonctions holomorphes

Dans la section 4.1.3, nous avons montré que le degré topologique d'un polynôme en 0 est son degré de polynôme; l'algèbre nous apprend que ce nombre est aussi égal au nombre de racines du polynôme (comptées avec leur multiplicité). En ce sens, on constate que sur les polynômes le degré topologique remplit pleinement le rôle qu'on avait décrit dans l'introduction: il compte le nombre de solutions de l'équation $P(z) = 0$. Ceci s'étend aux fonctions holomorphes.

Lemme 4.1.8 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega}$, qui ne s'annule pas sur $\partial\Omega$. Alors $d(f, \Omega, 0)$ est égal au nombre de zéros de f dans Ω, comptés avec leur multiplicité.*

Preuve du lemme 4.1.8
Si f est constante, elle est non-nulle et n'a donc aucun zéro dans Ω et (par i) de la proposition 2.2.3) $d(f, \Omega, 0) = 0$, ce qui correspond bien au nombre de zéros de f dans Ω. Ce raisonnement marche aussi si f est non-constante et n'a pas de zéro dans Ω. On peut donc supposer à partir de maintenant que f n'est pas constante et a un nombre fini de zéros dans Ω (principe des zéros isolés). Notons $(z_1, \dots, z_k)$ ces zéros et $(n_1, \dots, n_k)$ leurs multiplicités.
Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, les boules $(B(z_i, \varepsilon))_{i \in [1,k]}$ sont disjointes et incluses dans Ω. Comme f n'a aucun zéro dans $\overline{\Omega}$ en dehors de l'union de ces boules, l'additivité du degré permet de voir que $d(f, \Omega, 0) = \sum_{i=1}^k d(f, B(z_i, \varepsilon), 0)$. Il reste à montrer que, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, $d(f, B(z_i, \varepsilon), 0) = n_i$.
Par translation (en utilisant le point v) de la proposition 2.2.3), on peut supposer que $z_i = 0$, et, en notant $n = n_i$, on peut écrire $f(z) = az^n(1 + \omega(z))$ avec $a \neq 0$ et $\omega(z) \to 0$ lorsque $z \to 0$. Si ε est assez petit, on a $|\omega(z)| < 1$ pour $|z| = \varepsilon$ et l'homotopie $(t,z) \to az^n(1 + t\omega(z))$ n'a pas de zéro sur $[0,1] \times \partial B(0, \varepsilon)$. L'invariance par homotopie du degré donne alors $d(f, B(0,\varepsilon), 0) = d(z \to az^n, B(0,\varepsilon), 0)$. En réalisant ensuite, comme dans la preuve du lemme 4.1.6, une homotopie dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ entre a et 1, puis en utilisant les propriétés d'additivité du degré et les calculs de la section 2.4.4, on aboutit à $d(f, B(0,\varepsilon), 0) = d(z \to z^n, B(0,\varepsilon), 0) = d(z \to z^n, B(0,1), 0) = n$, ce qui conclut la preuve. ∎

Le théorème de Rouché est une conséquence immédiate de ce lemme.

Théorème 4.1.9 (Rouché) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et f et g deux fonctions holomorphes sur un voisinage de $\overline{\Omega}$. On suppose que f n'a aucun zéro sur $\partial\Omega$. Si $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ pour tout $z \in \partial\Omega$, alors f et g ont même nombre de zéros dans Ω (comptés avec leur multiplicité).*

Preuve du théorème 4.1.9
Vu le lemme 4.1.8, il suffit de montrer que $d(f,\Omega,0)=d(g,\Omega,0)$, et donc de réaliser une homotopie entre f et g qui ne s'annule jamais sur $\partial\Omega$. L'homotopie naturelle $h(t,z)=(1-t)f(z)+tg(z)=f(z)+t(g(z)-f(z))$ convient, grâce à l'hypothèse "$|f(z)-g(z)|<|f(z)|$ pour tout $z\in\partial\Omega$". ■

Le résultat suivant est souvent déduit du théorème de Rouché. Nous allons, pour notre part, en donner une preuve directe par le degré topologique.

Proposition 4.1.10 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega}$ n'ayant aucun zéro sur $\partial\Omega$. On note $(z_1,\ldots,z_k)$ les zéros de f dans Ω et $(n_1,\ldots,n_k)$ leurs multiplicités respectives. Alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que, pour toute fonction g holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega}$ vérifiant $\sup_{\overline{\Omega}}|f-g|<\delta$, tous les zéros de g dans Ω sont dans $\cup_{i=1}^k B(z_i,\varepsilon)$ et, pour tout $i\in\{1,\ldots,k\}$, g a exactement n_i zéros (comptés avec leur multiplicité) dans $B(z_i,\varepsilon)$.*

Preuve de la proposition 4.1.10
Quitte à réduire ε, on peut supposer que les boules $(B(z_i,\varepsilon))_{i\in[1,k]}$ sont disjointes et incluses dans Ω. On définit alors $\delta=\inf_{\overline{\Omega}\setminus\cup_{i=1}^k B(z_i,\varepsilon)}|f|$, réel strictement positif (puisque $\overline{\Omega}\setminus\cup_{i=1}^k B(z_i,\varepsilon)$ est compact et ne contient pas de zéro de f). Si g est holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega}$ et si $\sup_{\overline{\Omega}}|f-g|<\delta$, alors il est clair que g ne peut pas avoir de zéro dans Ω en dehors de $\cup_{i=1}^k B(z_i,\varepsilon)$ (sinon on aurait, pour un $z\in\Omega\setminus\cup_{i=1}^k B(z_i,\varepsilon)$, $\delta>|f(z)-g(z)|=|f(z)|$, ce qui contredirait la définition de δ). De plus, pour tout $i\in[1,k]$, on a $\sup_{\partial B(z_i,\varepsilon)}|f-g|\le\sup_{\overline{\Omega}}|f-g|<\delta\le\operatorname{dist}(0,f(\partial B(z_i,\varepsilon)))$ (puisque $\partial B(z_i,\varepsilon)\subset\overline{\Omega}\setminus\cup_{j=1}^k B(z_j,\varepsilon)$, les boules $(B(z_j,\varepsilon))_{j\in[1,k]}$ étant disjointes); ainsi, par le point iii) de la proposition 2.2.3, on a $d(f,B(z_i,\varepsilon),0)=d(g,B(z_i,\varepsilon),0)$ et le lemme 4.1.8 permet de conclure qu'il y a, dans $B(z_i,\varepsilon)$, autant de zéros de f que de g (comptés avec leur multiplicité). ■

4.2 Résultats topologiques

Les applications suivantes concernent un peu moins directement la résolution d'équations du genre (1.1.1), mais montrent plutôt que le degré topologique a justement de puissantes conséquences en topologie.

4.2.1 Degré topologique des fonctions impaires: théorème de Borsuk

Si f est impaire et $y=0$, alors les solutions de (1.1.1) sont de deux types: il y a $x=0$, et les autres solutions vont par couple $(x,-x)$; on a donc toujours un nombre impair de telles solutions. Le théorème de Borsuk est la traduction, en terme de degré topologique, de cette simple constatation; ladite traduction n'est cependant pas évidente car, comme on l'a souvent répété, le degré ne se contente pas de compter bêtement les solutions de (1.1.1)...

Théorème 4.2.1 (Borsuk) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ contenant 0 et symétrique par rapport à ce point. Soit $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^N$ continue telle que $0\notin f(\partial\Omega)$. Si f est impaire, alors $d(f,\Omega,0)$ est aussi impair (et en particulier non-nul).*

Preuve du théorème 4.2.1
Quitte à perturber un peu f, ce qui ne change pas le degré, on peut supposer qu'elle est régulière et impaire ([2]). Supposons dans un premier temps que 0 est une valeur régulière de f et revenons à la définition (2.4.1) du degré pour fonctions et valeurs régulières. Comme 0 est un antécédent évident de 0 par f (puisque f est impaire), on a

$$d(f,\Omega,0)=\operatorname{sgn}(Jf(0))+\sum_{x\in f^{-1}(\{0\})\,,\,x\neq 0}\operatorname{sgn}(Jf(x)).$$

[2] Afin de conserver la propriété d'imparité lors d'une telle approximation par des fonctions régulières, on peut commencer par approcher f par une fonction régulière g quelconque et constater que la partie impaire $\frac{g(x)-g(-x)}{2}$ de g est régulière impaire et approche $\frac{f(x)-f(-x)}{2}=f(x)$.

Les antécédents non-nuls de 0 vont par couple $(x, -x)$ (si $f(x) = 0$ alors $f(-x) = -f(x) = 0$), de sorte qu'en formant une famille, éventuellement vide, $(x_1, \ldots, x_l)$ ayant un seul représentant de chacun de ces couples, la parité de f' (qui découle de l'imparité de f) donne

$$d(f, \Omega, 0) = \operatorname{sgn}(Jf(0)) + \sum_{i=1}^{l} \operatorname{sgn}(Jf(x_i)) + \operatorname{sgn}(Jf(-x_i)) = \operatorname{sgn}(Jf(0)) + 2\sum_{i=1}^{l} \operatorname{sgn}(Jf(x_i)),$$

ce qui conclut la preuve.
Dans le cas général où 0 n'est pas une valeur régulière de f, nous allons montrer que l'on peut perturber f en une application impaire (aussi proche que voulue de f) dont 0 est une valeur régulière, ce qui suffira à conclure vu le raisonnement précédent et le point iii) de la proposition 2.2.3. La difficulté ici est que l'on ne souhaite pas simplement qu'une valeur quelconque proche de 0 soit régulière (ce que le théorème de Sard donnerait immédiatement), mais bien que 0 lui-même soit régulier. L'idée consiste à perturber f une composante et une direction après l'autre.

Considérons $g(x) = f(x) - yh(x_1)$ avec $y \in \mathbb{R}^N$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ régulière impaire et ne s'annulant qu'en 0. Prenons x tel que $g(x) = 0$ et $x_1 \neq 0$; on a alors $g'(x) = f'(x) - yh'(x_1) = f'(x) - \frac{f(x)}{h(x_1)} h'(x_1) = h(x_1)F'(x)$ avec $F(x) = \frac{f(x)}{h(x_1)}$; dans cette situation, on a aussi $F(x) = y$. Si $F'(x)$ est inversible, alors il en est de même pour $g'(x)$ (puisque h ne s'annule qu'en 0 et on a pris x tel que $x_1 \neq 0$). En d'autres termes, si y est une valeur régulière de F sur $\{x \in \Omega \mid x_1 \neq 0\}$, alors 0 est une valeur régulière de g sur le même ouvert. Comme, par le théorème de Sard, on peut trouver des y valeurs régulières de F aussi petites que l'on souhaite, g peut être vue comme une perturbation (impaire) de f dont 0 est valeur régulière sur un sous-ensemble de Ω. Ce raisonnement donne l'idée de base que nous allons maintenant mettre en oeuvre.

Soit donc f régulière impaire. Quitte à commencer par perturber f en $f - \delta \mathrm{Id}$ (qui est bien régulière impaire) avec δ petit et en dehors du spectre de $f'(0)$, on peut supposer que $f'(0)$ est inversible.
Le raisonnement précédent montre qu'il existe une perturbation f_1 régulière impaire aussi proche que l'on souhaite de f, telle que 0 est une valeur régulière de f_1 sur $\{x \in \Omega \mid x_1 \neq 0\}$. On a de plus $f_1'(0) = f'(0)$, si l'on a choisi h telle que $h'(0) = 0$ (ce que l'on supposera à partir de maintenant).
Considérons maintenant $f_2(x) = f_1(x) - y_2 h(x_2)$, avec la même fonction h que ci-dessus et y_2 une valeur régulière de $F_2(x) = \frac{f_1(x)}{h(x_2)}$ sur $\{x \in \Omega \mid x_2 \neq 0\}$; on peut prendre y_2 aussi petit que souhaité, et le raisonnement précédent montre que 0 est une valeur régulière de f_2 sur $\{x \in \Omega \mid x_2 \neq 0\}$. Si $x \in \Omega$ est tel que $x_2 = 0$ et $f_2(x) = 0$, alors $f_1(x) = 0$ et $f_2'(x) = f_1'(x)$. Comme 0 est une valeur régulière de f_1 sur $\{x \in \Omega \mid x_1 \neq 0\}$, on en déduit que, en tout $x \in \Omega$ tel que $x_1 \neq 0$, $x_2 = 0$ et $f_2(x) = 0$, l'application linéaire $f_2'(x) = f_1'(x)$ est inversible. Ainsi, 0 est une valeur régulière de f_2 non pas uniquement sur $\{x \in \Omega \mid x_2 \neq 0\}$, mais en fait sur $\{x \in \Omega \mid x_1 \neq 0 \text{ ou } x_2 \neq 0\}$. On note au passage que l'on a $f_2'(0) = f_1'(0) = f'(0)$.
En raisonnant par récurrence, cette méthode permet de construire une perturbation impaire f_N de f dont 0 est valeur régulière sur $\{x \in \Omega \mid x_1 \neq 0 \text{ ou } x_2 \neq 0 \text{ ou } \ldots \text{ ou } x_N \neq 0\} = \Omega \backslash \{0\}$ et telle que $f_N'(0) = f'(0)$. Comme on avait pris f tel que $f'(0)$ est inversible, 0 est finalement bien une valeur régulière de f_N sur Ω, ce qui conclut la preuve. ■

L'intérêt principal du théorème de Borsuk est de donner des situations où le degré est non-nul (qui sont bien sûr les cas intéressants...); en particulier, un degré non-nul en un point impose que l'image de la fonction considérée contient en fait tout un voisinage du point (voir les points i) et iii) de la proposition 2.2.3 et la remarque 2.2.5). L'intérêt de ceci est par exemple illustré dans le corollaire suivant.

