Annexe A

Continuité höldérienne des solutions d'une équation elliptique

Résumé: Nous prouvons ici, par les outils de De Giorgi [25], le théorème de Stampacchia [70] (étendu aux conditions au bord mixtes, par les méthodes de [29]) concernant la continuité höldérienne des solutions d'EDP elliptiques.

A.1 Introduction

A.1.1 Notations Générales

N est un entier supérieur ou égal à 2. Lorsque $N=2$, N_* désigne un réel fixé dans $]2,\infty[$; lorsque $N\geq 3$, on pose $N_*=N$. On notera $2^*=\frac{2N_*}{N_*-2}$.
Le produit scalaire euclidien de deux vecteurs $(a,b)\in\mathbb{R}^N$ est noté $a\cdot b$ et la norme induite $|\cdot|$; pour $\rho>0$, B_ρ désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon ρ dans $\mathbb{R}^N$. La mesure de Lebesgue d'une partie $E\subset\mathbb{R}^N$ mesurable est notée $|E|$.

Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$; on note d un majorant du diamètre de Ω.
Soit $p\in[1,N]$ et $q\leq\frac{Np}{N-p}$ lorsque $p<N$, ou $q<+\infty$ lorsque $p=N$. En prenant $a\in\Omega$, l'injection de Sobolev $W_0^{1,p}(a+B_d)\hookrightarrow L^q(a+B_d)$ et l'inégalité de Poincaré dans $W_0^{1,p}(a+B_d)$ nous donnent $C_S(N,d,p,q)$ tel que, pour tout $\varphi\in W_0^{1,p}(a+B_d)$,

$$||\varphi||_{L^q(a+B_d)}\leq C_S(N,d,p,q)||\,|\nabla\varphi|\,||_{L^p(a+B_d)}$$

($C_S(N,d,p,q)$ ne dépend pas de a grâce à l'invariance du problème par translation). Mais, pour tout $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$, puisque $\Omega\subset a+B_d$, l'extension $\widetilde{\varphi}$ de φ à $a+B_d$ par 0 hors de Ω est dans $W_0^{1,p}(a+B_d)$; ainsi, on déduit de l'inégalité précédente que, pour tout $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$||\varphi||_{L^q(\Omega)}\leq C_S(N,d,p,q)||\,|\nabla\varphi|\,||_{L^p(\Omega)}. \tag{A.1}$$

Lorsque Γ est une partie mesurable de $\partial\Omega$, $W_\Gamma^{1,p}(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ dont la trace est nulle sur Γ; on le munit de la même norme que $W^{1,p}(\Omega)$.

A.1.2 L'Equation

Nous prenons maintenant Γ_d une partie mesurable de $\partial\Omega$ et, en notant $H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ l'espaces des fonctions de $H^1(\Omega)$ dont la trace sur Γ_d est nulle, nous nous intéressons aux solutions de

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \displaystyle\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega \varphi\mathbf{v} \cdot \nabla u = \langle L, \varphi\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}\,,\ \forall \varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega). \end{array} \right. \tag{A.2}$$

A.1.3 Matrice de Diffusion

L'équation considérée est elliptique, ce qui signifie que la matrice de diffusion vérifie:

$$\begin{array}{c} A : \Omega \to M_N(\mathbb{R}) \text{ est mesurable,} \\ \exists \alpha_A > 0 \text{ tel que } A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha_A |\xi|^2 \text{ pour presque tout } x \in \Omega, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N, \\ \exists \Lambda_A \text{ tel que } ||A(x)|| := \sup\{|A(x)\xi|\,,\ \xi \in \mathbb{R}^N\,,\ |\xi| = 1\} \leq \Lambda_A \text{ pour presque tout } x \in \Omega. \end{array} \tag{A.3}$$

A.1.4 Terme de convection

Le coefficient de convection vérifie:

$$\mathbf{v} \in (L^{N_*}(\Omega))^N. \tag{A.4}$$

Lorsque $q \in [1, \infty]$, l'espace $(L^q(\Omega))^N$ est muni de la norme $||F||_{(L^q(\Omega))^N} = ||\,|F|\,||_{L^q(\Omega)}$. $B(\Omega, q, R)$ désigne la boule fermée, dans $(L^q(\Omega))^N$, de centre 0 et de rayon R.
Afin de préciser les dépendances des différentes constantes vis-à-vis des données du problème, on se donnera $\chi \geq 0$ (précisé ultérieurement, selon que l'on étudiera la continuité à l'intérieur ou au bord) et on supposera que

$$\exists r > N\,,\ \exists \Lambda > 0 \text{ tel que } \mathbf{v} \in B(\Omega, N_*, \chi) + B(\Omega, r, \Lambda) \tag{A.5}$$

(remarquons que, pour tout $\mathbf{v} \in (L^{N_*}(\Omega))^N$ et tout $\chi > 0$, il existe $r > N$ — on peut prendre $r = \infty$ — et $\Lambda \geq 0$ tel que $\mathbf{v}$ satisfasse (A.5); cependant, ce Λ ne dépend pas que de la norme de $\mathbf{v}$ dans $(L^{N_*}(\Omega))^N$).
Pour tout ce qui concerne les résultats à l'intérieur de l'ouvert Ω, le χ apparaissant dans (A.5) peut d'ores et déjà être donné; il suffira qu'il vérifie

$$\chi \in \left[0, \tfrac{\alpha_A}{C_S(N,d,2,2^*)}\right[. \tag{A.6}$$

A.1.5 Second Membre

On supposera le second membre de (A.2) plus régulier que strictement nécessaire:

$$\exists p \in]N, \infty[\,,\ \exists \mathcal{L} \in (W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))' \text{ tel que } L = \mathcal{L}_{|H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}. \tag{A.7}$$

On notera alors Λ_L une borne supérieure de $||\mathcal{L}||_{(W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))'}$.

A.1.6 Conditions au bord

$\Gamma_f \subset \partial\Omega$ est mesurable et vérifie: $\sigma(\Gamma_d \cap \Gamma_f) = 0$, $\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_f$.
Afin d'obtenir la continuité holdérienne jusqu'au bord des solutions de (A.2), nous devrons supposer une hypothèse sur Γ_d et Γ_f. On définit donc les deux types suivants de cartes locales de $\partial\Omega$:

$$\begin{array}{c} O \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^N, \\ h : O \to B := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < 1\} \text{ est un homéomorphisme bilipschitzien,} \\ h(O \cap \Omega) = B_+ := \{x \in B \mid x_N > 0\}, \\ h(O \cap \partial\Omega) = B^{N-1} := \{x \in \partial B_+ \mid x_N = 0\} \end{array} \tag{A.8}$$

et

$$\begin{array}{c} O \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^N, \\ h : O \to B \text{ est un homéomorphisme bilipschitzien}, \\ h(O \cap \Omega) = B_{++} := \{x \in B \mid x_N > 0\,,\ x_{N-1} > 0\}, \\ h(O \cap \Gamma_f) = \Gamma_1 := \{x \in \partial B_{++} \mid x_{N-1} = 0\}, \\ h(O \cap \Gamma_d) = \Gamma_2 := \{x \in \partial B_{++} \mid x_N = 0\}. \end{array} \tag{A.9}$$

L'hypothèse sur Γ_d et Γ_f est la suivante:

$$\begin{array}{c} \text{Il existe un nombre fini de } (O_i, h_i)_{i \in [1,m]} \text{ tels que} \\ \partial\Omega \subset \cup_{i=1}^m O_i \text{ et, pour tout } i \in [1,m],\ (O_i, h_i) \text{ est de l'un des types suivants:} \\ \left| \begin{array}{ll} \text{(D)} & O_i \cap \partial\Omega = O_i \cap \Gamma_d \text{ et } (O_i, h_i) \text{ satisfait (A.8)} \\ \text{(F)} & O_i \cap \partial\Omega = O_i \cap \Gamma_f \text{ et } (O_i, h_i) \text{ satisfait (A.8)} \\ \text{(DF)} & (O_i, h_i) \text{ satisfait (A.9).} \end{array} \right. \end{array} \tag{A.10}$$

Pour établir des résultat de continuité jusqu'au bord de Ω, il faudra que le χ apparaissant dans (A.5) vérifie (A.6) ainsi que

$$\chi < \inf_{i \in [1,m]} \frac{\alpha_A}{4||Jh_i||_{L^\infty(O_i \cap \Omega)} ||\, ||(h_i^{-1})'||\, ||^2_{L^\infty(h_i(O_i \cap \Omega))} ||Jh_i^{-1}||^{1-1/N_*}_{L^\infty(h_i(O_i \cap \Omega))} ||\, ||h_i'||\, ||_{L^\infty(O_i \cap \Omega)} C_S(N,2,2,2^*)} \tag{A.11}$$

(cette estimation est un peu forte; on pourrait faire plus fin en découpant $\mathbf{v}$ dans chaque carte $O_i \cap \Omega$).