Corollaire 4.2.2 *Soit $N > p$ deux entiers et $f : S^{N-1} \to \mathbb{R}^p$ continue (S^{N-1} désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^N$). Alors il existe $x \in S^{N-1}$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Preuve du corollaire 4.2.2

Soit $g : \overline{B}(0,1) \to \mathbb{R}^p$ une extension continue et impaire de $x \in S^{N-1} \to f(x) - f(-x)$ (pour avoir une extension impaire de cette fonction impaire, il suffit de prendre une extension G quelconque — cf proposition 5.1.1 — et de considérer $g(x) = \frac{G(x)-G(-x)}{2}$). En identifiant $\mathbb{R}^p$ à $\mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^N$ (où $\{0\}$ représente $N-p$ coordonnées), on peut supposer que g est à valeurs dans $\mathbb{R}^N$.
Si $0 \notin g(S^{N-1})$ alors par imparité de g et le théorème de Borsuk on a $d(g, B(0,1), 0) \neq 0$; on en déduit, par les points i) et iii) de la proposition 2.2.3, que tout un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^N$ est dans l'image de g, ce qui est une absurdité puisque l'image de g est contenue dans $\mathbb{R}^p \times \{0\}$, qui ne peut contenir un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^N$. On a donc $0 \in g(S^{N-1})$, ce qui conclut la preuve du corollaire. ■

Mais le théorème de Borsuk a des applications moins anecdotiques que celles-ci. En particulier, il permet de voir, grâce à l'invariance du degré par homotopie, que toute application homotope à une application impaire a un degré non-nul, et contient donc une boule dans son image. Le théorème de l'injection ouverte se base sur ce raisonnement.

Théorème 4.2.3 (Injection ouverte) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f : U \to \mathbb{R}^N$ une application continue injective. Alors f est ouverte: pour tout ω ouvert inclus dans U, $f(\omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$.*

Preuve du théorème 4.2.3
Il suffit de montrer que, pour tout $a \in U$ et tout $r > 0$ tel que $\overline{B}(a,r) \subset U$, $f(B(a,r))$ contient une boule ouverte centrée en $f(a)$. Pour cela, et vu les points iii) et i) de la proposition 2.2.3, il suffit de montrer que $d(f, B(a,r), f(a)) \neq 0$.
Par translation (points ii) et v) de la proposition 2.2.3), on peut supposer $a = f(a) = 0$. Soit $h(t,x) = f(\frac{x}{1+t}) - f(\frac{-tx}{1+t})$, définie et continue sur $[0,1] \times \overline{B}(0,r)$; si $h(t,x) = 0$ alors par injectivité de f on a $\frac{x}{1+t} = \frac{-tx}{1+t}$, donc $x = 0$. Ainsi, $h(t,\cdot)$ n'a pas de zéro sur $\partial B(0,r)$ et l'invariance par homotopie du degré donne $d(f, B(0,r), 0) = d(h(1,\cdot), B(0,r), 0)$. Comme $h(1,x) = f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(-\frac{x}{2}\right)$ est impaire, le théorème de Borsuk affirme que $d(h(1,\cdot), B(0,r), 0)$ est impair, et donc en particulier non-nul, ce qui conclut la preuve. ■

En d'autres termes, une application injective doit "balayer" au moins autant de directions possibles à l'arrivée qu'il y en avait au départ. Ou encore: si l'espace d'arrivée est trop petit, l'application ne peut être injective...

Théorème 4.2.4 (Conservation de la dimension) *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$ et $p < N$. Alors il n'existe pas d'application continue injective $U \to \mathbb{R}^p$.*

Preuve du théorème 4.2.4
Supposons qu'une telle application $f : U \to \mathbb{R}^p$ existe. Puisque $p < N$, on peut voir $\mathbb{R}^p$ comme $\mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^N$ (le $\{0\}$ représentant $N-p$ coordonnées). On a alors une application continue injective $f : U \to \mathbb{R}^N$, qui n'est clairement pas ouverte puisque son image (non vide) est incluse dans un sous-espace strict de $\mathbb{R}^N$, et le théorème 4.2.3 donne la contradiction recherchée. ■

4.2.2 Vecteurs propres non-linéaires: théorème de Hedgehog

Une des applications classiques du théorème de point fixe de Brouwer est l'existence, pour toute matrice à coefficients positifs, d'une valeur propre positive associée à un vecteur propre ayant toutes ses composantes positives (théorème de Perron-Frobénius). Ce résultat peut être vu comme une conséquence du degré, puisque le degré permet de prouver le théorème de point fixe de Brouwer.
Le degré a une autre conséquence en termes de valeur propre, et une conséquence nettement plus surprenante puisqu'elle affirme que, du moment que la dimension de l'espace est impaire, toute fonction — même une fonction non-linéaire — a au moins une valeur propre (à noter que, pour les fonctions linéaires, ce résultat est trivial puisqu'en dimension impaire le polynôme caractéristique d'une application linéaire est de degré impair, et a donc un zéro sur $\mathbb{R}$).

Théorème 4.2.5 (Hedgehog) *Soit N impair, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ contenant 0 et $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^N$ continue. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \partial\Omega$ tel que $f(x) = \lambda x$.*

Remarque 4.2.6 *Ce théorème est peut-être plus surprenant si on en énonce la conséquence suivante: si N est impair et $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est continue, alors f possède un "vecteur propre" sur n'importe quelle sphère centrée en 0 (bien sûr, et contrairement à ce qui se passe dans le cas linéaire, les "vecteurs propres" sur différentes sphères ne sont pas forcément alignés, ni associés à la même "valeur propre").*

Remarque 4.2.7 *Bien sûr, en dimension paire, ce résultat est faux (il l'est déjà pour les applications linéaires: considérer le cas d'une rotation en dimension $N = 2$).*

Preuve du théorème 4.2.5
Constatons tout d'abord que si $0 \in f(\partial\Omega)$, alors le résultat est trivial avec $\lambda = 0$. On peut donc supposer que $0 \notin f(\partial\Omega)$. Soit $\widetilde{f}$ une extension continue de f à $\overline{\Omega}$ (voir la proposition 5.1.1); on a $0 \notin \widetilde{f}(\partial\Omega)$.
Supposons que $d(\widetilde{f}, \Omega, 0) \neq -1$. Comme on est en dimension impaire et que $0 \in \Omega$ est une valeur régulière de $-\mathrm{Id}$, on a $d(-\mathrm{Id}, \Omega, 0) = \det(-\mathrm{Id}) = -1$. Puisque $d(\widetilde{f}, \Omega, 0)$ et $d(-\mathrm{Id}, \Omega, 0)$ diffèrent, cela signifie que toute homotopie entre les deux fonctions f et $-\mathrm{Id}$ doit, à un moment donné, avoir un zéro sur $\partial\Omega$ (cf propriété d'invariance par homotopie du degré); ainsi, il existe $t \in [0, 1]$ et $x \in \partial\Omega$ tel que $t\widetilde{f}(x) + (1 - t)(-x) = 0$; il est alors clair que $t \neq 0$ (car $0 \notin \partial\Omega$), et on a donc $f(x) = \widetilde{f}(x) = \frac{1-t}{t}x$, ce qui conclut la preuve avec $\lambda = \frac{1-t}{t}$.
Si $d(\widetilde{f}, \Omega, 0) = -1$, alors comme $d(\mathrm{Id}, \Omega, 0) = 1$ on peut reprendre cet argument avec Id à la place de $-\mathrm{Id}$ et on trouve un $x \in \partial\Omega$ et un $t \in]0, 1]$ tel que $f(x) = -\frac{1-t}{t}x$. ■

Le résultat suivant, qui interdit de peigner de manière continue les sphères chevelues en dimension impaire, est une conséquence immédiate du théorème de Hedgehog.

Proposition 4.2.8 *Soit N un entier impair; on note S^{N-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^N$. Soit $f : S^{N-1} \to \mathbb{R}^N$ un champ continu de vecteurs tangeants à la sphère (i.e. $f(x) \cdot x = 0$ pour tout $x \in S^{N-1}$). Alors f a un zéro.*

Preuve de la proposition 4.2.8
f vérifie les hypothèses du théorème 4.2.5 avec $\Omega = B(0, 1)$. Soit alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \partial B(0, 1)$ tels que $f(x) = \lambda x$. Par tangeance de f, on a $0 = f(x) \cdot x = \lambda|x|^2 = \lambda$, donc $f(x) = \lambda x = 0$ et la proposition est prouvée. ■

4.2.3 Sous-variétés lipschitziennes

L'application que nous détaillons ici a en fait des conséquences plus géométriques que topologiques.

Proposition 4.2.9 *Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^N$ et $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ une application lipschitzienne injective. On note Ω_φ les points $x \in \Omega$ tels que φ soit dérivable en x et $\varphi'(x)$ soit inversible.*

i) Si $x \in \Omega_\varphi$ alors $d(\varphi, \Omega, \varphi(x)) = \mathrm{sgn}(J\varphi(x))$.

ii) $\mathrm{sgn}(J\varphi(\cdot))$ est constant sur Ω_φ.

Remarque 4.2.10 *La proposition 1.2.13 se déduit immédiatement de ce résultat.*

Preuve de la proposition 4.2.9
Constatons tout d'abord que le point ii) découle du point i). En effet, Ω étant connexe on sait que $\varphi(\Omega)$ est aussi connexe; comme φ est injective sur $\overline{\Omega}$, $\varphi(\Omega)$ est un connexe qui ne rencontre pas $\varphi(\partial\Omega)$, et est donc entièrement inclus dans une composante connexe de $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$. Par le point iv) de la proposition 2.2.3, $d(\varphi, \Omega, \cdot)$ est donc constant sur $\varphi(\Omega)$, et le point ii) de la proposition 4.2.9 découle donc bien du point i).

Prouvons donc le point i). Par translation (points ii) et v) de la proposition 2.2.3) on peut supposer $x = \varphi(x) = 0$. Comme φ est injective, la seule solution dans Ω de $\varphi(z) = 0$ est alors $z = 0$ et la propriété d'additivité du degré permet de voir que, pour tout ε assez petit,

$$d(\varphi, \Omega, 0) = d(\varphi, B(0, \varepsilon), 0). \tag{4.2.1}$$

Soit $h(t, z) = t\varphi(z) + (1 - t)\varphi'(0)z$ l'homotopie naturelle entre φ et sa différentielle en 0; nous allons montrer que, pour ε assez petit, $h(t, \cdot)$ n'a pas de zéro sur $\partial B(0, \varepsilon)$.
La dérivabilité de φ en 0 donne $\varphi(z) = \varphi'(0)z + |z|\omega(z)$ avec $\omega(z) \to 0$ lorsque $z \to 0$, donc $h(t, z) = \varphi'(0)z + t|z|\omega(z)$. Si $h(t, z) = 0$ alors $|\varphi'(0)z| \leq |z|\,|\omega(z)|$. Comme $\varphi'(0)$ est inversible, il existe $c > 0$ indépendant de z tel que $c|z| \leq |\varphi'(0)z|$, et on a donc $c \leq |\omega(z)|$ si $z \neq 0$; en prenant $\varepsilon > 0$ petit tel que $|\omega(z)| < c/2$ lorsque $|z| \leq \varepsilon$, on déduit de ceci que $h(t, \cdot) = 0$ ne peut avoir de solution sur $\partial B(0, \varepsilon)$ (et ce pour tout $t \in [0, 1]$) de sorte que l'invariance par homotopie du degré donne $d(\varphi, B(0, \varepsilon), 0) = d(\varphi'(0), B(0, \varepsilon), 0)$.
Comme 0 est une valeur régulière (ayant pour seul antécédent 0) de l'isomorphisme $\varphi'(0)$, la définition (2.4.1) du degré sur les applications et valeurs régulières donne $d(\varphi'(0), B(0, \varepsilon), 0) = \mathrm{sgn}(J\varphi(0))$ et (4.2.1) conclut donc la preuve. ■