A.1.7 Le Théorème

Le résultat principal prouvé ici est le suivant.

Théorème A.1 *Soit $M \geq 0$. Sous les hypothèses (A.3)—(A.7), (A.10) et (A.11), il existe $\kappa > 0$ ne dépendant que de $(\Omega, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p)$ [1] et C ne dépendant que de $(\Omega, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p, \Lambda_L, M)$ tels que, si u vérifie (A.2) et $||u||_{L^2(\Omega)} \leq M$, alors $u \in \mathcal{C}^{0,\kappa}(\Omega)$ et $||u||_{\mathcal{C}^{0,\kappa}(\Omega)} \leq C$.*

A.2 L'équation sans second membre

Nous prenons ici U un ouvert inclus dans Ω et nous nous intéressons aux solutions $v \in H^1(U)$, de

$$\forall \varphi \in H_0^1(U)\,, \int_U A\nabla v \cdot \nabla\varphi + \int_U \varphi \mathbf{v} \cdot \nabla v = 0. \tag{A.12}$$

Nous notons, pour $v : U \to \mathbb{R}$ mesurable, $x_0 \in \Omega$ et $R \in]0, \mathrm{dist}(x_0, \mathbb{R}^N \backslash U)[$, $\mathrm{supess}(v, x_0 + B_R)$ et $\mathrm{infess}(v, x_0 + B_R)$ les bornes supérieure et inférieure essentielles de v sur $x_0 + B_R$. Lorsque ces bornes sont finies, on note $\omega(v, x_0, R) = \mathrm{supess}(v, x_0 + B_R) - \mathrm{infess}(v, x_0 + B_R)$ le module de continuité essentielle de v sur $x_0 + B_R$.
Nous cherchons à prouver la proposition suivante, clef du résultat de continuité höldérienne du théorème A.1.

Proposition A.1 *Sous les hypothèses (A.3)—(A.5) et (A.6), il existe $C > 0$ et $\alpha \in]0,1[$ ne dépendant que de*

$$(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda)$$

tel que, si $v \in H^1(\Omega)$ vérifie (A.12), alors, pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $R > 0$ tel que $x_0 + B_{2R} \subset U$, on a

$$||v||_{L^\infty(x_0 + B_R)} \leq \frac{C}{R^{\frac{N}{2}}} ||v||_{L^2(U)} \quad \textit{et} \quad \omega(v, x_0, R/4) \leq \alpha\omega(v, x_0, R).$$

[1] Une dépendance par rapport à Ω prend en compte une dépendance par rapport à N et aux cartes $(O_i, h_i)_{i \in [1,m]}$.

A.2.1 Résultats préliminaires

Nous démontrons d'abord quelques lemmes techniques qui nous serviront dans la preuve de la proposition A.1.

Les deux premiers lemmes sont assez intuitifs et simples.

Lemme A.1 *Soit* $(f,g)\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *vérifiant* $f'\in L^\infty(\mathbb{R})$ *et* $(g,g')\in L^\infty(\mathbb{R})$. *Si* $v\in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ *et* $w\in H^1(\Omega)$, *alors* $f(v)g(w)\in H^1(\Omega)$ *et* $\nabla(f(v)g(w))=f(v)\nabla(g(w))+g(w)\nabla(f(v))$.

Preuve du lemme A.1
La mesurabilité de $f(v)g(w)$ est évidente et, puisque $v\in L^\infty(\Omega)$, f est continue (donc bornée sur les compacts) et g est bornée, on a $f(v)g(w)\in L^\infty(\Omega)$.
f et g étant régulières, on a $(f(v),g(w))\in H^1(\Omega)$, donc $f(v)g(w)\in W^{1,1}(\Omega)$ avec $\nabla(f(v)g(w))=f(v)\nabla(g(w))+g(w)\nabla(f(v))$; or g est bornée, donc $g(w)\in L^\infty(\Omega)$ et, v étant bornée, $f(v)\in L^\infty(\Omega)$ (f est continue). Ainsi, puisque $(\nabla(f(v)),\nabla(g(w)))\in(L^2(\Omega))^N$, on en déduit que $f(v)\nabla(g(w))+g(w)\nabla(f(v))\in(L^2(\Omega))^N$, ce qui conclut la preuve de ce lemme. ■

Lemme A.2 *Il existe* $\mathcal{K}_0$ *ne dépendant que de* N *tel que, pour tous* $0<\rho_1<\rho_2<\infty$, *il existe* $\eta\in\mathcal{C}_c^\infty(B_{\rho_2})$ *vérifiant:*

$$\eta\geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N,\quad ||\eta||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leq 1,\quad \eta\equiv 1 \text{ sur } B_{\rho_1}\quad \text{et}\quad ||\,|\nabla\eta|\,||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leq\frac{\mathcal{K}_0}{\rho_2-\rho_1}.$$

Preuve du lemme A.2
Soit $\theta\in\mathcal{C}_c^\infty(B_1)$, positive et d'intégrale égale à 1; un tel choix de θ ne dépend que de N. On note, pour $s>0$, $\theta_s(x)=s^{-N}\theta(x/s)$; pour tout $s>0$, $\theta_s\in\mathcal{C}_c^\infty(B_s)$ est positive et d'intégrale égale à 1.
En notant $\overline{\rho}=(\rho_1+\rho_2)/2$ et $d=(\rho_2-\rho_1)/2>0$, on pose $\eta=\mathbf{1}_{B_{\overline{\rho}}}*\theta_d$.
η est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support dans $\overline{B_{\overline{\rho}}}+\mathrm{supp}(\theta_d)$; $\mathrm{supp}(\theta_d)$ étant un compact inclus dans B_d, le support de η est un compact inclus dans $\overline{B_{\overline{\rho}}}+B_d\subset B_{\overline{\rho}+d}$; or $\overline{\rho}+d=\rho_2$. On a donc $\eta\in\mathcal{C}_c^\infty(B_{\rho_2})$.
η est clairement positive sur $\mathbb{R}^N$ (puisque $\mathbf{1}_{B_{\overline{\rho}}}$ et θ_d sont positives).
Par l'inégalité de Young, $||\eta||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leq||\mathbf{1}_{B_{\overline{\rho}}}||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}||\theta_d||_{L^1(\mathbb{R}^N)}=1$.
Prenons $x\in B_{\rho_1}$; on a alors, par définition de d, $x+B_d\subset B_{\overline{\rho}}$, donc $\mathrm{supp}(\theta_s(x-\cdot))\subset x+B_d\subset B_{\overline{\rho}}$; ainsi

$$\eta(x)=\int_{\mathbb{R}^N}\mathbf{1}_{B_{\overline{\rho}}}(y)\theta_d(x-y)\,dy=\int_{B_{\overline{\rho}}}\theta_d(x-y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^N}\theta_d(x-y)\,dy=1.$$