Comme indiqué en introduction, ce lemme permet de prouver la formule de Stokes sur des ouverts peu réguliers, adaptés aux espaces de Sobolev (voir [8]). Mais, plus généralement, ce résultat permet aussi de définir une notion d'orientation et d'intégration de forme différentielle sur des sous-variétés lipschitziennes de $\mathbb{R}^N$.
Un fermé M de $\mathbb{R}^N$ est une sous-variété lipschitzienne de dimension n s'il existe des ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}^N$ recouvrant M et des homéomorphismes bi-lipschiztiens (lipschitziens ainsi que leur inverse) $f_i : U_i \to f(U_i)$ tels que $f_i(U_i \cap M) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ (le 0 représentant $N - n$ coordonnées). Dans cette situation, on définit une famille de paramétrisations $(V_i, \varphi_i)_{i\in I}$ de M de la manière suivante: $V_i = f_i(U_i) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$, identifié à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $\varphi_i : x \in V_i \to f_i^{-1}(x) \in U_i \cap M$. On constate que φ_i est un homéomorphisme bi-lipschitzien entre V_i et $U_i \cap M$. Quitte à découper les ouverts de cartes U_i en plusieurs morceaux, on peut supposer que chaque V_i est connexe, ce que l'on fera par la suite.
On dira qu'une telle famille de paramétrisations est orientée si, pour tous $(i, j) \in I^2$, $J(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i) \geq 0$ partout où cette quantité est définie ([3]). La variété M sera dite orientable si elle possède une famille de paramétrisations orientée ([4]).
Lorsqu'une variété est orientable, on constate que pour deux familles de paramétrisations orientées $(V_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(W_j, \psi_j)_{j\in J}$, il existe $\varepsilon = \pm 1$ tel que, pour tout $i \in I$ et tout $j \in J$, $\varepsilon J(\psi_j^{-1} \circ \varphi_i) \geq 0$ presque partout sur $\varphi_i^{-1}(\psi_j(W_j))$. Pour voir cela, fixons $j \in J$; quitte à découper chaque V_i en morceaux (ce qui ne fait qu'agrandir la famille de paramétrisations), on peut supposer que, pour tout $i \in I$, $\varphi_i(V_i) \cap \psi_j(W_j)$ est connexe. Prenons alors $(i, i') \in I^2$; les applications $\psi_j^{-1} \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(\psi_j(W_j)) \to W_j$ et $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_{i'} : \varphi_{i'}^{-1}(\varphi_i(V_i)) \to V_i$ sont des homéomorphismes bi-lipschitziens entre ouverts de $\mathbb{R}^n$, et on peut donc calculer, en presque tout point, la dérivée de leur composition en utilisant la règle de la chaine ([5]); on a ainsi $(\psi_j^{-1} \circ \varphi_{i'})' = (\psi_j^{-1} \circ \varphi_i)'_{|(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_{i'})} \circ (\varphi_i^{-1} \circ \varphi_{i'})'$ et, comme $J(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_{i'}) \geq 0$ puisque la première famille de paramétrisations est orientée, on en déduit que $J(\psi_j^{-1} \circ \varphi_{i'})$ a le même signe (au sens large) sur le petit ouvert $\mathcal{V}_{j,i,i'} = [\varphi_{i'}^{-1}(\varphi_i(V_i))] \cap [(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_{i'})^{-1}(\varphi_i^{-1}(\psi_j(W_j)))]$ (sur lequel les compositions précédentes sont valides) que $J(\psi_j^{-1} \circ \varphi_i)$ sur $(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_{i'})(\mathcal{V}_{j,i,i'})$. Mais par le lemme 4.2.9, ces déterminants

[3]Notons que $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ est définie sur $\varphi_i^{-1}(\varphi_j(V_j))$ et que c'est une application lipschitzienne entre ouverts de $\mathbb{R}^n$, de sorte qu'elle est dérivable presque partout sur $\varphi_i^{-1}(\varphi_j(V_j))$ au sens de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ (théorème de Rademacher).

[4]La définition de l'orientabilité via l'existence d'une n-forme différentielle continue ne s'annulant pas n'est pas adaptée ici, car le fibré des n-formes différentielles n'est pas une variété: si l'on tente de définir ses cartes locales à partir de celles de M, on se rend compte qu'elles ne sont que L^∞, puisqu'elles font intervenir les dérivées des cartes de M.

[5]C'est le théorème de changement de variables lipschitzien qui permet de faire cela, car il affirme entre autres qu'un homéomorphisme bi-lipschitzien envoie un ensemble de mesure nulle sur un ensemble de mesure nulle (ceci peut aussi se prouver directement à la main).

jacobiens $J(\psi_j^{-1} \circ \varphi_{i'})$ et $J(\psi_j^{-1} \circ \varphi_i)$ ne changent pas de signe sur leurs domaines de définition respectifs $\varphi_{i'}^{-1}(\psi_j(W_j))$ et $\varphi_i^{-1}(\psi_j(W_j))$ qui sont connexes (en effet, $\varphi_i(V_i) \cap \psi_j(W_j)$ est connexe par choix précédent et inclus dans le domaine de définition de φ_i^{-1}, de sorte que $\varphi_i^{-1}(\varphi_i(V_i) \cap \psi_j(W_j)) = \varphi_i^{-1}(\psi_j(W_j))$ est aussi connexe ([6])), ce qui montre qu'ils ont le même signe sur tout leur domaine de définition, pourvu que le petit ouvert $\mathcal{V}_{j,i,i'} = [\varphi_{i'}^{-1}(\varphi_i(V_i))] \cap [\varphi_{i'}^{-1}(\psi_j(W_j))]$ soit non vide. Nous souhaitons cependant que les signes soient identiques pour tous i et i' ([7]), pas uniquement pour les i et i' tels que $\mathcal{V}_{j,i,i'} \neq \emptyset$; pour cela, on va créer une chaîne de tels ouverts non-vides en raisonnant sur la variété elle-même et en regardant donc les ouverts de M suivants: $\varphi_k(\mathcal{V}_{j,l,k}) = \varphi_k(V_k) \cap \varphi_l(V_l) \cap \psi_j(W_j)$; en notant I_j l'ensemble des indices $k \in I$ tels que $\varphi_k(V_k) \cap \psi_j(W_j) \neq \emptyset$, les ouverts $(\varphi_k(V_k) \cap \psi_j(W_j))_{k \in I_j}$ sont tous non-vides et recouvrent l'ouvert connexe $\psi_j(W_j)$; c'est alors un simple exercice de topologie de voir que, pour tous $(i,i') \in I_j^2$, il existe une chaîne d'ouverts $(\varphi_{k_l}(V_{k_l}) \cap \psi_j(W_j))_l$ qui va de $\varphi_i(V_i) \cap \psi_j(W_j)$ à $\varphi_{i'}(V_{i'}) \cap \psi_j(W_j)$ et dont l'intersection entre deux maillons successifs est non-vide ([8]); ainsi, entre deux maillons successifs de la chaine on sait que $J(\psi_j^{-1} \circ \varphi_{k_l})$ et $J(\psi_j^{-1} \circ \varphi_{k_{l+1}})$ ont même signe sur leurs ensembles de définition respectifs, ce qui conclut la preuve que $J(\psi_j^{-1} \circ \varphi_i)$ et $J(\psi_j \circ \varphi_{i'})$ ont même signe. En faisant le même raisonnement sur les $(\psi_j)_{j \in J}$, on prouve que, pour tout $i \in I$ et tout $(j,j') \in J^2$, $J(\psi_j^{-1} \circ \varphi_i)$ et $J(\psi_{j'}^{-1} \circ \varphi_i)$ ont même signe, ce qui montre bien que tous les $(J(\psi_j^{-1} \circ \varphi_i))_{i \in I,\, j \in J}$ ont même signe.
Ainsi, lorsque M est orientable, les familles de paramétrisations orientées de M se partagent en deux classes uniquement, selon le signe du déterminant jacobien des compositions de leurs applications. Choisir une orientation de M, c'est choisir l'une de ces deux classes.
A partir de là, la définition de l'intégration d'une n-forme différentielle de la sous-variété lipschitzienne orientée M est à peu près claire, du moment que l'on admet qu'il est possible de définir un espace tangeant à M en de "nombreux" points de M ([9]). On peut alors définir une n-forme différentielle comme étant une application qui à de "nombreux" points $m \in M$ fait correspondre une n-forme alternée sur l'espace tangeant à M en m (sans hypothèse de régularité par rapport à m); on dit qu'elle est intégrable (et on en calcule l'intégrale) en regardant son tiré-en-arrière par les paramétrisations locales d'une famille de paramétrisations orientée compatible avec l'orientation de M, et le raisonnement précédent sur l'orientation de M permet (à l'aide du théorème de changement de variables lipschitzien dans $\mathbb{R}^n$, voir [8]) de voir que la définition en question ne dépend pas du choix d'une famille de paramétrisations orientée compatible avec l'orientation de M (et prendre une famille de paramétrisations ayant l'orientation opposée ne fait que changer le signe de l'intégrale).

4.3 EDO et EDP

Jusqu'à présent, nous n'avons exhibé que des applications du degré de Brouwer. Il est temps de parler un peu de la dimension infinie et du degré de Leray-Schauder.

4.3.1 Théorème de Cauchy-Peano en dimension infinie

Nous considérons ici l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \qquad t \in I\,, \\ x(0) = a. \end{cases} \tag{4.3.1}$$

[6] La notation est un peu subtile ici: le premier "$\varphi_i^{-1}(\cdots)$" est une image directe par l'application φ_i^{-1}, tandis que le second est une image réciproque d'un ensemble par φ_i.

[7] Ou du moins tous ceux tels que les compositions $\psi_j^{-1} \circ \varphi_i$ et $\psi_j^{-1} \circ \varphi_{i'}$ ne soient pas définies sur un ensemble vide, ce qui consiste à demander que $\varphi_i(V_i)$ et $\varphi_{i'}(V_{i'})$ intersectent $\psi_j(W_j)$.

[8] Si une telle chaîne n'existait pas, on pourrait couper $\psi_j(W_j)$ en deux ouverts disjoints non-vides en regardant tous les ouverts reliables par chaine à $\varphi_i(V_i) \cap \psi_j(W_j)$ et tous les ouverts reliables par chaine à $\varphi_{i'}(V_{i'}) \cap \psi_j(W_j)$.

[9] Cela vient du fait que, si on prend une paramétrisation locale (V_i, φ_i), comme φ_i^{-1} est lipschitzienne on peut montrer qu'il existe $c > 0$ tel que, en presque tout point x de V_i et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\varphi_i'(x)\xi| \geq c|\xi|$, de sorte que $\varphi_i'(x)$ est injective et $\mathrm{Im}(\varphi_i'(x))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension n, qui définit l'espace tangeant à M en $\varphi_i(x)$; voir [8] dans le cas des hypersurfaces.

Le champ f et la condition initiale a sont donnés, mais d'une part on ne suppose pas que f est lipschitzienne par rapport à x (ce qui empêche d'appliquer le théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz), et d'autre part l'espace dans lequel évolue x n'est pas forcément de dimension finie (de sorte que le théorème de Cauchy-Peano usuel ne s'applique pas non plus).
Dans cette situation, comme vu en section 1.2.9, la simple continuité de f ne suffit pas à s'assurer l'existence d'une solution locale à (4.3.1). Pour établir Cauchy-Peano en dimension infinie, il faut donc ajouter une hypothèse sur f.

Théorème 4.3.1 *Soit E un espace de Banach et $f : \mathbb{R} \times E \to E$ compacte (cf définition 3.2.1). Alors, pour tout $a \in E$, il existe $T > 0$ tel que (4.3.1) a au moins une solution sur $I = [-T, T]$.*

Preuve du théorème 4.3.1
Comme d'habitude, on adopte la formulation intégrale du problème (4.3.1): on cherche $T > 0$ et $x \in C([-T, T]; E)$ qui vérifie, pour tout $t \in [-T, T]$,

$$x(t) = a + \int_0^t f(s, x(s))\, ds. \tag{4.3.2}$$

Il est à noter que l'intégrale apparaissant ici est à valeurs dans un Banach, mais comme les fonctions considérées sont continues il n'y a pas de véritable difficulté à définir et manipuler ce genre d'intégrale (comme dans la preuve classique du théorème de Cauchy-Lipschitz en dimension infinie).
Soit $\Phi_T : C([-T, T]; E) \to C([-T, T]; E)$ définie par: pour $x \in C([-T, T]; E)$, $\Phi_T(x)$ est le second membre de (4.3.2) (il est aisé de vérifier que cette expression définit bien une fonction de $C([-T, T]; E)$). Pour prouver le théorème, il suffit de montrer qu'il existe $T > 0$ tel que Φ_T a un point fixe... on sent venir le théorème de Schauder.

Remarquons tout d'abord que Φ_T est continue. En effet, si $x_n \to x$ dans $C([-T, T]; E)$, alors $\{x_n(t)\,;\ n \geq 1\,,\ t \in [-T, T]\}$ est borné, disons par M, et la fonction compacte f envoie $[-T, T] \times \overline{B}(0, M)$ sur un ensemble borné de E. On a par ailleurs

$$\sup_{t \in [-T,T]} ||\Phi_T(x_n)(t) - \Phi_T(x)(t)|| \leq \int_{-T}^{T} ||f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))||\, ds.$$

Par continuité de f, $||f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))|| \to 0$ lorsque $n \to \infty$, et on a vu que cette quantité reste uniformément bornée. Le théorème de convergence dominée permet donc de voir que $\Phi_T(x_n) \to \Phi_T(x)$ dans $C([-T, T]; E)$.

Il faut ensuite prouver que Φ_T envoie les bornés de $C([-T; T]; E)$ sur des ensembles relativement compacts dans cet espace. On va pour cela appliquer le théorème d'Ascoli-Arzela. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite bornée dans $C([-T, T]; E)$. On a

$$||\Phi_T(x_n)(t) - \Phi_T(x_n)(t')|| \leq \left| \int_{t'}^{t} ||f(s, x_n(s))||\, ds \right|$$

et, par le raisonnement précédent, $Y = \{f(s, x_n(s))\,;\ n \geq 1\,,\ s \in [-T, T]\}$ est borné, disons par K, ce qui montre que $||\Phi_T(x_n)(t) - \Phi_T(x_n)(t')|| \leq K|t - t'|$ et donne donc l'équicontinuité de $\{\Phi_T(x_n)\,;\ n \geq 1\}$. Par ailleurs, la compacité de f montre en fait que Y est relativement compact dans E; cela permet de voir que l'enveloppe convexe $\mathrm{co}(Y)$ de Y est aussi relativement compact dans E ([10]). Comme $f(s, x_n(s)) \in Y$ pour tout $n \geq 1$ et tout $s \in [-T, T]$, il est assez aisé de montrer que $\frac{1}{t} \int_0^t f(s, x_n(s))\, ds \in \overline{\mathrm{co}(Y)}$ (raisonner sur

[10] On montre que $\mathrm{co}(Y)$ est précompact de la manière suivante: pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, on recouvre Y par un nombre fini de boules $(B(y_i, \varepsilon))_{i \in [1,k]}$; on a alors $\mathrm{co}(Y) \subset \mathrm{co}\{y_1, \ldots, y_k\} + B(0, \varepsilon)$, et $\mathrm{co}\{y_1, \ldots, y_k\}$, qui est borné et de dimension finie, est compact et peut donc lui aussi se recouvrir par un nombre fini de boules de rayon ε, ce qui recouvre $\mathrm{co}(Y)$ par un nombre fini de boules de rayon 2ε.

des suites de Riemann qui approchent l'intégrale, et $\frac{1}{t}\int_0^t f(s,x_n(s))\,ds$ apparaitra comme une moyenne de points de Y). Ainsi, $\int_0^t f(s,x_n(s))\,ds \in t\,\overline{\mathrm{co}(Y)}$ qui est compact. Cela montre donc que $(\Phi_T(x_n)(t))_{n\geq 1}$ reste dans un compact de E, et conclut la vérification des hypothèses du théorème d'Ascoli-Arzela. Φ_T envoie donc bien les bornés de $C([-T,T];E)$ sur des ensembles relativement compacts.

Le théorème 4.3.1 découlera du théorème de point fixe de Schauder si l'on arrive à exhiber un $T>0$ et un $R>0$ tel que Φ_T envoie $\overline{B}(0,R)$ dans elle-même. Prenons $R=||a||+1$ et M un majorant de f sur $[-1,1]\times\overline{B}(0,R)$ (un tel majorant existe puisque f envoie cet ensemble sur un ensemble relativement compact). On a alors, si $T\leq 1$ et $x\in C([-T,T];E)$ est bornée par R,

$$\sup_{t\in[-T,T]}||\Phi_T(x)(t)||\leq ||a||+\int_{-T}^{T}||f(s,x(s))||\,ds\leq ||a||+2TM$$

et il suffit donc que $T<\inf(1,1/2M)$ pour que $\Phi_T(x)$ reste borné par R sur $[-T,T]$. Ce choix de T conclut donc la preuve du théorème. ■

On peut ensuite se demander si (4.3.1) a une solution globale (sur un intervalle de définition donné *a priori*). Une technique classique consiste à trouver des estimations sur les solutions locales de ce problème pour tenter de les prolonger (éventuellement à l'aide du lemme de Zorn). Nous présentons ici un résultat qui, s'il ressemble à cette idée, en est cependant un peu éloigné: l'existence d'une solution globale ne découle pas d'estimations obtenues sur les solutions locales, mais d'estimations obtenues sur des solutions globales *potentielles*, sans se poser la question de leur existence.

Théorème 4.3.2 *Soit E un espace de Banach, I un intervalle compact de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f:I\times E\to E$ compacte. Soit $a\in E$. Supposons qu'il existe $M>0$ tel que, pour tout $\lambda\in[0,1]$, toute solution potentielle de*

$$\begin{cases} x'(t)=\lambda f(t,x(t)) & t\in I\,,\\ x(0)=a \end{cases} \tag{4.3.3}$$

reste bornée par M. Alors (4.3.1) admet au moins une solution sur I.

Remarque 4.3.3 *Notons que tous les problèmes que l'on considère dans (4.3.3) (pour λ variant entre 0 et 1) font intervenir les valeurs de $f(\cdot,x)$ sur I en entier. (4.3.3) n'est donc pas un simple changement d'echelle sur (4.3.1), et ce ne sont pas des solutions locales de ce dernier problème qui doivent être estimées dans les hypothèses du théorème 4.3.2, mais bien des solutions globales (ce qui réduit potentiellement leur nombre, et peut donc rendre leur estimation plus facile).*

Preuve du théorème 4.3.2
Ici aussi, on utilise la formulation intégrale de (4.3.1). Soit $\Phi: C(I;E)\to C(I;E)$ définie par:

$$\Phi(x)(t)=a+\int_0^t f(s,x(s))\,ds.$$

Une solution de (4.3.1) est un point fixe de Φ. Contrairement à la preuve du théorème 4.3.1, nous allons cette fois utiliser le degré topologique de Leray-Schauder pour prouver l'existence de ce point fixe.
Comme dans la preuve du théorème 4.3.1, on constate que Φ est compacte sur $C(I;E)$. L'existence d'un point fixe pour Φ sera assuré par le point i) de la proposition 3.2.6 pourvu que l'on prouve qu'il existe $R>0$ tel que $d(\mathrm{Id}-\Phi,B(0,R),0)\neq 0$. Nous allons pour cela faire une homotopie entre $\mathrm{Id}-\Phi$ et $\mathrm{Id}-a$: soit $h(\lambda,x)(t)=a+\lambda\int_0^t f(s,x(s))\,ds$ (on note λ le paramètre d'homotopie car la variable t est ici réservée). Si $x-h(\lambda,x)=0$ alors x est une solution de (4.3.3), et les hypothèses impliquent que x est bornée par M; en prenant $R>M$, on est donc assuré que $\mathrm{Id}-h(\lambda,\cdot)=0$ n'a jamais de solution sur $\partial B(0,R)$. Comme $h:[0,1]\times C(I;E)\to C(I;E)$ est par ailleurs compacte (même preuve que pour Φ), l'invariance par homotopie du degré montre que $d(\mathrm{Id}-\Phi,B(0,R),0)=d(\mathrm{Id}-a,B(0,R),0)$. Si l'on choisit en plus $R>||a||$, l'invariance par translation du degré associée à sa normalisation donne

$d(\mathrm{Id} - a, B(0,R), 0) = d(\mathrm{Id}, B(0,R), a) = 1$. On déduit de ceci que $d(\mathrm{Id} - \Phi, B(0,R), 0) \neq 0$, ce qui conclut la preuve. ■

Nous atteignons ici le principe même de nombreuses applications du degré topologique: *si l'on sait estimer* a priori *les solutions d'un problème, alors on est bien parti pour montrer l'existence d'une solution à ce problème.* Cette petite maxime ne surprendra aucun lecteur ayant de bonnes bases en analyse mathématique; une des forces du degré topologique est de transformer cette maxime en quelque chose de directement efficace: une fois les estimations effectuées (ce qui peut être en soi très difficile), il suffit de récupérer un peu de compacité pour conclure (cela peut paraître compliqué, mais c'est souvent plus simple — tout simplement parce que les estimations établies contiennent souvent un peu de compacité en elles-mêmes, comme nous le verrons en section 4.3.3 ([11])).

Par ailleurs, on a pu voir dans la preuve du théorème 4.3.2 que la vérification de l'hypothèse "$0 \notin (\mathrm{Id} - h(\lambda, .))(\partial\Omega)$" s'est faite de la manière suivante: on a pris une solution quelconque de $x - h(\lambda, x) = 0$ et on a utilisé le fait que l'on avait une estimation sur cette solution, ce qui a permis de trouver *a posteriori* un Ω tel que $0 \notin (I - h(\lambda, .))(\partial\Omega)$. C'est souvent comme cela que l'on vérifie cette hypothèse nécessaire à l'invariance par homotopie du degré: on prend une solution du problème homotopique et on cherche à l'estimer, ce qui nous vend un ouvert Ω sur lequel l'homotopie est réalisable.

Pour conclure cette partie, nous pouvons aussi profiter des preuves des deux théorèmes précédents pour noter une différence cruciale entre les utilisations du point fixe de Schauder et du degré topologique: lorsque l'on souhaite utiliser le point fixe de Schauder, il faut montrer qu'une boule est stable par la fonction considérée, c'est à dire prendre un point quelconque au départ et borner l'image de ce point; cela demande donc à estimer *toutes les valeurs de la fonction.* A l'inverse, si l'on souhaite utiliser le degré topologique, il faut prendre une solution au problème (sans se poser la question de son existence, d'ailleurs) et tenter de borner *uniquement cette solution*; dans cette situation, on a donc bien plus de renseignements sur l'objet à estimer: il ne s'agit pas simplement d'une valeur de la fonction, mais d'une solution au problème. Et c'est la logique la plus naturelle de se dire que, plus on a des renseignements sur ce que l'on souhaite estimer, plus ladite estimation sera aisée et réalisable sous des hypothèses plus générales.

4.3.2 Solutions bouclantes d'EDO

La fonction $f : [0,1] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ étant donnée, on s'intéresse ici au problème de l'existence d'une solution x à

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \qquad t \in [0,1]\,, \\ x(1) = x(0). \end{cases} \tag{4.3.4}$$

L'envie sous-jacente est bien sûr de prouver l'existence de solutions périodiques d'EDO, et lorsque $f(0,\cdot) = f(1,\cdot)$ une solution de (4.3.4) se prolonge effectivement en une solution 1-périodique sur $\mathbb{R}$ (f ayant été elle-même prolongée par périodicité en t).

Théorème 4.3.4 *On suppose que $f : [0,1] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ est continue et que les deux hypothèses suivantes sont satisfaites:*

i) Il existe $V : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant

$$V(x) \to +\infty \quad \text{lorsque } |x| \to \infty\,,$$

et

$$\exists A \geq 0 \ \text{ tel que } \ \nabla V(x) \cdot f(t,x) \leq A \quad \text{pour tout } t \in [0,1] \text{ et tout } x \in \mathbb{R}^p. \tag{4.3.5}$$

[11]Le lecteur averti, et peut-être un peu cynique, pourra aussi remarquer que l'obtention de la compacité en question est souvent plus simple que celle des estimations *a priori* pour la simple raison que, contrairement à ces dernières, la compacité ne vient presque jamais "par miracle": il a fallu l'introduire plus ou moins clairement à un moment donné dans les hypothèses du problème... de sorte qu'elle est alors évidemment plus simple à prouver!

ii) Il existe $r > 0$ et $W : \mathbb{R}^p \backslash B(0,r) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant

$$\nabla V(x) \cdot \nabla W(x) > 0 \qquad \textit{pour tout } |x| \geq r\,,$$

et

$$\int_0^1 \nabla W(x(t)) \cdot f(t, x(t))\,dt \leq 0 \qquad \textit{pour tout } x : [0,1] \to \mathbb{R}^p \backslash B(0,r) \textit{ de classe } C^1. \tag{4.3.6}$$

Alors (4.3.4) a au moins une solution.

Preuve du théorème 4.3.4
Soit $E = C([0,1]; \mathbb{R}^p) \times \mathbb{R}^p$, muni de la norme $||(x,a)|| = \max(||x||_\infty, |a|)$, et $\Phi : E \to E$ définie par $\phi(x,a) = (y, y(1))$ où

$$\forall t \in [0,1]\,, \quad y(t) = a + \int_0^t f(s, x(s))\,ds.$$

Le problème (4.3.4) est équivalent à trouver $(x,a) \in E$ tel que $\Phi(x,a) = (x,a)$, c'est à dire un point fixe de Φ. On constate sans difficulté que Φ est compacte sur E: la continuité est évidente à partir de la continuité uniforme de f sur les bornés de $[0,1] \times \mathbb{R}^p$, et la compacité découle assez simplement du théorème d'Ascoli-Arzela (si $((x_n, a_n))_{n \geq 1}$ est bornée dans E, alors la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ correspondante est ponctuellement bornée et ses dérivées $y_n' = f(\cdot, x_n(\cdot))$ sont uniformément bornées).
Nous allons montrer que Φ a un point fixe en raisonnant par l'absurde: on va supposer que Φ n'a pas de point fixe, et on va montrer que pour R assez grand on a $d(\mathrm{Id} - \Phi, B(0,R), 0) \neq 0$, ce qui concluera la preuve.

Etape 1: Réduction à un champ gradient.
Commençons par réaliser une homotopie entre (4.3.4) et le problème

$$\begin{cases} x'(t) = -\nabla V(x(t)) & t \in [0,1]\,, \\ x(0) = x(1). \end{cases} \tag{4.3.7}$$

Pour cela, nous définissons $\Psi : E \to E$ par $\Psi(x,a) = (z, z(1))$ où

$$\forall t \in [0,1]\,, \quad z(t) = a + \int_0^t -\nabla V(x(s))\,ds \tag{4.3.8}$$

(on vérifie comme pour Φ que Ψ est compacte sur E) et nous considérons $H : [0,1] \times E \to E$ définie par $H(\lambda, (x,a)) = \lambda \Phi(x,a) + (1-\lambda)\Psi(x,a)$ (H est une application compacte). Nous souhaitons montrer que les solutions $(x,a) \in E$ de $(x,a) - H(\lambda, (x,a)) = 0$ sont bornées *a priori*, à partir de quoi l'invariance par homotopie du degré de Leray-Schauder permettra de voir que, pour R assez grand, $d(\mathrm{Id} - \Phi, B(0,R), 0) = d(\mathrm{Id} - \Psi, B(0,R), 0)$.
Supposons donc que ces solutions ne sont pas bornées: il existe alors $(\lambda_n)_{n \geq 1} \in [0,1]$ et $(x_n, a_n)_{n \geq 1} \in E$ tels que $||(x_n, a_n)|| \geq n$ et $(x_n, a_n) - H(\lambda_n, (x_n, a_n)) = 0$. On a