Puisque $\nabla\eta=\mathbf{1}_{B_{\overline{\rho}}}*\nabla\theta_d$, on a, par Young et pour tout $i\in[1,N]$,

$$||D_i\eta||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leq||\mathbf{1}_{B_{\overline{\rho}}}||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}||D_i\theta_d||_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Or $D_i\theta_d(x)=d^{-1}d^{-N}D_i\theta(x/d)$, donc $||D_i\theta_d||_{L^1(\mathbb{R}^N)}=d^{-1}||D_i\theta||_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ et

$$||D_i\eta||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leq d^{-1}||D_i\theta||_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

En notant donc $\mathcal{K}_0=2\sum_{i=1}^N||D_i\theta||_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ ($\mathcal{K}_0$ ne dépend que de N), on en déduit, puisque $|\nabla\eta|\leq\sum_{i=1}^N|D_i\eta|$, que $||\,|\nabla\eta|\,||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leq\frac{\mathcal{K}_0}{2}d^{-1}$, c'est à dire $||\,|\nabla\eta|\,||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leq\mathcal{K}_0/(\rho_2-\rho_1)$. ■

Le lemme suivant est un résultat classique dû à l'injection compacte de $H_0^1(U)$ dans $L^p(U)$ lorsque $p<2N/(N-2)$.

Lemme A.3 *Si* $r>N$ *alors, pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe* $\mathcal{K}(N,d,r,\varepsilon)$ *tel que, pour tout* $\varphi\in H_0^1(U)$,

$$||\varphi||_{L^{\frac{2r}{r-2}}(U)}\leq\varepsilon||\,|\nabla\varphi|\,||_{L^2(U)}+\mathcal{K}(N,d,r,\varepsilon)||\varphi||_{L^2(U)}.$$

Preuve du lemme A.3
Etape 1: on commence par montrer que le résultat est vérifié avec $U = B_d$.
La démonstration se fait par l'absurde. Fixons donc $r > N$ et $\varepsilon > 0$ et supposons qu'un tel $\mathcal{K}(N, d, r, \varepsilon)$ n'existe pas; dans ce cas, pour tout $n \geq 1$, on pourrait trouver $\varphi_n \in H_0^1(B_d)$ tel que

$$||\varphi_n||_{L^{\frac{2r}{r-2}}(B_d)} > \varepsilon|| \, |\nabla \varphi_n| \, ||_{L^2(B_d)} + n||\varphi_n||_{L^2(B_d)}.$$

En posant $\psi_n = \varphi_n / ||\varphi_n||_{L^{\frac{2r}{r-2}}(B_d)} \in H_0^1(B_d)$, on aurait donc, pour tout $n \geq 1$,

$$||\psi_n||_{L^{\frac{2r}{r-2}}(B_d)} = 1, \tag{A.13}$$

$$|| \, |\nabla \psi_n| \, ||_{L^2(B_d)} \leq \frac{1}{\varepsilon}, \tag{A.14}$$

$$||\psi_n||_{L^2(B_d)} \leq \frac{1}{n}. \tag{A.15}$$

Or $2r/(r-2) < 2N/(N-2)$ donc $H_0^1(B_d)$ s'injecte compactement dans $L^{\frac{2r}{r-2}}(B_d)$. Comme, par (A.14) et (A.15), $(\psi_n)_{n \geq 1}$ est bornée dans $H_0^1(B_d)$, on peut alors extraire de cette suite une sous-suite, encore notée $(\psi_n)_{n \geq 1}$, telle que $\psi_n \to \psi$ dans $L^{\frac{2r}{r-2}}(B_d)$.
En passant à la limite $n \to \infty$ dans (A.13), on constate que $||\psi||_{L^{\frac{2r}{r-2}}(B_d)} = 1$; ψ n'est donc pas la fonction nulle. Mais, puisque $2r/(r-2) > 2$, la convergence dans $L^{\frac{2r}{r-2}}(B_d)$ implique la convergence dans $L^2(B_d)$, ce qui donne, en faisant $n \to \infty$ dans (A.15), $||\psi||_{L^2(B_d)} = 0$, ce qui est une contradiction puisque l'on a vu que $\psi \neq 0$.

Etape 2: passage à U quelconque inclus dans Ω.
Soit $r > N$ et $\varepsilon > 0$.
On prend $a \in U$ et $\varphi \in H_0^1(U)$; comme $\varphi(\cdot - a) \in H_0^1(U - a)$ et $U - a \subset B_d$, l'extension $\widetilde{\varphi}$ de $\varphi(\cdot - a)$ à B_d par 0 hors de $U - a$ est dans $H_0^1(B_d)$.
On a donc, avec le $\mathcal{K}(N, d, r, \varepsilon)$ obtenu dans l'étape 1,

$$||\widetilde{\varphi}||_{L^{\frac{2r}{r-2}}(B_d)} \leq \varepsilon|| \, |\nabla \widetilde{\varphi}| \, ||_{L^2(B_d)} + \mathcal{K}(N, d, r, \varepsilon)||\widetilde{\varphi}||_{L^2(B_d)}.$$

Compte tenu de la définition de $\widetilde{\varphi}$, on déduit de cette inégalité:

$$||\varphi||_{L^{\frac{2r}{r-2}}(U)} \leq \varepsilon|| \, |\nabla \varphi| \, ||_{L^2(U)} + \mathcal{K}(N, d, r, \varepsilon)||\varphi||_{L^2(U)},$$

ce qui conclut la démonstration de ce lemme. ■

Lorsque E est une partie mesurable de $\mathbb{R}^N$ de mesure non-nulle et $f \in L^1(E)$, $\overline{f}^E$ désigne la moyenne de f sur E.
Le lemme suivant sert à estimer, dans l'inégalité de Poincaré moyenne exprimée sur une boule, la dépendance de la constante par rapport au rayon de la boule.

Lemme A.4 *Il existe $\mathcal{K}_1$ ne dépendant que de (N, N_*) tel que, pour tout $\rho > 0$ et tout $\varphi \in H^1(B_\rho)$,*

$$||\varphi - \overline{\varphi}^{B_\rho}||_{L^{2^*}(B_\rho)} \leq \mathcal{K}_1 \rho^{1 - \frac{N}{N_*}} || \, |\nabla \varphi| \, ||_{L^2(B_\rho)}.$$

Remarque A.1 *Lorsque $N \geq 3$, $1 - \frac{N}{N_*} = 0$.*

Preuve du lemme A.4
Soit $\psi \in H^1(B_1)$ définie par $\psi(x) = \varphi(\rho x)$. On a

$$\overline{\psi}^{B_1} = \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} \varphi(\rho x)\,dx = \frac{1}{\rho^N |B_1|}\int_{B_\rho} \varphi(y)\,dy = \overline{\varphi}^{B_\rho}.$$

Par l'inégalité de Poincaré moyenne et l'injection de Sobolev sur B_1, il existe $\mathcal{K}_1$ ne dépendant que de (N, N_*) tel que

$$||\psi - \overline{\psi}^{B_1}||_{L^{2^*}(B_1)} \leq \mathcal{K}_1 ||\,|\nabla\psi|\,||_{L^2(B_1)}. \tag{A.16}$$

Or, par changement de variable,

$$\int_{B_1} |\psi(x) - \overline{\psi}^{B_1}|^{2^*}\,dx = \rho^{-N}\int_{B_\rho} |\varphi(y) - \overline{\varphi}^{B_\rho}|^{2^*}\,dy \tag{A.17}$$

et, puisque $\nabla\psi(x) = \rho\nabla\varphi(\rho x)$,

$$\int_{B_1} |\nabla\psi(x)|^2\,dx = \rho^{-N}\rho^2\int_{B_\rho} |\nabla\varphi(y)|^2\,dy. \tag{A.18}$$

(A.16), (A.17) et (A.18) donnent donc

$$\rho^{-\frac{N}{2^*}} ||\varphi - \overline{\varphi}||_{L^{2^*}(B_\rho)} \leq \mathcal{K}_1 \rho^{1-\frac{N}{2}} ||\,|\nabla\varphi|\,||_{L^2(B_\rho)};$$

comme $1 - \frac{N}{2} + \frac{N}{2^*} = 1 - \frac{N}{N_*}$, on en déduit le résultat du lemme. ■

Nous prouvons maintenant une serie de lemmes spécifiquement liés à la preuve de la proposition A.1.