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \lambda_n \left(a_n + \int_0^t f(s, x_n(s))\,ds \right) + (1-\lambda_n) \left(a_n + \int_0^t -\nabla V(x_n(s))\,ds \right)\,, \\ a_n &= \lambda_n \left(a_n + \int_0^1 f(s, x_n(s))\,ds \right) + (1-\lambda_n) \left(a_n + \int_0^1 -\nabla V(x_n(s))\,ds \right) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} & x_n'(t) = \lambda_n f(t, x_n(t)) - (1-\lambda_n) \nabla V(x_n(t))\,, \\ & x_n(0) = a_n = x_n(1). \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Au passage, on en déduit que $||(x_n, a_n)|| = ||x_n||_\infty$, et que l'on a donc

$$||x_n||_\infty \geq n. \tag{4.3.10}$$

L'hypothèse i) permet d'écrire, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}(V(x_n))'(t) &= \nabla V(x_n(t)) \cdot x_n'(t) \\ &= -(1-\lambda_n)|\nabla V(x_n(t))|^2 + \lambda_n \nabla V(x_n(t)) \cdot f(t, x_n(t)) \\ &\leq \lambda_n A \\ &\leq A\end{aligned}$$

et donc, en étendant x_n par 1 périodicité (de sorte que $V(x_n(t))' \leq A$ est vérifiée partout, sauf peut-être en $t \in \mathbb{Z}$ — mais comme x_n est continue, cela ne gêne pas l'estimation qui suit), on obtient $V(x_n(t)) \leq V(x_n(\tau)) + A$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [\tau, \tau+1]$. Par 1-périodicité de x_n, cela montre que

$$\max_{[0,1]} V(x_n) \leq \min_{[0,1]} V(x_n) + A.$$

En prenant $t_n \in [0,1]$ tel que $|x_n(t_n)| = \max_{[0,1]} |x_n| \geq n$ (voir (4.3.10)), l'hypothèse i) montre que $V(x_n(t_n)) \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$ et donc

$$\min_{[0,1]} V(x_n) \geq \max_{[0,1]} V(x_n) - A \geq V(x_n(t_n)) - A \to +\infty \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Comme V est bornée sur les compacts, ceci implique $\min_{[0,1]} |x_n| \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Prenons donc n assez grand pour que $|x_n(t)| \geq r$ pour tout $t \in [0,1]$ (r étant donné par l'hypothèse ii)). En utilisant à nouveau (4.3.9), et puisque x_n est à valeurs dans $\mathbb{R}^p \backslash B(0,r)$, on peut écrire

$$(W(x_n(t))' = \nabla W(x_n(t)) \cdot x_n'(t) = -(1-\lambda_n) \nabla W(x_n(t)) \cdot \nabla V(x_n(t)) + \lambda_n \nabla W(x_n(t)) \cdot f(t, x_n(t))$$

et la deuxième équation de (4.3.9) donne donc

$$\begin{aligned}0 &= W(x_n(1)) - W(x_n(0)) \\ &= -(1-\lambda_n) \int_0^1 \nabla W(x_n(t)) \cdot \nabla V(x_n(t)) + \lambda_n \int_0^1 \nabla W(x_n(t)) \cdot f(t, x_n(t)) \\ &\leq -(1-\lambda_n) \int_0^1 \nabla W(x_n(t)) \cdot \nabla V(x_n(t))\end{aligned}$$

ce qui impose, vu l'hypothèse ii), que $\lambda_n = 1$. Cela signifie que (x_n, a_n) est un point fixe de Φ, ce que nous avons exclu dès le début.
On en déduit donc que les solutions de $(x,a) - H(\lambda, (x,a)) = 0$ sont bornées *a priori* et que donc, pour R assez grand, $d(\mathrm{Id} - \Phi, B(0,R), 0) = d(\mathrm{Id} - \Psi, B(0,R), 0)$.

Etape 2: réduction à un problème de dimension finie.
Nous réalisons maintenant une homotopie entre (4.3.7) et

$$\begin{cases} x'(t) = \displaystyle\int_0^1 -\nabla V(x(s))\, ds & t \in [0,1]\,, \\ x(0) = x(1) \end{cases} \tag{4.3.11}$$

(les solutions de ce problème ont une dérivée constante, et sont donc elles-mêmes constantes, mais nous y reviendrons). On pose $\Xi : E \to E$ comme étant $\Xi(x,a) = (w, w(1))$ où

$$w(t) = a + tQ[x] \quad \text{avec} \quad Q[x] = \int_0^1 -\nabla V(x(s))\, ds.$$

Notons que Ξ est bien compacte puisqu'elle est de rang fini et envoie les bornés sur des bornés. On souhaite voir que, pour R assez grand, $(x,a) = \lambda \Psi(x,a) + (1-\lambda)\Xi(x,a)$ n'a pas de solution sur $\partial B(0,R)$, et ce quel que soit $\lambda \in [0,1]$. Supposons donc qu'une telle solution existe; on a alors

$$x'(t) = -\lambda \nabla V(x(t)) + (1-\lambda) Q[x] \quad \text{et} \quad x(0) = x(1) = a.$$

En multipliant scalairement la première relation par x' et en intégrant sur $[0,1]$, la périodicité de x donne $\int_0^1 |x'(t)|^2\,dt = 0$, donc x est constant égal à a ([12]) et en revenant dans cette première relation on trouve

$$0 = -\lambda\nabla V(a) - (1-\lambda)\nabla V(a) = -\nabla V(a).$$

Or l'hypothèse ii) impose que ∇V ne peut avoir de zéro hors de $B(0,r)$, ce qui implique $||x||_\infty = |a| \leq r$ et donne l'estimation recherchée.
Pour $R > r$ on a donc $d(\mathrm{Id}-\Psi, B(0,R), 0) = d(\mathrm{Id}-\Xi, B(0,R), 0)$. Cependant, Ξ est de rang fini: son image est effectivement inclue dans $F \times \mathbb{R}^p$ où F est l'espace des fonctions affines sur $[0,1]$. En notant $\xi : F \times \mathbb{R}^p \to F \times \mathbb{R}^p$ la restriction de Ξ à cet espace de dimension finie, la définition du degré de Leray-Schauder nous donne donc $d(\mathrm{Id}-\Psi, B(0,R), 0) = d_{F\times\mathbb{R}^p}(\mathrm{Id}-\xi, B(0,R), 0)$, où $d_{F\times\mathbb{R}^p}$ désigne le degré de Brouwer sur l'espace $F \times \mathbb{R}^p$.

Etape 3: on réduit encore un peu l'espace.
Si une solution de $(x,a) - \xi(x,a) = 0$ existe, alors $x'(t) = Q[x]$ est constant et $x(0) = x(1) = a$, donc x doit être en fait constant. On doit alors pouvoir se ramener à un problème sur des fonctions constantes, ce que nous allons faire ici.
On a $\xi(x,a) = (t \to a + tQ[x], a + Q[x])$. Soit $\zeta : (x,a) \to (a, a+Q[x])$ et $h(\lambda,(x,a)) = \lambda\xi(x,a) + (1-\lambda)\zeta(a,x)$ l'homotopie naturelle entre ξ et ζ, et supposons que l'on a une solution de $(x,a) - h(\lambda,(x,a)) = 0$. Alors

$$x(t) = \lambda(a + tQ[x]) + (1-\lambda)a = a + \lambda t Q[x] \quad \text{et} \quad a = a + Q[x].$$

On déduit de la dernière équation que $Q[x] = 0$, et la première équation impose donc que x soit constant égal à a. Dans ce cas, $Q[x] = -\nabla V(a)$ et, comme précédemment, l'hypothèse ii) donne alors $||x||_\infty = |a| \leq r$. On a donc, pour $R > r$, $d_{F\times\mathbb{R}^p}(\mathrm{Id}-\xi, B(0,R), 0) = d_{F\times\mathbb{R}^p}(\mathrm{Id}-\zeta, B(0,R), 0)$.
Mais la première composante de ζ est à valeurs dans l'espace des fonctions constantes, identifié à $\mathbb{R}^p$. On déduit donc de la proposition 3.3.1 que $d_{F\times\mathbb{R}^p}(\mathrm{Id}-\xi, B(0,R), 0) = d_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p}(\mathrm{Id}-\zeta, B(0,R), 0)$.

Etape 4: conclusion.
Nous souhaitons donc estimer le degré sur une boule $B(0,R)$ de la fonction $\mathrm{Id}-\zeta : (x,a) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to (x-a, -Q[x]) = (x-a, \nabla V(x))$. Pour cela, on revient à la définition du degré de Brouwer. Soit $\widetilde{V}$ une fonction régulière proche de V, au sens C^1 sur $\overline{B}(0,R)$, et $(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ une valeur régulière proche de 0 de $\omega : (x,a) \to (x-a, \nabla\widetilde{V}(x))$ (fonction proche de $\mathrm{Id}-\zeta$). En notant $(x_i,a_i)_{i\in[1,k]}$ les antécédents de (y_1,y_2) par ω, les propriétés du déterminant permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p}(\mathrm{Id}-\zeta, B(0,R), 0) &= \sum_{i=1}^k \mathrm{sgn}(J\omega(x_i,a_i)) \\
&= \sum_{i=1}^k \mathrm{sgn}\left(\begin{vmatrix} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p} & -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p} \\ (\nabla\widetilde{V})'(x_i) & 0 \end{vmatrix}\right) \\
&= \sum_{i=1}^k \mathrm{sgn}\left((-1)^p \begin{vmatrix} -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p} & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p} \\ 0 & (\nabla\widetilde{V})'(x_i) \end{vmatrix}\right) \\
&= \sum_{i=1}^k \mathrm{sgn}(J(\nabla\widetilde{V})(x_i)) \\
&= d_{\mathbb{R}^p}(\nabla V, B(0,R), 0)
\end{aligned}$$

(car les x_i sont les antécédents par $\nabla\widetilde{V}$ de sa valeur régulière y_2, et $\nabla\widetilde{V}$ et y_2 ont été choisis proches de ∇V et 0 respectivement). Or la proposition 5.4.1 en annexes et les hypothèses sur V contenues dans le théorème permettent de voir que $d_{\mathbb{R}^p}(\nabla V, B(0,R), 0) = 1$ lorsque R est assez grand.

[12] Les solutions de (4.3.7) sont en fait elles aussi constantes, mais comme Ψ n'est pas de rang fini nous sommes obligés de passer par Ξ pour réduire ce problème à une situation de dimension finie.

Ainsi, pour R assez grand, $d_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p}(\mathrm{Id}-\zeta, B(0,R),0)=1$ et les étapes précédentes permettent donc de voir que $d(\mathrm{Id}-\Phi, B(0,R),0)=1$, ce qui conclut la preuve. ■

A l'aide de ce résultat, on peut établir une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution à (4.3.4), dans le cas scalaire et lorsque f est monotone en x.

Théorème 4.3.5 *Soit $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue, décroissante en x. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution à (4.3.4) est qu'il existe $y:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(t,y(t))\,dt=0$.*

Remarque 4.3.6 *Le même résultat est valable avec f croissante en x, puisqu'il suffit alors de faire un changement des temps $t\to 1-t$ dans (4.3.4) pour changer le sens de variation de f. En utilisant ce même renversement des temps, on pourrait aussi citer un théorème 4.3.4 avec les inégalités (4.3.5) et (4.3.6) inversées.*

Remarque 4.3.7 *Le théorème 1.2.16 présenté en introduction est un cas particulier évident du théorème 4.3.5 et de la remarque 4.3.6.*

Preuve du théorème 4.3.5
Le sens “condition nécessaire” est immédiat, car il suffit de prendre pour y une solution de (4.3.4), d'intégrer $y'(t)=f(t,y(t))$ sur $[0,1]$ et d'utiliser $y(0)=y(1)$.

Prouvons maintenant le sens “condition suffisante”. Comme f est décroissante en x, on a $xf(t,x)\le xf(t,0)\le A(|x|+1)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $t\in[0,1]$, avec $A=\max_{t\in[0,1]}|f(t,0)|$. En posant

$$V(x)=\int_0^x \frac{z}{|z|+1}\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{1+\sqrt{u}}\,du\,,$$

on a $V(x)\to+\infty$ lorsque $|x|\to\infty$ et on constate que $V'(x)f(t,x)=\frac{x}{1+|x|}f(t,x)\le A$, de sorte que V et A vérifient l'hypothèse i) du théorème 4.3.4.
Prenons $y:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(t,y(t))\,dt=0$ et notons $r=||y||_\infty$. Par décroissance de f, si $x:[0,1]\to\mathbb{R}\backslash B(0,r)$ est continue alors $x(t)f(t,x(t))\le x(t)f(t,y(t))$ pour tout $t\in[0,1]$ (car si $x(t)>0$ alors $x(t)>r\ge y(t)$, et si $x(t)<0$ alors $x(t)<-r\le y(t)$), et on a donc

$$\int_0^1 \frac{x(t)f(t,x(t))}{|x(t)|}\,dt\le\int_0^1\frac{x(t)}{|x(t)|}f(t,y(t))\,dt=\mathrm{sgn}(x)\int_0^1 f(t,y(t))\,dt=0$$

(notons que $\mathrm{sgn}(x)$ ne dépend pas de t, puisque x est continue et ne s'annule pas). En posant $W(x)=|x|$ (fonction régulière en dehors de 0), on a $W'(x)=\frac{x}{|x|}$, donc $\int_0^1 W'(x(t))f(t,x(t))\,dt\le 0$ dès que $|x(t)|\ge r$ pour tout $t\in[0,1]$, et $W'(x)V'(x)=\frac{x^2}{|x|(1+|x|)}>0$ en dehors de 0. L'hypothèse ii) du théorème 4.3.4 est donc vérifiée, et on en déduit qu'il existe bien une solution à (4.3.4). ■

4.3.3 Résolution d'EDP non-linéaires

L'emploi du degré de Leray-Schauder demande à avoir des hypothèses de compacité sur les fonctions considérées. Un bon nombre de théorèmes de compacité dans des espaces de fonctions découlent du théorème d'Ascoli-Arzela, et le moyen le plus évident d'attraper de la compacité sur des ensembles de fonction est donc de borner les dérivées des fonctions considérées. Il est alors naturel que le cadre des équations aux dérivées partielles, qui fait intervenir des estimations sur des dérivées, regorge d'applications du degré de Leray-Schauder. Nous allons illustrer ceci au travers de quelques considérations sur des équations elliptiques semi-linéaires.