Lemme A.5 *Soit $(\rho, \sigma) \in]0, \infty[$. Si $\varphi \in H^1(B_{\rho+\sigma})$ vérifie*

$$||\,|\nabla\varphi|\,||_{L^2(B_\rho)} \leq \frac{C}{\sigma}||\varphi||_{L^2(B_{\rho+\sigma})},$$

alors il existe $\mathcal{K}_2$ ne dépendant que de (C, N, N_*) tel que

$$||\varphi||_{L^{2^*}(B_\rho)} \leq \mathcal{K}_2 \rho^{1-\frac{N}{N_*}} \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\rho}\right) ||\varphi||_{L^2(B_{\rho+\sigma})}.$$

Preuve du lemme A.5
Par le lemme A.4, on a

$$||\varphi - \overline{\varphi}^{B_\rho}||_{L^{2^*}(B_\rho)} \leq \mathcal{K}_1 \rho^{1-\frac{N}{N_*}} ||\,|\nabla\varphi|\,||_{L^2(B_\rho)} \leq \frac{C\mathcal{K}_1\rho^{1-\frac{N}{N_*}}}{\sigma}||\varphi||_{L^2(B_{\rho+\sigma})},$$

soit

$$||\varphi||_{L^{2^*}(B_\rho)} \leq |B_\rho|^{\frac{1}{2^*}} |\overline{\varphi}^{B_\rho}| + \frac{C\mathcal{K}_1\rho^{1-\frac{N}{N_*}}}{\sigma}||\varphi||_{L^2(B_{\rho+\sigma})}. \tag{A.19}$$

Or $\overline{\varphi}^{B_\rho} \leq |B_\rho|^{-1/2}||\varphi||_{L^2(B_\rho)} \leq |B_\rho|^{-1/2}||\varphi||_{L^2(B_{\rho+\sigma})}$, donc, par (A.19),

$$||\varphi||_{L^{2^*}(B_\rho)} \leq \left(\frac{C\mathcal{K}_1\rho^{1-\frac{N}{N_*}}}{\sigma} + |B_\rho|^{\frac{1}{2^*}-\frac{1}{2}}\right)||\varphi||_{L^2(B_{\rho+\sigma})}.$$

Comme $|B_\rho|^{\frac{1}{2^*}-\frac{1}{2}} = |B_1|^{\frac{1}{2^*}-\frac{1}{2}}\rho^{\frac{N}{2^*}-\frac{N}{2}} = C_0\rho^{-\frac{N}{N_*}}$ avec C_0 ne dépendant que de (N, N_*), on en déduit

$$||\varphi||_{L^{2^*}(B_\rho)} \leq \sup(C\mathcal{K}_1, C_0)\rho^{1-\frac{N}{N_*}}\left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\rho}\right)||\varphi||_{L^2(B_{\rho+\sigma})}$$

c'est à dire le résultat souhaité. ■

Lemme A.6 *Soit $\varphi : \mathbb{R}^N \to [0,\infty]$ mesurable et $R \in]0,R_0]$. S'il existe $C>0$ tel que, pour tous $(\rho,\sigma) \in]0,\infty[$ vérifiant $\rho+\sigma \le R$ et pour tout $k \ge 1$, on a*

$$||\varphi^k||_{L^{2^*}(B_\rho)} \le C\rho^{1-\frac{N}{N_*}}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\rho}\right)||\varphi^k||_{L^2(B_{\rho+\sigma})},$$

alors il existe $\mathcal{K}_3$ ne dépendant que de (C,N,N_*,R_0) tel que

$$||\varphi||_{L^\infty(B_{R/2})} \le \frac{\mathcal{K}_3}{R^{\frac{N}{2}}}||\varphi||_{L^2(B_R)}.$$

Preuve du lemme A.6
Notons $\alpha = \frac{2^*}{2} = \frac{N_*}{N_*-2} > 1$. En prenant $k \ge 1$ et en notant $q = 2k$, on a donc, pour tout $q \ge 2$ et tous $(\rho,\sigma) \in]0,\infty[$ tels que $\rho+\sigma \le R$,

$$||\varphi||_{L^{\alpha q}(B_\rho)} \le \left(C\rho^{1-\frac{N}{N_*}}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\rho}\right)\right)^{\frac{2}{q}}||\varphi||_{L^q(B_{\rho+\sigma})}. \tag{A.20}$$

Posons, pour $n \ge 0$, $q_n = 2\alpha^n$, $\rho_n = \frac{R}{2}+\frac{R}{2^{n+1}}$ et $\sigma_n = \frac{R}{2^{n+1}}$. On a, pour tout $n \ge 1$, $\rho_n+\sigma_n = \rho_{n-1} \le R$ et

$$\frac{1}{\sigma_n}+\frac{1}{\rho_n} = \frac{\rho_n+\sigma_n}{\sigma_n\rho_n} \le \frac{R}{\frac{R}{2^{n+1}}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)R} \le \frac{2^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)R} \le \frac{2^{n+2}}{R}.$$

En appliquant alors (A.20) avec $q = q_{n-1}$, $\rho = \rho_n$ et $\sigma = \sigma_n$ (pour un $n \ge 1$), on trouve donc

$$||\varphi||_{L^{q_n}(B_{\rho_n})} \le \left(\frac{2^{n+2}C\rho_n^{1-\frac{N}{N_*}}}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha^{n-1}}}||\varphi||_{L^{q_{n-1}}(B_{\rho_{n-1}})}.$$

En notant $a_n = ||\varphi||_{L^{q_n}(B_{\rho_n})}$, on obtient donc, puisque $\rho_n \le R$ et $1-\frac{N}{N_*} \ge 0$, pour tout $n \ge 1$,

$$a_n \le 2^{\frac{n}{\alpha^{n-1}}} \times \left(\frac{4C}{R^{\frac{N}{N_*}}}\right)^{\frac{1}{\alpha^{n-1}}} \times a_{n-1},$$

ce qui donne, par récurrence, pour tout $n \ge 1$,

$$a_n \le 2^{\sum_{i=1}^n \frac{i}{\alpha^{i-1}}} \times \left(\frac{4C}{R^{\frac{N}{N_*}}}\right)^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha^{i-1}}} \times a_0.$$

Comme $\alpha > 1$, la série $\sum_{i\ge1}\frac{i}{\alpha^{i-1}}$ converge; on a donc, pour tout $n \ge 1$,

$$a_n \le C_1\left(\frac{4C}{R^{\frac{N}{N_*}}}\right)^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha^{i-1}}} a_0$$

avec C_1 ne dépendant que de N_* (rappelons que α ne dépend que de N_*).
De plus, $\sum_{i\ge1} 1/\alpha^{i-1} = \alpha/(\alpha-1) = N_*/2$ donc:

i) Si $4C/R^{N/N_*} < 1$, $(4C/R^{N/N_*})^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha^{i-1}}} \le 1 \le R_0^{N/2}/R^{N/2}$ (rappelons que $R \le R_0$),

ii) Si $4C/R^{N/N_*} \ge 1$, $(4C/R^{N/N_*})^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha^{i-1}}} \le (4C/R^{N/N_*})^{N_*/2} = (4C)^{N_*/2}/R^{N/2}$.

Dans tous les cas, il existe C_2 ne dépendant que de (C, N, N_*, R_0) tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$a_n \leq \frac{C_1 C_2}{R^{\frac{N}{2}}} a_0.$$

Comme, pour tout $n \geq 1$, $a_n \geq ||\varphi||_{L^{q_n}(B_{R/2})}$ (car $\rho_n \geq R/2$) et, puisque $q_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} ||\varphi||_{L^{q_n}(B_{R/2})} = ||\varphi||_{L^\infty(B_{R/2})}$, passer à la limite $n \to \infty$ dans l'inégalité précédente donne le résultat du lemme (avec $\mathcal{K}_3 = C_1 C_2$). ■

Remarque A.2 *Par translation, les résultats des lemmes A.2, A.4, A.5 et A.6 restent valables (sans changer les constantes) lorsque les boules ne sont plus centrées en* 0 *mais en n'importe quel point de* $\mathbb{R}^N$.

A.2.2 Preuve de la proposition A.1

Rappelons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite "de Stampacchia" si elle est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et vérifie $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Une telle fonction a la propriété principale que, pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$, $f(\varphi) \in H^1(\Omega)$ et $\nabla(f(\varphi)) = f'(\varphi)\nabla\varphi$ (cette propriété est en fait aussi vérifiée pour toute fonction lipschitzienne f).

Lemme A.7 *Sous les hypothèses (A.3)—(A.6), il existe C ne dépendant que de*

$$(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda)$$

tel que, si $v \in H^1(U)$ vérifie (A.12), alors, pour toute fonction de Stampacchia convexe positive f, pour tout $x_0 \in \Omega$ et tous $(\rho, \sigma) \in]0, \infty[$ vérifiant $x_0 + B_{\rho+\sigma} \subset U$, on a

$$||\,|\nabla f(v)|\,||_{L^2(x_0+B_\rho)} \leq \frac{C}{\sigma} ||f(v)||_{L^2(x_0+B_{\rho+\sigma})}.$$

Preuve du lemme A.7

On suppose pour commencer que f est convexe positive de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $(f', f'') \in L^\infty(\mathbb{R})$.
Soit $x_0 \in \Omega$ et $(\rho, \sigma) \in]0, \infty[$ tels que $x_0 + B_{\rho+\sigma} \subset U$. Par lemme A.2, il existe $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(x_0 + B_{\rho+\sigma})$ positive telle que $||\eta||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq 1$, $\eta \equiv 1$ sur $x_0 + B_\rho$ et $||\,|\nabla\eta|\,||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \mathcal{K}_0/\sigma$, où $\mathcal{K}_0$ ne dépend que de N.
On note, pour $n \geq 0$, $T_n(s) = \min(n, \max(s, -n))$ la troncature au niveau n.
Par le lemme A.1, $f(T_n(v))f'(v) \in H^1(U)$, donc, puisque $\eta^2 \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$, la fonction $\varphi = \eta^2 f(T_n(v))f'(v)$ appartient à $H_0^1(U)$. En utilisant cette fonction dans (A.12), on obtient

$$\int_U A\nabla v \cdot \nabla(f(T_n(v))f'(v)\eta^2 + \int_U A\nabla v \cdot \nabla(f'(v))f(T_n(v))\eta^2 + 2\int_U A\nabla v \cdot \nabla\eta f'(v) f(T_n(v))\eta$$
$$+ \int_U \eta^2 f(T_n(v))f'(v)\mathbf{v} \cdot \nabla v = 0.$$

Traitons chacun de ces termes séparément.

i) $A\nabla v \cdot \nabla(f'(v)) = f''(v)A\nabla v \cdot \nabla v \geq 0$ puisque, f étant convexe, $f'' \geq 0$; donc, f étant positive, $A\nabla v \cdot \nabla(f'(v))f(T_n(v))\eta^2 \geq 0$.

ii) Hors de $\{|v| \leq n\}$, $\nabla(f(T_n(v))) = f'(T_n(v))\mathbf{1}_{\{|v|\leq n\}}\nabla v = 0$ et, sur $\{|v| \leq n\}$, $v = T_n(v)$, donc

$$\begin{aligned} A\nabla v \cdot \nabla(f(T_n(v)))f'(v)\eta^2 &= A\nabla(T_n(v)) \cdot \nabla(f(T_n(v)))f'(T_n(v))\eta^2 \\ &= A\nabla(f(T_n(v))) \cdot \nabla(f(T_n(v)))\eta^2 \\ &\geq \alpha_A |\nabla(f(T_n(v)))|^2 \eta^2. \end{aligned}$$

iii) $|A\nabla v \cdot \nabla \eta f'(v) f(T_n(v))\eta| \leq \Lambda_A |\eta \nabla(f(v))|\,|f(T_n(v))\nabla \eta|$.

iv) $|\eta^2 f(T_n(v)) f'(v)\mathbf{v} \cdot \nabla v| \leq |\eta f(T_n(v))\mathbf{v}|\,|\eta \nabla(f(v))|$.

En rassemblant ces termes, on trouve donc

$$\begin{aligned}\alpha_A||\,|\eta\nabla(f(T_n(v))|\,||^2_{L^2(U)} \;\leq\;& 2\Lambda_A||\,|\eta\nabla(f(v))|\,||_{L^2(U)}||\,|f(T_n(v))\nabla\eta|\,||_{L^2(U)}\\ &+||\,|\eta f(T_n(v))\mathbf{v}|\,||_{L^2(U)}||\,|\eta\nabla(f(v))|\,||_{L^2(U)}.\end{aligned} \tag{A.21}$$

Lorsque $n \to \infty$, $f(T_n(v)) \to f(v)$ en étant majorée par $\mathrm{Lip}(f)|v| + |f(0)| \in L^{2^*}(U) \subset L^2(U)$; donc, puisque $\eta\mathbf{v} \in (L^{N_*}(U))^N$ et $\nabla\eta \in (L^\infty(U))^N$ le théorème de convergence dominée donne $\eta f(T_n(v))\mathbf{v} \to \eta f(v)\mathbf{v}$ dans $(L^2(U))^N$ et $f(T_n(v))\nabla\eta \to f(v)\nabla\eta$ dans $(L^2(U))^N$.
De plus, $\nabla(f(T_n(v)) = f'(T_n(v))\nabla v \to f'(v)\nabla v = \nabla(f(v))$ lorsque $n \to \infty$ (rappelons que f' est continue) en étant majorée par $||f'||_{L^\infty(\mathbb{R})}|\nabla v| \in L^2(U)$; par convergence dominée, on a donc $\eta\nabla(f(T_n(v))) \to \eta\nabla(f(v))$ dans $L^2(U)$.
Le passage à la limite $n \to \infty$ dans (A.21) donne donc, après simplification par $||\,|\eta\nabla(f(v))|\,||_{L^2(U)} < \infty$,

$$\alpha_A||\,|\eta\nabla(f(v))|\,||_{L^2(U)} \leq 2\Lambda_A||\,|f(v)\nabla\eta|\,||_{L^2(U)} + ||\,|\eta f(v)\mathbf{v}|\,||_{L^2(U)}. \tag{A.22}$$

Or $\nabla\eta \equiv 0$ hors de $x_0 + B_{\rho+\sigma}$ et $||\,|\nabla\eta|\,||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \mathcal{K}_0/\sigma$, donc

$$||\,|f(v)\nabla\eta|\,||_{L^2(U)} \leq \frac{\mathcal{K}_0}{\sigma}||f(v)||_{L^2(x_0+B_{\rho+\sigma})}.$$