Equation linéaire modèle

Les équations que nous allons considérer ici sont basées sur l'équation linéaire modèle

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3.12}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^2(\Omega)$. La solution est prise au sens faible: trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)\,, \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv.$$

L'inégalité de Poincaré permet de voir que $||u||_{H_0^1} = (\int_\Omega |\nabla u|^2)^{1/2}$ est une norme sur l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, et le théorème de Riesz affirme alors qu'il existe bien une unique solution à (4.3.12) au sens faible précédent. Par ailleurs, on peut voir que cette solution est continue par rapport à f: si $f_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$, alors u_n, la solution correspondant à f_n, converge vers u dans $H_0^1(\Omega)$.

Nous aurons besoin dans la suite du résultat suivant, qui découle des théorèmes d'injection de Sobolev et de Rellich:

$$\text{Pour tout } p < \tfrac{2N}{N-2},\ H_0^1(\Omega) \text{ s'injecte continuement et compactement dans } L^p(\Omega) \tag{4.3.13}$$

(voir par exemple [3] pour tous ces résultats sur les équations elliptiques linéaires et les espaces fonctionnels associés).

Non-linéarité bornée

A partir de ceci, on peut assez facilement résoudre

$$\begin{cases} -\Delta u + \sin(u) = f & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.3.14}$$

Cette équation est non-linéaire, mais sa non-linéarité est assez limitée et son opérateur différentiel principal reste linéaire. L'idée est alors de "geler" le terme gênant, la non-linéarité: on se donne $\bar{u} \in L^2(\Omega)$ et, comme $\sin(\bar{u}) \in L^2(\Omega)$, on sait qu'il existe une unique solution à

$$\begin{cases} -\Delta u = -\sin(\bar{u}) + f & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.3.15}$$

Ceci définit une application $F : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ qui à $\bar{u}$ associe la solution $F(\bar{u}) = u$ de (4.3.15), et pour résoudre (4.3.14) il suffit de trouver u tel que $\bar{u} = u$, c'est à dire de montrer que F a un point fixe.
On commence par voir que $F : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est continue, car si $\bar{u}_n \to \bar{u}$ dans $L^2(\Omega)$ alors $\sin(\bar{u}_n) \to \sin(\bar{u})$ dans $L^2(\Omega)$ (sin est globalement lipschitzienne), de sorte que la continuité de la solution de (4.3.12) par rapport au second membre montre que $F(\bar{u}_n) \to F(\bar{u})$ dans $H_0^1(\Omega)$, donc en particulier dans $L^2(\Omega)$.
Par ailleurs, F envoie $L^2(\Omega)$ en entier sur un ensemble relativement compact dans $L^2(\Omega)$. En effet, pour tout $\bar{u} \in L^2(\Omega)$ on a $||\sin(\bar{u})||_{L^2(\Omega)} \leq \mathrm{mes}(\Omega)^{1/2}$ et le second membre $-\sin(\bar{u}) + f$ de (4.3.15) reste donc borné dans $L^2(\Omega)$, indépendamment de $\bar{u}$. Mais l'application qui à ce second membre dans $L^2(\Omega)$ associe la solution de (4.3.15) dans $H_0^1(\Omega)$ est linéaire continue, donc envoie les bornés de $L^2(\Omega)$ sur des bornés de $H_0^1(\Omega)$. Ainsi, l'image de F est incluse dans un borné de $H_0^1(\Omega)$, donc un ensemble relativement compact dans $L^2(\Omega)$.
La fonction $F : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est donc compacte et, comme on vient de le voir, a son image incluse dans un ensemble relativement compact (donc borné) de $L^2(\Omega)$. Pour R assez grand, F envoie donc la boule dans $L^2(\Omega)$ centrée en 0 et de rayon R dans elle-même, et le théorème de point fixe de Schauder permet donc d'affirmer que F a un point fixe, c'est à dire qu'il existe une solution (au sens faible) de (4.3.14).

Non-linéarité surlinéaire

Regardons maintenant l'autre type de non-linéarité introduite dans l'introduction, à savoir le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + u^3 = f & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.3.16}$$

On peut tenter de reproduire la méthode précédente: on considère $F : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ qui à $\bar{u}$ associe la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = -\bar{u}^3 + f & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.3.17}$$

Outre les problèmes inhérents au fait que l'on n'est pas sûr que, lorsque $\bar{u} \in L^2(\Omega)$, cette équation est soluble (car $\bar{u}^3$ n'est pas dans $L^2(\Omega)$ en général), on va se heurter au problème majeur de montrer qu'une boule de $L^2(\Omega)$ est stable par F: comme $\bar{u}^3$ est une non-linéarité surlinéaire, elle a tendance à faire exploser les normes. Autre manière de dire cela: si prend $f = 0$ un instant, on se rend compte que, pour $\lambda > 0$, $F(\lambda\bar{u}) = \lambda^3 F(\bar{u})$ ce qui montre que F a tendance à élever au cube le rayon des boules et ne va donc pas stabiliser une boule de rayon assez grand; on peut avoir alors l'idée de raisonner sur des boules de rayon petit, mais f n'est justement pas nul et ces boules de rayon petit ne seront pas non plus stables par F ($F(0)$ n'est pas petit...). Il faut donc recourir à une autre méthode, celle du degré topologique. Dans la suite, on va supposer $N = 2$.

Tout d'abord, on ne définit pas F de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, mais de $L^6(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ (de sorte que $\bar{u}^3 \in L^2(\Omega)$ lorsque $\bar{u} \in L^6(\Omega)$); en dimension $N = 2$, $H^1_0(\Omega)$ s'injecte bien dans $L^6(\Omega)$ (voir (4.3.13)) et la solution de (4.3.17) est donc bien dans $L^6(\Omega)$ lorsque $\bar{u} \in L^6(\Omega)$.
Comme précédemment, on peut voir que F est continue: si $\bar{u}_n \to \bar{u}$ dans $L^6(\Omega)$, alors c'est un petit exercice d'intégration de voir que $\bar{u}_n^3 \to \bar{u}^3$ dans $L^2(\Omega)$ (utiliser par exemple $|\bar{u}_n^3 - \bar{u}^3| \le |\bar{u}_n - \bar{u}|(|\bar{u}_n|^2 + |\bar{u}_n|\,|\bar{u}| + |\bar{u}|^2)$ et l'inégalité de Hölder) et la continuité de la solution de (4.3.12) par rapport au second membre montre que $F(\bar{u}_n) \to F(\bar{u})$ dans $H^1_0(\Omega)$, donc dans $L^6(\Omega)$.
Il n'est pas beaucoup plus dur de voir que F envoie les bornés de $L^6(\Omega)$ sur des ensembles relativement compacts dans $L^6(\Omega)$. Si $(\bar{u}_n)_{n\ge1}$ est bornée dans $L^6(\Omega)$, alors $(\bar{u}_n^3)_{n\ge1}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et, comme pour (4.3.14), on en déduit que $(F(\bar{u}_n))_{n\ge1}$ est bornée dans $H^1_0(\Omega)$, donc relativement compact dans $L^6(\Omega)$ vu (4.3.13).
Afin de trouver un point fixe à F via degré topologique, nous allons montrer que, pour R assez grand, $d(\mathrm{Id} - F, B(0,R), 0) = 1$. Il suffit, vu l'invariance par homotopie du degré, de prouver que $u = tF(u)$ n'a pas de solution sur $[0,1] \times \partial B(0,R)$. Supposons qu'une telle solution existe; il est évident que $t \neq 0$ et, par définition, $F(u) = u/t$ montre que u/t vérifie $-\Delta(u/t) = -u^3 + f$ au sens faible, ce qui signifie que, pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + t\int_\Omega u^3 v = t\int_\Omega fv.$$

En prenant $v = u$ et en oubliant le terme $\int_\Omega u^4$ qui est positif, on obtient $||u||^2_{H^1_0} \le |\int_\Omega fu| \le ||f||_{L^2}||u||_{L^2}$. Sur $H^1_0(\Omega)$, l'inégalité de Poincaré donne $||\cdot||_{L^2} \le C||\cdot||_{H^1_0}$ et on voit donc que $||u||_{H^1_0} \le C||f||_{L^2}$. Comme H^1_0 s'injecte continuement dans $L^6(\Omega)$, on en déduit qu'il existe K indépendant de u tel que $||u||_{L^6} \le KC||f||_{L^2}$. En posant $R = KC||f||_{L^2} + 1$, on ne peut donc avoir $u \in \partial B(0,R)$ et la preuve est complète.

Remarque 4.3.8 *Notons que l'on retrouve ici ce dont nous avons discuté en fin de section 4.3.1: l'utilisation d'un théorème de point fixe demande à estimer toutes les valeurs d'une fonction, tandis que le degré topologique ne demande qu'à estimer les solutions potentielles du problème. Et comme nous avons pu le voir ci-dessus, il a été nettement plus simple d'estimer les solutions du problème que toutes les valeurs de la fonction considérée (ce qui ne semblait tout bonnement pas faisable).*

Remarque 4.3.9 *Nous n'avons fait la preuve que pour $N = 2$. Cette preuve peut s'adapter pour $N \ge 3$, à condition de remplacer u^3 par $|u|^{q-1}u$ avec $2q < \frac{2N}{N-2}$ (voir (4.3.13)). Dans le cas où l'on conserve u^3*

et où l'on souhaite considérer $N \geq 3$, cette méthode n'est pas suffisante et il faut utiliser des techniques un peu plus poussées.
Pour information, voilà une manière possible de procéder. On commence par résoudre

$$-\Delta u_n + (T_n(u_n))^3 = f, \tag{4.3.18}$$

où $T_n(s) = \min(s, \max(s, -n))$ est la troncature au niveau n (cette non-linéarité étant bornée, on peut utiliser le point fixe de Schauder pour prouver l'existence d'une solution u_n). En utilisant u_n comme fonction test dans (4.3.18), on prouve que $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et que $(u_n(T_n(u_n))^3)_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^1(\Omega)$. Par (4.3.13) et puisque $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, on peut extraire une suite (que l'on note encore $(u_n)_{n\geq 1}$) qui converge presque partout et dans $H_0^1(\Omega)$ faible vers un u. On a donc $(T_n(u_n))^3 \to u^3$ presque partout et, afin de passer à la limite dans (4.3.18) pour prouver que u vérifie $-\Delta u + u^3 = f$ au sens des distributions, il suffit donc de montrer que $((T_n(u_n))^3)_{n\geq 1}$ est équi-intégrable (car, par Vitali, ce terme convergera alors dans $L^1(\Omega)$ vers u^3). Pour voir cela, on prend $E \subset \Omega$ et on écrit, avec $M > 0$,

$$\int_E |T_n(u_n)|^3 = \int_{E\cap\{|u_n|>M\}} |T_n(u_n)|^3 + \int_{E\cap\{|u_n|\leq M\}} |T_n(u_n)|^3 \leq \int_{E\cap\{|u_n|>M\}} |T_n(u_n)|^3 + M^3 \mathrm{mes}(E).$$

Pour M fixé, le dernier terme est petit lorsque $\mathrm{mes}(E)$ est petit. On contrôle enfin le premier terme en utilisant le fait que $(u_n(T_n(u_n))^3)_{n\geq 1}$ est bornée (disons par A) dans $L^1(\Omega)$:

$$\int_{E\cap\{|u_n|>M\}} |T_n(u_n)|^3 \leq \frac{1}{M}\int_{E\cap\{|u_n|>M\}} |u_n|\,|T_n(u_n)|^3 \leq \frac{A}{M}\,,$$

terme petit si M est choisi assez grand dès le début.

Equations linéaires non-coercitives

Le principe "*si l'on sait estimer* a priori *les solutions d'un problème, alors on est bien parti pour montrer l'existence d'une solution à ce problème*" est aussi, grâce au degré topologique, à la base de la résolution d'EDP elliptiques linéaires "non-coercitives" de la forme

$$\begin{cases} -\Delta u + \mathrm{div}(\mathbf{V}u) = f \qquad \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3.19}$$

où $\mathbf{V} \in (L^\infty(\Omega))^N$. Ces équations sont dites non-coercitives car si l'on essaie d'écrire leur formulation faible sous la forme $a(u,v) = \int fv$ (afin d'appliquer le théorème de Lax-Milgram, par exemple), la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\mathbf{V}\cdot\nabla v$$

qui apparaît n'est pas coercitive (on n'a pas $a(u,u) \geq \alpha||u||^2_{H_0^1}$ pour un $\alpha > 0$), du moins pas si l'on n'impose rien de plus sur la convection $\mathbf{V}$. Le théorème de Lax-Milgram ne peut pas s'appliquer, mais on peut cependant prouver l'existence (et l'unicité) d'une solution à (4.3.19).

L'idée est bien sûr de "geler" le terme gênant $\mathrm{div}(\mathbf{V}u)$: en fixant $\bar{u} \in L^2(\Omega)$, on note $u = F(\bar{u})$ la solution de $-\Delta u = f - \mathrm{div}(\bar{u}\mathbf{V})$ (solution qui existe bien car le second membre est dans le dual de $H_0^1(\Omega)$). On prouve assez facilement que $F : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est compacte. Cependant, comme dans le cas de la non-linéarité surlinéaire, on ne peut prouver que F envoie une boule dans elle-même, et il faut donc employer une technique de degré topologique pour montrer que F a un point fixe. Cela se fait comme précédemment, en estimant *a priori* les solutions de $u = tF(u)$. C'est bien sûr dans ces estimations que la difficulté réside, tout le raisonnement effectué jusqu'ici étant assez simple et direct (une fois l'outil degré topologique connu). Nous renvoyons le lecteur intéressé à [6] pour la preuve de ces estimations (voir aussi [7] dans le cas non-linéaire).