Comme $\mathbf{v} \in B(\Omega, N_*, \chi) + B(\Omega, r, \Lambda)$, $\eta = 0$ hors de $x_0 + B_{\rho+\sigma}$, $|\eta| \leq 1$ sur $\mathbb{R}^N$ et $\eta f(v) \in H^1_0(U)$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$, par le lemme A.3 et l'inégalité (A.1) (d est aussi un majorant de $U \subset \Omega$),

$$\begin{aligned}||\,|\eta f(v)\mathbf{v}|\,||_{L^2(U)} \;\leq\;& \chi||\eta f(v)||_{L^{2^*}(U)} + \Lambda||\eta f(v)||_{L^{\frac{2r}{r-2}}(U)}\\ \leq\;& \chi C_S(N,d,2,2^*)||\,|\nabla(\eta f(v))|\,||_{L^2(U)} + \Lambda\varepsilon||\,|\nabla(\eta f(v))|\,|||_{L^2(U)}\\ &+\Lambda\mathcal{K}(N,d,r,\varepsilon)||\eta f(v)||_{L^2(U)}\\ \leq\;& \chi C_S(N,d,2,2^*)||\,|\eta\nabla(f(v))|\,||_{L^2(U)} + \chi C_S(N,d,2,2^*)||\,|f(v)\nabla\eta|\,||_{L^2(U)}\\ &+\Lambda\varepsilon||\,|\eta\nabla(f(v))|\,|||_{L^2(U)} + \Lambda\varepsilon||\,|f(v)\nabla\eta|\,|||_{L^2(U)}\\ &+\Lambda\mathcal{K}(N,d,r,\varepsilon)||\eta f(v)||_{L^2(U)}\\ \leq\;& (\chi C_S(N,d,2,2^*) + \Lambda\varepsilon)||\,|\eta\nabla(f(v))|\,||_{L^2(U)}\\ &+\frac{(\chi C_S(N,d,2,2^*)+\Lambda\varepsilon)\mathcal{K}_0}{\sigma}||f(v)||_{L^2(x_0+B_{\rho+\sigma})}\\ &+\Lambda\mathcal{K}(N,d,r,\varepsilon)||f(v)||_{L^2(x_0+B_{\rho+\sigma})}.\end{aligned}$$

Puisque χ vérifie (A.6), on peut trouver $\varepsilon > 0$ ne dépendant que de $(\chi, C_S(N,d,2,2^*), \Lambda, \alpha_A)$, i.e. uniquement de $(d, \alpha_A, N_*, \chi, \Lambda)$, tel que $\chi C_S(N,d,2,2^*) + \varepsilon\Lambda < \alpha_A$; on a alors, dans (A.22),

$$\begin{aligned}&(\alpha_A - \chi C_S(N,d,2,2^*) - \varepsilon\Lambda)||\,|\eta\nabla(f(v))|\,||_{L^2(U)}\\ \leq\;& \left(\frac{2\Lambda_A\mathcal{K}_0}{\sigma} + \frac{(\chi C_S(N,d,2,2^*)+\Lambda\varepsilon)\mathcal{K}_0}{\sigma} + \Lambda\mathcal{K}(N,d,r,\varepsilon)\right)||f(v)||_{L^2(x_0+B_{\rho+\sigma})}\\ \leq\;& \left(\frac{2\Lambda_A\mathcal{K}_0}{\sigma} + \frac{(\chi C_S(N,d,2,2^*)+\Lambda\varepsilon)\mathcal{K}_0}{\sigma} + \frac{\Lambda\mathcal{K}(N,d,r,\varepsilon)d}{\sigma}\right)||f(v)||_{L^2(x_0+B_{\rho+\sigma})}\end{aligned}$$

(car $\sigma \leq d$).
Puisque $\eta \equiv 1$ sur $x_0 + B_\rho$ et $\alpha_A - \chi C_S(N,d,2,2^*) - \varepsilon\Lambda > 0$, on en déduit donc $||\,|\nabla(f(v))|\,||_{L^2(x_0+B_\rho)} \leq \frac{C}{\sigma}||f(v)||_{L^2(x_0+B_{\rho+\sigma})}$ avec

$$C = \frac{2\Lambda_A\mathcal{K}_0 + (\chi C_S(N,d,2,2^*)+\Lambda\varepsilon)\mathcal{K}_0 + \Lambda\mathcal{K}(N,d,r,\varepsilon)d}{\alpha_A - \chi C_S(N,d,2,2^*) - \varepsilon\Lambda}$$

ne dépendant que de $(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda)$, ce qui est le résultat du lemme lorsque $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est convexe positive et $(f', f'') \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Supposons maintenant que f n'est plus forcément de classe $\mathcal{C}^2$, mais juste de Stampacchia convexe positive.
Soit $(\theta_n)_{n\geq 1}$ un noyau régularisant sur $\mathbb{R}$ (i.e. pour tout $n \geq 1$, $\theta_n \in \mathcal{C}_c^\infty(]-1/n, 1/n[)$, $\theta_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} \theta_n = 1$).
Pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n = f * \theta_n$ est de classe $\mathcal{C}^2$, positive (car f et θ_n sont positifs) et convexe (car f est convexe et θ_n est positive). De plus, puisque $f_n' = f' * \theta_n$ (comme f_n' et $f' * \theta_n$ sont deux fonctions continues qui coincident — c'est trivial par dérivation sous l'intégrale — hors des points — en nombre fini — de discontinuité de f', ces fonctions coincident partout) et $f_n'' = f' * \theta_n'$, on a $(f_n', f_n'') \in L^\infty(\mathbb{R})$ (avec $||f_n'||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq ||f'||_{L^\infty(\mathbb{R})} ||\theta_n||_{L^1(\mathbb{R})} = ||f'||_{L^\infty(\mathbb{R})}$ et $||f_n''||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq ||f'||_{L^\infty(\mathbb{R})} ||\theta_n'||_{L^\infty(\mathbb{R})}$). Ainsi, par le raisonnement précédent, on a, pour tout $n \geq 1$,

$$|| \, |\nabla(f_n(v))| \, ||_{L^2(x_0+B_\rho)} \leq \frac{C}{\sigma} ||f_n(v)||_{L^2(x_0+B_{\rho+\sigma})} \tag{A.23}$$

avec le même C que précédemment.
Mais, lorsque $n \to \infty$, puisque $f_n \to f$ sur $\mathbb{R}$ et $||f_n'||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq ||f'||_{L^\infty(\mathbb{R})}$, $f_n(v) \to f(v)$ en étant majorée par $||f'||_{L^\infty(\mathbb{R})}|v| + \sup_{n\geq 1} |f_n(0)| \in L^2(U)$ ($\sup_{n\geq 1} |f_n(0)| < \infty$ car $f_n(0) \to f(0)$); donc, par convergence dominée, $f_n(u) \to f(u)$ dans $L^2(U)$.
Hors des points $\{s_1, \ldots, s_k\}$ de discontinuité de f', on a $f_n' = f' * \theta_n \to f'$; comme $\nabla v = 0$ presque partout sur $\{x \in U \mid v(x) \in \{s_1, \ldots, s_k\}\}$, on en déduit que $f_n'(v)\nabla u \to f'(u)\nabla u$ presque partout sur U, en étant majorée par $||f'||_{L^\infty(\mathbb{R})}|\nabla v| \in L^2(U)$. Par le théorème de convergence dominée, on a donc $\nabla(f_n(v)) = f_n'(v)\nabla v \to f'(v)\nabla v = \nabla(f(v))$ dans $L^2(U)$.
Ainsi, en passant à la limite dans (A.23), on en déduit le résultat du lemme pour f. ■

Corollaire A.1 *Sous les hypothèses (A.3)—(A.6), il existe C ne dépendant que de*

$$(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda)$$

tel que, si $v \in H^1(U)$ vérifie (A.12), alors, pour toute fonction de Stampacchia convexe positive f, pour tout $x_0 \in U$ et tout $R > 0$ tel que $x_0 + B_R \subset U$,

$$||f(v)||_{L^\infty(x_0+B_{R/2})} \leq \frac{C}{R^{\frac{N}{2}}} ||f(v)||_{L^2(x_0+B_R)}.$$

Preuve du corollaire A.1
Soit $k \geq 1$; on pose, pour tout $n \geq 1$,

$$g_n(s) = \begin{cases} s^k & \text{si } 0 < s \leq n, \\ n^k + kn^{k-1}(s-n) & \text{si } s > n, \\ 0 & \text{si } s \leq 0. \end{cases}$$

$g_n \in \mathcal{C}^1([0, \infty[)$ est croissante, positive, convexe et vérifie $g_n' \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$. Puisque f est positive, $g_n \circ f$ est donc positive, continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $g_n \circ f' = g_n'(f)f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. De plus, g_n étant convexe croissante sur $\mathbb{R}^+$ et f étant convexe positive sur $\mathbb{R}$, $g_n \circ f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
Par le lemme A.7, on a donc, pour tout $x_0 \in U$, pour tout $R > 0$ tel que $x_0 + B_R \subset U$ et tous (ρ, σ) tel que $\rho + \sigma \leq R$ (ce qui implique $x_0 + B_{\rho+\sigma} \subset U$),

$$|| \, |\nabla(g_n \circ f(v))| \, ||_{L^2(x_0+B_\rho)} \leq \frac{C_0}{\sigma} ||g_n \circ f(v)||_{L^2(x_0+B_{\rho+\sigma})}$$

avec C_0 ne dépendant que de $(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda)$. On déduit du lemme A.5 qu'il existe $\mathcal{K}_2$ ne dépendant que de (C_0, N, N_*) tel que, pour tout (ρ, σ) tel que $\rho + \sigma \leq R$,

$$||g_n \circ f(v)||_{L^{2^*}(x_0+B_\rho)} \leq \mathcal{K}_2 \rho^{1-\frac{N}{N_*}} \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\rho}\right) ||g_n \circ f(v)||_{L^2(x_0+B_{\rho+\sigma})}$$

et ce pour tout $n \geq 1$.
Or $0 \leq g_n(s) \leq s^k$ pour tout $s \geq 0$ (car $g_n(s) = \int_0^s g_n'(t)\,dt$ et $g_n'(t) = kt^{k-1}\mathbf{1}_{]0,n[} + kn^{k-1}\mathbf{1}_{[n,\infty[} \leq kt^{k-1}$ pour $t \geq 0$); on en déduit donc, puisque f est positive,

$$||g_n \circ f(v)||_{L^{2^*}(x_0+B_\rho)} \leq \mathcal{K}_2 \rho^{1-\frac{N}{N_*}} \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\rho}\right) ||f(v)^k||_{L^2(x_0+B_{\rho+\sigma})}.$$

Comme $g_n(s) \to s^k$ lorsque $s \geq 0$, le lemme de Fatou nous permet de voir, en faisant $n \to \infty$ dans l'inégalité précédente,

$$||f(v)^k||_{L^{2^*}(x_0+B_\rho)} \leq \mathcal{K}_2 \rho^{1-\frac{N}{N_*}} \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\rho}\right) ||f(v)^k||_{L^2(x_0+B_{\rho+\sigma})}. \tag{A.24}$$

Par le lemme A.6 et (A.24), il existe donc de $\mathcal{K}_3$ ne dépendant que de $(\mathcal{K}_2, N, N_*, d)$ (car un R tel que $x_0 + B_R \subset U$ vérifie forcément $R \leq d$), i.e. uniquement de $(d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda)$, tel que

$$||f(v)||_{L^\infty(x_0+B_{R/2})} \leq \frac{\mathcal{K}_3}{R^{\frac{N}{2}}} ||f(v)||_{L^2(x_0+B_R)},$$

c'est à dire le résultat voulu. ∎

Lemme A.8 *Sous les hypothèses (A.3)—(A.6), il existe $\beta \in]0,1[$ ne dépendant que de*

$$(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda)$$

tel que, pour tout $x_0 \in U$ et $R > 0$ vérifiant $x_0 + B_R \subset U$, si $v \in H^1(U)$ vérifie (A.12), $v \geq 0$ presque partout sur x_0+B_R et $|\{x \in x_0+B_{R/2} \mid v(x) \geq 1\}| \geq \frac{1}{2}|B_{R/2}|$, alors $v \geq \beta$ presque partout sur $x_0+B_{R/4}$.

Preuve du lemme A.8
Soit $\varepsilon > 0$ et $g : [0,\infty[\to]-\infty, -\varepsilon[$ définie par

$$g(s) = \begin{cases} -1-\varepsilon & \text{si } s \geq 1 \\ (1-s)^3 - 1 - \varepsilon & \text{si } 0 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$g \in \mathcal{C}^2([0,\infty[)$ est inférieure à $-\varepsilon$ sur $[0,\infty[$; $f = -\ln(-g) + \ln(1+\varepsilon)$ est donc dans $\mathcal{C}^2([0,\infty[)$. On a:

$$f \geq 0 \text{ sur } [0,\infty[, \tag{A.25}$$
$$(f', f'') \in L^\infty([0,\infty[), \tag{A.26}$$
$$f'' \geq f'^2 \text{ sur } [0,\infty[. \tag{A.27}$$

(A.25) vient du fait que, sur $[0,\infty[$, $-1-\varepsilon \leq g$, ce qui implique $\ln(-g) \leq \ln(1+\varepsilon)$, donc $-\ln(-g) \geq -\ln(1+\varepsilon)$. (A.26) et (A.27) viennent des des formules $f' = -g'/g$ et $f'' = -g''/g + g'^2/g^2 = -g''/g + f'^2$ et du fait que $(g', g'') \in L^\infty([0,\infty[)$, $g'' \geq 0$ sur $[0,\infty[$ et $g \leq -\varepsilon$ sur $[0,\infty[$.
On étend f à $\mathbb{R}$ en posant, pour $s < 0$, $f(s) = f(0) + sf'(0)$. Cette extension fait de f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ positive sur $\mathbb{R}$ (car $f(0) = -\ln(\varepsilon) + \ln(1+\varepsilon) \geq 0$ et $f'(0) = -(-3)/(-\varepsilon) < 0$).
Sur $[0,\infty[$, puisque $f'' \geq f'^2 \geq 0$, f' est croissante; comme $f'_{|]-\infty,0]} = f'(0)$, on en déduit la croissance de f' sur $\mathbb{R}$. f est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

f étant $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\infty[$ et sur $]-\infty,0]$ avec une dérivée seconde bornée sur $\mathbb{R}$ (elle est nulle sur $]-\infty,0]$), f' est de Stampacchia.