Remarque 4.3.10 *Une autre utilisation classique du degré de Leray-Schauder dans le cadre des EDP elliptiques est l'obtention de solutions régulières pour des équations non-linéaires (voir par exemple [4]).*

Chapitre 5

Annexes

5.1 Extension et approximation de fonctions continues

Proposition 5.1.1 *Si K est un compact de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C(K)$, alors il existe $\widetilde{f} \in C(\mathbb{R}^N)$ telle que $\widetilde{f}_{|K} = f$.*

Preuve de la proposition 5.1.1
Ce résultat n'est qu'un cas particulier du théorème de Tietze-Urysohn (voir [12]). Voici cependant une preuve "à la main" de cette proposition.

Soit $\{a_i\,,\ i \geq 1\}$ une famille dénombrable dense dans K; on constate que $\theta_i(x) = \max(0, 2 - \frac{|x-a_i|}{\mathrm{dist}(x,K)})$ est une fonction définie, continue, positive et bornée par 2 sur $\mathbb{R}^N \backslash K$. La fonction

$$\Theta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta_i(x)}{2^i}$$

est donc continue sur $\mathbb{R}^N \backslash K$. De plus, si $x \notin K$ (et comme $\{a_i\,,\ i \geq 1\}$ est dense dans K) il existe i tel que $|x - a_i| \leq \frac{3}{2}\mathrm{dist}(x, K)$, ce qui implique $\theta_i(x) \geq \frac{1}{2}$ et donc $\Theta(x) > 0$.
Posons

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in K\,, \\ \frac{1}{\Theta(x)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta_i(x)}{2^i} f(a_i) & \text{si } x \notin K. \end{cases}$$

Cette fonction est bien définie car $\Theta > 0$ sur $\mathbb{R}^N \backslash K$ et f est bornée sur K (donc $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta_i(x)}{2^i} f(a_i)$ converge normalement puisque $\theta_i \leq 2$ sur $\mathbb{R}^N \backslash K$). Il est clair que $\widetilde{f}$ prolonge f, et est continue en restriction à K et à $\mathbb{R}^N \backslash K$. Pour voir qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^N$, il suffit donc de montrer que lorsque $x_n \in \mathbb{R}^N \backslash K$ converge vers $x \in K$ on a $\widetilde{f}(x_n) \to \widetilde{f}(x) = f(x)$. Pour cela, on écrit, puisque $\frac{1}{\Theta} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta_i}{2^i} = 1$ sur $\mathbb{R}^N \backslash K$,

$$\begin{aligned} |\widetilde{f}(x_n) - f(x)| &= \left| \frac{1}{\Theta(x_n)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta_i(x_n)}{2^i} f(a_i) - \frac{1}{\Theta(x_n)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta_i(x_n)}{2^i} f(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{\Theta(x_n)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta_i(x_n)}{2^i} |f(a_i) - f(x)|. \end{aligned}$$

Par définition, pour que $\theta_i(x_n) \neq 0$ il faut $2\mathrm{dist}(x_n, K) > |x_n - a_i|$ et donc $|x - a_i| \leq |x - x_n| + 2\mathrm{dist}(x_n, K) \leq 3|x - x_n|$. On a donc

$$\begin{aligned} |\widetilde{f}(x_n) - f(x)| &\leq \frac{1}{\sum_{i\,|\,|x-a_i|\leq 3|x-x_n|} \frac{\theta_i(x_n)}{2^i}} \sum_{i\,|\,|x-a_i|\leq 3|x-x_n|} \frac{\theta_i(x_n)}{2^i} |f(a_i) - f(x)| \\ &\leq \omega_f(3|x - x_n|) \end{aligned}$$

où ω_f est le module d'uniforme continuité de f. Ceci montre que $\widetilde{f}(x_n) \to f(x)$ lorsque $n \to \infty$ et donc que $\widetilde{f}$ est bien continue. ■

Proposition 5.1.2 *Si K est un compact de $\mathbb{R}^N$ alors $\{f_{|K}\ ,\ f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)\}$ est dense dans $C(K)$.*

Preuve de la proposition 5.1.2
La preuve la plus directe de ce résultat consiste probablement à invoquer le théorème de Weierstrass qui assure la densité des polynômes dans $C(K)$. Grâce au résultat d'extension précédent, on peut aussi en faire une preuve immédiate: prenons $f \in C(K)$ et $\widetilde{f} \in C(\mathbb{R}^N)$ qui étend f; en convolant $\widetilde{f}$ par un noyau régularisant, on obtient une suite de fonctions C^∞ qui converge localement uniformément vers $\widetilde{f}$ (puisque cette fonction est continue) et donc uniformément vers f sur K. ■

5.2 Théorème de Sard

Théorème 5.2.1 (Sard) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $f \in C^1(\Omega)^N$ et $C_f = \{x \in \Omega \mid Jf(x) = 0\}$. Alors $|f(C_f)| = 0$.*

Remarque 5.2.2 *Le théorème de Sard est beaucoup plus général que cela (il concerne aussi des fonctions $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$), voir [13].*

Preuve du théorème 5.2.1
Dans cette preuve, nous munissons $\mathbb{R}^N$ de la norme du sup $||\cdot||_\infty$ "au départ" et de la norme euclidienne $|\cdot|$ "à l'arrivée". Les normes induites sur les endomorphismes de $\mathbb{R}^N$ sont adaptées à ce choix. Soit K un cube compact inclus dans Ω; nous allons montrer que $|f(C_f \cap K)| = 0$ ([1]), ce qui suffit à conclure puisque Ω peut s'écrire comme réunion dénombrable de tels cubes compacts $(K_n)_{n\geq 1}$ ($f(C_f)$ sera alors mesurable de mesure nulle en tant qu'union dénombrable $\cup_{n\geq 1} f(C_f \cap K_n)$ d'ensembles mesurables de mesures nulles).
Soit $x \in K$; par le théorème des accroissements finis, on a

$$|f(x+h) - f(x) - f'(x)h| \leq \sup_{t\in[0,1]} ||f'(x+th) - f'(x)||\,||h||_\infty \leq \omega_{f'}(||h||_\infty)||h||_\infty \tag{5.2.1}$$

où $\omega_{f'}$ est le module d'uniforme continuité de f' dans un voisinage de K (donc $\omega_{f'}(||h||_\infty) \to 0$ lorsque $h \to 0$); Si $x \in C_f \cap K$ alors $f'(x)$ n'est pas surjective: son image est incluse dans un hyperplan H_x et par (5.2.1) on voit que $f(x + [-r, r]^N) \subset f(x) + H_x \cap B(0, Lr) + B(0, \omega_{f'}(r)r)$ où L est un majorant de $||f'(x)||$ sur K. Il est aisé de voir, par exemple en effectuant une rotation qui ramène l'hyperplan H_x sur $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$, que

$$|f(x) + H_x \cap B(0, Lr) + B(0, \omega_{f'}(r)r)| \leq M_0(Lr + \omega_{f'}(r)r)^{N-1} \times \omega_{f'}(r)r \leq M_1\omega_{f'}(r)r^N$$

où M_0 et M_1 ne dépendent ni de x ni de $r \leq 1$.
Pour $n \geq 1$ on découpe K en 2^{Nn} cubes de largeur $\mathrm{diam}(K)/2^n$. Notons $R_1, \ldots, R_{r_n}$ ceux de ces cubes qui rencontrent $C_f \cap K$; pour chaque $i = 1, \ldots, r_n$, il existe donc $x \in C_f \cap K$ tel que $R_i \subset x + [-\mathrm{diam}(K)/2^n, \mathrm{diam}(K)/2^n]^N$ et, par le raisonnement précédent, $|f(R_i)| \leq M_1\omega_{f'}(\frac{\mathrm{diam}(K)}{2^n})\frac{(\mathrm{diam}(K))^N}{2^{Nn}}$. Comme $r_n \leq 2^{Nn}$, on en déduit

$$|f(C_f \cap K)| \leq \left|\bigcup_{i=1}^{r_n} f(R_i)\right| \leq M_1(\mathrm{diam}(K))^N \omega_{f'}\left(\frac{\mathrm{diam}(K)}{2^n}\right)$$

et, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $|f(C_f \cap K)| = 0$ comme souhaité. ■

[1]Remarquons que C_f est fermé dans Ω de sorte que $C_f \cap K$ est un compact de Ω; ainsi $f(C_f \cap K)$ est aussi compact et en particulier mesurable.

5.3 A propos des cofacteurs

Le lemme suivant présente quelques résultats sur les dérivées de cofacteurs de matrices jacobiennes. Ces formules ne sont pas utiles que pour définir le degré topologique: elles interviennent aussi, par exemple, dans certaines preuves du théorème de Stokes (cf [8]).

Lemme 5.3.1 *Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)^N$; on note, pour $(i,j) \in [1,N]^2$ et $x \in \mathbb{R}^N$, $\Delta_{i,j}(x)$ le cofacteur (i,j) de $f'(x)$, c'est-à-dire*

$$\Delta_{i,j}(x) = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_{j-1} f_1(x) & \partial_{j+1} f_1(x) & \cdots & \partial_N f_1(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_{i-1}(x) & \cdots & \partial_{j-1} f_{i-1}(x) & \partial_{j+1} f_{i-1}(x) & \cdots & \partial_N f_{i-1}(x) \\ \partial_1 f_{i+1}(x) & \cdots & \partial_{j-1} f_{i+1}(x) & \partial_{j+1} f_{i+1}(x) & \cdots & \partial_N f_{i+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_N(x) & \cdots & \partial_{j-1} f_N(x) & \partial_{j+1} f_N(x) & \cdots & \partial_N f_N(x) \end{vmatrix}.$$

On a alors, pour tout $(i,k) \in [1,N]^2$ et $x \in \mathbb{R}^N$,

i) $\sum_{j=1}^N \partial_j f_k(x) \Delta_{i,j}(x) = \delta_{i,k} Jf(x)$ *(où $\delta_{i,k}$ est le symbole de Krönecker),*

ii) $\sum_{j=1}^N \partial_j \Delta_{i,j}(x) = 0$.

Preuve du lemme 5.3.1
Le point i) est simplement l'écriture du fait, bien connu en algèbre linéaire, que le produit de $f'(x)$ par la transposée de sa comatrice est égal à $Jf(x)\mathrm{Id}$. Rappelons-en les arguments: lorsque $i = k$, la formule est simplement l'expression du développement du déterminant $Jf(x)$ par rapport à la i-ème ligne; lorsque $i \neq k$, le déterminant D obtenu en remplacant la i-ème ligne $(\partial_1 f_i(x), \ldots, \partial_N f_i(x))$ de $f'(x)$ par la k-ème ligne $(\partial_1 f_k(x), \ldots, \partial_N f_k(x))$ est nul (les lignes i et k de D sont identiques) et le développement D par rapport à sa i-ème ligne donne bien $\sum_{j=1}^N \partial_j f_k(x) \Delta_{i,j}(x) = 0$.

Abordons maintenant la preuve de ii), en introduisant d'abord quelques notations pour simplifier les calculs. L'indice i étant fixé, on note $F = (f_1, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, f_N)^T$ et, lorsque $j \in [1,N]$ et $l \in [1,N-1]$,

$$\text{pour } l < j,\ X_{j,l} = \partial_l F$$
$$\text{pour } l \geq j,\ X_{j,l} = \partial_{l+1} F,$$

de sorte que $(-1)^i \Delta_{i,j} = (-1)^j \det(X_{j,1}, \ldots, X_{j,N-1})$. On a alors, par multilinéarité du déterminant,

$$(-1)^i \partial_j \Delta_{i,j} = \sum_{l=1}^{N-1} (-1)^j \det(X_{j,1}, \ldots, X_{j,l-1}, \partial_j X_{j,l}, X_{j,l+1}, \ldots, X_{j,N-1})$$

d'où, en notant $a_{j,l} = (-1)^j \det(X_{j,1}, \ldots, X_{j,l-1}, \partial_j X_{j,l}, X_{j,l+1}, \ldots, X_{j,N-1})$,

$$(-1)^i \sum_{j=1}^N \partial_j \Delta_{i,j} = \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^{N-1} a_{j,l} = \sum_{(j,l)\in E} a_{j,l} + \sum_{(j,l)\in F} a_{j,l},$$

où $E = \{(j,l) \in [1,N] \times [1,N-1] \mid j > l\}$ et $F = \{(j,l) \in [1,N] \times [1,N-1] \mid j \leq l\}$.
Or l'application $E \to F$ définie par $(a,b) \to (b, a-1)$ est bien définie et c'est une bijection. En effet, si $(a,b) \in E$, alors $a > b \geq 1$ et $a \leq N$, donc $a-1 \in [1,N-1]$, ce qui implique $(b,a-1) \in [1,N] \times [1,N-1]$; de plus, puisque $a > b$, on a bien $b \leq a-1$, donc $(b,a-1) \in F$. L'inverse de cette application est $(a,b) \to (b+1,a)$, qui va bien de F dans E: si $(a,b) \in F$, alors $a \leq b \leq N-1$, donc $(b+1,a) \in [1,N] \times [1,N-1]$ et, puisque $a \leq b$, on a bien $b+1 > a$, c'est-à-dire $(b+1,a) \in E$.

Ainsi, $\sum_{(j,l)\in F} a_{j,l} = \sum_{(j,l)\in E} a_{l,j-1}$, ce qui nous donne

$$(-1)^i \sum_{j=1}^N \partial_j \Delta_{i,j} = \sum_{(j,l)\in E} (a_{j,l} + a_{l,j-1}). \tag{5.3.1}$$

Soit $(j,l) \in E$; on a alors $a_{l,j-1} = (-1)^l \det(X_{l,1}, \dots, X_{l,j-2}, \partial_l X_{l,j-1}, X_{l,j}, \dots, X_{l,N-1})$. De plus:

- si $b < l < j$, alors $X_{l,b} = \partial_b F = X_{j,b}$,
- si $l \le b < j-1$, alors $X_{l,b} = \partial_{b+1} F = X_{j,b+1}$ (car $b+1 < j$),
- puisque $j-1 \ge l$, $X_{l,j-1} = \partial_j F$ donc, par le théorème de Schwarz, $\partial_l X_{l,j-1} = \partial_j \partial_l F = \partial_j X_{j,l}$ (toujours car $j > l$),
- si $b \ge j > l$, alors $X_{l,b} = \partial_{b+1} F = X_{j,b}$.

En utilisant ces propriétés, on voit que

$$a_{l,j-1} = (-1)^l \det(X_{j,1}, \dots, X_{j,l-1}, X_{j,l+1}, \dots, X_{j,j-1}, \partial_j X_{j,l}, X_{j,j}, \dots, X_{j,N-1}). \tag{5.3.2}$$

Lorsque $l = j-1$, la partie $X_{j,l+1}, \dots, X_{j,j-1}$ de cette expression est vide, et on a alors $a_{j-1,j-1} = -(-1)^j \det(X_{j,1}, \dots, X_{j,j-2}, \partial_j X_{j,j-1}, X_{j,j}, \dots, X_{j,N-1}) = -a_{j,j-1}$. Lorsque $l < j-1$, en permutant, dans le déterminant de (5.3.2), les colonnes $(j-1, j-2)$ (celles de $\partial_j X_{j,l}$ et $X_{j,j-1}$), puis les colonnes $(j-2, j-3)$ et ainsi de suite jusqu'aux colonnes $(l+1, l)$ (donc en effectuant $j-l-1$ permutations), on trouve

$$\begin{aligned} a_{l,j-1} &= (-1)^l (-1)^{j-l-1} \det(X_{j,1}, \dots, X_{j,l-1}, \partial_j X_{j,l}, X_{j,l+1}, \dots, X_{j,j-1}, X_{j,j}, \dots, X_{j,N-1}) \\ &= -a_{j,l}. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $(j,l) \in E$, $a_{l,j-1} = -a_{j,l}$, ce qui, grâce à (5.3.1), nous permet de conclure la démonstration. ■

5.4 Degré des gradients de fonctions coercitives

Une preuve du résultat suivant peut être trouvée dans [11]; les arguments que nous donnons ici ont la même saveur que ceux dans cette référence, mais les détails sont sensiblement différents (et nous semblent aussi plus simples et naturels).

Proposition 5.4.1 *Soit $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On suppose que $V(x) \to +\infty$ lorsque $|x| \to \infty$ et qu'il existe $R > 0$ tel que $\nabla V(x) \neq 0$ si $|x| \ge R$. Alors $d(\nabla V, B(0,R), 0) = 1$.*

Pour prouver cette proposition, nous aurons besoin des deux très simples résultats suivants.

Lemme 5.4.2 *Soit $R > 0$.*

i) Si f et g sont deux fonctions continues $\overline{B}(0,R) \to \mathbb{R}^N$ telles que $f(x) \cdot g(x) > 0$ pour tout $x \in \partial B(0,R)$, alors $d(f, B(0,R), 0) = d(g, B(0,R), 0)$.

ii) Si $f : \overline{B}(0,R) \to \mathbb{R}^N$ est continue et vérifie $f(\partial B(0,R)) \subset B(0,R)$, alors $d(\mathrm{Id} - f, B(0,R), 0) = 1$.

Preuve du lemme 5.4.2
Si f et g sont comme dans le point i), alors elles ne s'annulent pas sur $\partial B(0,R)$ et leurs degrés sont bien définis. Soit $h(t,x) = tf(x) + (1-t)g(x)$ l'homotopie naturelle entre f et g; si l'on avait $h(t,x) = 0$ pour un $t \in [0,1]$ et un $x \in \partial B(0,R)$, alors en prenant le produit scalaire avec $f(x)$ on trouverait

$t|f(x)|^2 + (1-t)f(x)\cdot g(x) = 0$, ce qui est une contradiction avec l'hypothèse du point i) et le fait que f ne s'annule pas sur $\partial B(0,R)$. On peut donc appliquer l'invariance par homotopie du degré pour conclure la preuve de i).

Prenons f comme dans ii) et $h(t,x) = x - tf(x)$. Si $h(t,x) = 0$ pour un $x \in \partial B(0,R)$ et un $t \in [0,1]$, alors par hypothèse $x = tf(x) \in tf(\partial B(0,R)) \subset tB(0,R) \subset B(0,R)$, ce qui est une contradiction avec le fait que $|x| = R$. L'invariance par homotopie du degré appliquée à h donne donc $d(\mathrm{Id} - f, B(0,R), 0) = d(\mathrm{Id}, B(0,R), 0) = 1$, et la preuve de ii) est complète. ■

Nous pouvons maintenant calculer le degré des gradients de fonctions coercitives.
Preuve de la proposition 5.4.1
On commence par supposer que V est régulier, et on note $\varphi(t,x)$ le flot de $-\nabla V$, i.e. φ est la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt}(t,x) = -\nabla V(\varphi(t,x)) & t \geq 0\,, x \in \mathbb{R}^N \\ \varphi(0,x) = x & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

On constate que, tant qu'il est défini, V décroit le long de ce flot:

$$\frac{d}{dt}V(\varphi(t,x)) = \nabla V(\varphi(t,x)) \cdot \frac{d\varphi}{dt}(t,x) = -|\nabla V(\varphi(t,x))|^2 \leq 0. \tag{5.4.1}$$

Comme $V(x) \to +\infty$ lorsque $|x| \to \infty$, cela montre que le flot partant de x reste dans un ensemble compact de $\mathbb{R}^N$ et donc qu'il est bien défini pour tout $t \geq 0$.

Soit $x \notin B(0,R)$; comme $\nabla V(x) \neq 0$, (5.4.1) montre que $t \to V(\varphi(t,x))$ est strictement décroissante au moins pour des petits temps $t > 0$; comme elle est aussi décroissante au sens large sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que, pour tout $t > 0$, $V(\varphi(t,x)) < V(\varphi(0,x)) = V(x)$. En particulier, on voit que, pour tout $x \notin B(0,R)$, on ne peut avoir $x = \varphi(t,x)$ que lorsque $t = 0$.
L'invariance par homotopie du degré montre alors que $d(\mathrm{Id} - \varphi(t,\cdot), B(0,R), 0)$ est indépendant de $t > 0$. Nous allons montrer, à l'aide du lemme 5.4.2, que cette quantité est égale à $d(\nabla V, B(0,R), 0)$ pour $t > 0$ petit, et à 1 pour un t assez grand, ce qui suffira à conclure dans le cas où V est régulier.

Comme φ est régulier, on a $x - \varphi(t,x) = \varphi(0,x) - \varphi(t,x) = -t\frac{d\varphi}{dt}(0,x) + t\omega_x(t) = t\nabla V(x) + t\omega_x(t)$ où $\omega_x(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$, uniformément pour $x \in \partial B(0,R)$. Comme ∇V ne s'annule pas sur $\partial B(0,R)$, on en déduit que

$$\nabla V(x) \cdot (x - \varphi(t,x)) = t|\nabla V(x)|^2 + t\nabla V(x) \cdot \omega_x(t) \geq t(|\nabla V(x)|^2 - |\omega_x(t)|) > 0 \tag{5.4.2}$$

pour tout $x \in \partial B(0,R)$, pourvu que $t > 0$ soit assez petit (mais ceci indépendamment de x). On peut alors appliquer le point i) du lemme 5.4.2 pour voir que, pour $t > 0$ assez petit, $d(\nabla V, B(0,R), 0) = d(\mathrm{Id} - \varphi(t,\cdot), B(0,R), 0)$.

Nous cherchons maintenant à prouver que $d(\mathrm{Id} - \varphi(t,\cdot), B(0,R), 0) = 1$ pour un t assez grand. L'idée est de remarquer que, comme V est coercitive, puisque le flot "descend" les valeurs de V il doit se rapprocher de 0 pour t assez grand, et on devrait donc pouvoir appliquer le point ii) du lemme 5.4.2.
On a vu plus haut que, pour $t > 0$, $x = \varphi(t,x)$ ne peut avoir de solution que dans $B(0,R)$, et l'additivité du degré nous montre donc que

$$d(\mathrm{Id} - \varphi(t,\cdot), B(0,R), 0) = d(\mathrm{Id} - \varphi(t,\cdot), B(0,r), 0)\,, \qquad \text{pour tout } r \geq R \text{ et tout } t > 0. \tag{5.4.3}$$

Lorsque $C \geq 0$, on note $K_C = \{x \in \mathbb{R}^N \mid V(x) \leq C\}$; par coercitivité de V, K_C est un compact de $\mathbb{R}^N$ qui est stable par le flot φ (car $t \to V(\varphi(t,x))$ est décroissant). Soit $M = \max_{B(0,R)} V$ et $r > R$ tel que $K_M \subset B(0,r)$. Notons $A = \max_{\overline{B(0,r)}} V$; comme ∇V ne s'annule pas sur le compact $K_A \backslash B(0,R)$, il existe

$\delta > 0$ qui minore sa norme sur cet ensemble. Soit $x \in \partial B(0,r) \subset K_A$; le flot $\varphi(\cdot, x)$ reste pour tout temps dans K_A et, tant qu'il n'a pas atteint $B(0,R)$, (5.4.1) montre que $V(\varphi(t,x)) \leq V(x) - t\delta^2 \leq A - t\delta^2$. Il est donc certain que, en un temps t au pire égal à $\frac{A-M}{\delta^2}$, le flot partant de x aura atteint K_M; notons que si le flot atteint $B(0,R)$ avant ce temps, alors il sera en particulier entré dans K_M et n'en ressortira plus. En posant $t = \frac{A-M}{\delta^2}$, on a donc $\varphi(t, \partial B(0,r)) \subset K_M \subset B(0,r)$ et le point ii) du lemme 5.4.2 donne alors $d(\mathrm{Id} - \varphi(t,\cdot), B(0,r), 0) = 1$. Par (5.4.3) on obtient, pour ce choix de t, $d(\mathrm{Id} - \varphi(t,\cdot), B(0,R), 0) = 1$ et la preuve est achevée dans le cas où V est régulier.

Si V n'est que C^1, alors en reprenant les notations ci-dessus mais en choisissant cette fois r tel que $K_{M+1} \subset B(0,r)$, on peut approcher V sur K_{A+1} à $\varepsilon \in]0, 1/2[$ près par $\widetilde{V}$ régulier de telle sorte que $\nabla\widetilde{V}$ ne s'annule pas sur $K_{A+1} \backslash B(0,R)$ (car ∇V ne s'annule pas sur cet ensemble compact, donc si $\nabla\widetilde{V}$ est suffisamment uniformément proche de ∇V il ne s'y annulera pas non plus). En notant $\widetilde{M} = \max_{B(0,R)} \widetilde{V} \leq M + 1/2$, on voit que $\widetilde{K}_{\widetilde{M}}$ (le même ensemble que K_M mais avec $\widetilde{V}$ au lieu de V et $\widetilde{M}$ au lieu de M) est inclus dans $K_{M+1} \subset B(0,r)$, et ce même r convient donc bien pour $\widetilde{V}$ dans le raisonnement suivant (5.4.3). De plus, si $\widetilde{A} = \max_{\overline{B}(0,r)} \widetilde{V}$, on voit que $\widetilde{K}_{\widetilde{A}} \subset K_{A+1}$ de sorte que tous les flots de $-\nabla\widetilde{V}$ considérés restent bien dans une zone compacte (et sont donc définis pour tout temps), où $\nabla\widetilde{V}$ ne s'annule pas sauf peut-être dans $B(0,R)$. On peut donc refaire le raisonnement précédent avec $\widetilde{V}$ au lieu de V, et on obtient $d(\nabla\widetilde{V}, B(0,R), 0) = 1$, ce qui conclut la preuve puisque l'on peut prendre $\nabla\widetilde{V}$ aussi proche que voulu de ∇V. ■

Références

[1] Avez A., Calcul différentiel, Masson, 1983.

[2] Azé D., Eléments d'analyse convexe et variationnelle, Ellipses, 1997.

[3] Brezis H., Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Dunod, 1983.

[4] Cronin J., Fixed points and topological degree in nonlinear analysis, Mathematical surveys, AMS, 1964.

[5] Deimling K., Nonlinear functional analysis, Springer (1985).

[6] Droniou J., *Non-coercive Linear Elliptic Problems*, Potential Anal. 17 (2002), no. 2, 181-203.

[7] Droniou J., *Thèse*, CMI, Université de Provence, Marseille, France.
Disponible sur `http://www-gm3.univ-mrs.fr/~droniou/these/index-en.html`.

[8] Droniou J., *Quelques résultats sur les espaces de Sobolev*, Ecole Doctorale de Maths-Info de Marseille, available at `http://www-gm3.univ-mrs/polys/gm3-03`.

[9] Leborgne D., Calcul différentiel et géométrie, Presses Universitaires de France (1982).

[10] Leray J., Lions J.L., *Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques semi-linéaires par les méthodes de Minty et Browder*. Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 97-107.

[11] Mawhin J., Topological degree methods in nonlinear boundary value problems, Conference Board of the Mathematical Sciences (040), AMS, 1979.

[12] Rudin W., Real and complex analysis, McGraw Hill, 1987.

[13] Milnor J. W., Topology from a differential viewpoint, Charlottesville: The University Press of Virginia (1965).