Soit $\eta\in\mathcal{C}_c^\infty(x_0+B_R)$ telle que $0\le\eta\le 1$ sur $\mathbb{R}^N$, $\eta\equiv 1$ sur $x_0+B_{R/2}$ et $|\nabla\eta|\le 2\mathcal{K}_0/R$ sur $\mathbb{R}^N$ (avec $\mathcal{K}_0$ ne dépendant que de N, cf lemme A.2).
f' étant de Stampacchia, on peut prendre $\varphi=f'(v)\eta^2$ dans (A.12); on obtient alors

$$2\int_U A\nabla v\cdot\nabla\eta f'(v)\eta+\int_U A\nabla v\cdot\nabla(f'(v))\eta^2+\int_U\eta^2 f'(v)\mathbf{v}\cdot\nabla v=0. \tag{A.28}$$

Or, presque partout sur U, $A\nabla v\cdot\nabla(f'(v))=A\nabla v\cdot\nabla v f''(v)$. Puisque $v\ge 0$ là où η n'est pas nulle, on déduit de cette égalité et de (A.27), $A\nabla v\cdot\nabla(f'(v))\eta^2\ge\alpha_A|\nabla v|^2(f'(v))^2\eta^2=\alpha_A|\nabla(f(v))|^2\eta^2$ presque partout sur U.
Injectée dans (A.28), cette inégalité donne

$$\alpha_A||\,|\eta\nabla(f(v))|\,||_{L^2(U)}^2\le 2\Lambda_A||\,|\eta\nabla(f(v))|\,||_{L^2(U)}||\,|\nabla\eta|\,||_{L^2(U)}+||\,|\eta\nabla(f(v))|\,||_{L^2(x_0+B_{2R})}||\,|\mathbf{v}|\,||_{L^2(x_0+B_R)},$$

soit, en simplifiant par $||\,|\eta\nabla(f(v))|\,||_{L^2(U)}<\infty$,

$$\alpha_A||\,|\eta\nabla(f(v))|\,||_{L^2(U)}\le\frac{4\Lambda_A\mathcal{K}_0}{R}R^{\frac{N}{2}}+\chi|B_R|^{\frac12-\frac{1}{N_*}}+\Lambda|B_R|^{\frac12-\frac1r}. \tag{A.29}$$

Or, pour tout $q\in]0,\infty[$, $|B_R|^{\frac12-\frac1q}=|B_1|^{\frac12-\frac1q}R^{\frac N2-\frac Nq}=C_0R^{1-\frac Nq}R^{\frac N2-1}$ avec C_0 ne dépendant que de (N,q). Lorsque $q\ge N$, on a $1-\frac Nq\ge 0$, donc $|B_R|^{\frac12-\frac1q}\le C_0d^{1-\frac Nq}R^{\frac N2-1}\le C_1R^{\frac N2-1}$ où C_1 ne dépend que de (N,d,q). On trouve donc, en utilisant cette majoration pour $q=N_*$ et $q=r$ dans (A.29), et puisque $\eta\equiv 1$ sur $x_0+B_{R/2}$,

$$||\,|\nabla(f(v))|\,||_{L^2(x_0+B_{R/2})}\le C_2R^{\frac N2-1} \tag{A.30}$$

avec C_2 ne dépendant que de $(N,d,\alpha_A,\Lambda_A,N_*,\chi,r,\Lambda)$.

Lorsque $v\ge 1$, on a $f(v)=0$ donc, en notant $E=\{x\in x_0+B_{R/2}\mid v(x)\ge 1\}$,

$$\begin{aligned}|\overline{f(v)}^{x_0+B_{R/2}}| &\le |B_{R/2}|^{-1}\int_{(x_0+B_{R/2})\setminus E}|f(v)|\\ &\le \frac{(|x_0+B_{R/2}|-|E|)^{1-1/2^*}}{|B_{R/2}|}||f(v)||_{L^{2^*}(x_0+B_{R/2})}\\ &\le \frac{(\frac12|B_{R/2}|)^{1-1/2^*}}{|B_{R/2}|}||f(v)||_{L^{2^*}(x_0+B_{R/2})}\\ &\le \left(\frac12\right)^{1-1/2^*}|B_{R/2}|^{-1/2^*}||f(v)||_{L^{2^*}(x_0+B_{R/2})}.\end{aligned}$$

Par le lemme A.4 et (A.30), on en déduit donc

$$\begin{aligned}||f(v)||_{L^{2^*}(x_0+B_{R/2})} &\le \left|\overline{f(v)}^{x_0+B_{R/2}}\right||B_{R/2}|^{\frac{1}{2^*}}+\mathcal{K}_1\left(\frac R2\right)^{1-\frac{N}{N_*}}||\,|\nabla(f(v))|\,||_{L^2(x_0+B_{R/2})}\\ &\le \left(\frac12\right)^{1-\frac{1}{2^*}}||f(v)||_{L^{2^*}(x_0+B_{R/2})}+2^{\frac{N}{N_*}-1}C_2\mathcal{K}_1R^{\frac N2-\frac{N}{N_*}}\end{aligned}$$

($\mathcal{K}_1$ ne dépend que de (N,N_*)), soit

$$\left(1-\left(\frac12\right)^{1-\frac{1}{2^*}}\right)||f(v)||_{L^{2^*}(x_0+B_{R/2})}\le 2^{\frac{N}{N_*}-1}C_2\mathcal{K}_1R^{\frac N2-\frac{N}{N_*}} \tag{A.31}$$

avec $1-(1/2)^{1-1/2^*} > 0$ ne dépendant que de N_*.
f étant une fonction de Stampacchia convexe positive, par le corollaire A.1, on a

$$||f(v)||_{L^\infty(x_0+B_{R/4})} \leq \frac{C_3}{R^{\frac{N}{2}}}||f(v)||_{L^2(x_0+B_{R/2})},$$

où C_3 ne dépend que de $(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda)$. Donc, par (A.31),

$$\begin{aligned} ||f(v)||_{L^\infty(x_0+B_{R/4})} &\leq \frac{C_3}{R^{\frac{N}{2}}}|B_R|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}}||f(u)||_{L^{2^*}(x_0+B_{R/2})} \\ &\leq C_4 R^{\frac{N}{2}-\frac{N}{2^*}-\frac{N}{N_*}}, \end{aligned}$$

avec $C_4 > 0$ ne dépendant que de $(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda)$.
Comme $\frac{N}{2}-\frac{N}{2^*}-\frac{N}{N_*} = \frac{N}{2} - N\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N_*}\right) - \frac{N}{N_*} = 0$, on a en fait prouvé que

$$||f(v)||_{L^\infty(x_0+B_{R/4})} \leq C_4.$$

Soit $F = \{x \in x_0 + B_{R/4} \mid v(x) \leq 1\}$; puisque $f = -\ln((\cdot-1)^3+1+\varepsilon)+\ln(1+\varepsilon)$ sur $[0,1]$ et $v \geq 0$ presque partout sur $x_0+B_{R/4}$, on a, presque partout sur F, $f(v) = -\ln((v-1)^3+1+\varepsilon)+\ln(1+\varepsilon) \leq C_4$. Cette égalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$ (et C_4 ne dépendant pas de ε), on en déduit que, presque partout sur F, $(v-1)^3 \geq -1+e^{-C_4}$. v étant inférieure à 1 sur F, cela implique donc, presque partout sur F, $|v-1| \leq (1-e^{-C_4})^{1/3}$, d'où $v \geq 1-(1-e^{-C_4})^{1/3}$.
Posons $\beta = 1-(1-e^{-C_4})^{1/3} \in]0,1[$. β ne dépend que de $(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda)$, on a prouvé que $v \geq \beta$ presque partout sur F; comme, sur $(x_0+B_{R/4})\backslash F$, on a $v \geq 1 > \beta$, le lemme est prouvé. ■

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition clef de cette section.
Preuve de la proposition A.1
L'estimation sur $||v||_{L^\infty(x_0+B_R)}$ découle du corollaire (A.1) appliqué à $f = Id$; on déduit de cette estimation que, pour $\rho \leq R$, $\text{supess}(v, x_0+B_\rho)$ et $\text{infess}(v, x_0+B_\rho)$ sont finis.
Si $\text{supess}(v, x_0+B_R) = \text{infess}(v, x_0+B_R)$, alors v est égale presque partout à une constante sur x_0+B_R et il n'y a donc rien à prouver; on suppose donc que $\omega(v, x_0, R) \neq 0$.

Soit

$$v_1 = 2\left(1+\frac{2v-\text{supess}(u, x_0+B_R)-\text{infess}(v, x_0+B_R)}{\text{supess}(v, x_0+B_R)-\text{infess}(v, x_0+B_R)}\right)$$

et

$$v_2 = 2\left(1-\frac{2v-\text{supess}(u, x_0+B_R)-\text{infess}(v, x_0+B_R)}{\text{supess}(v, x_0+B_R)-\text{infess}(v, x_0+B_R)}\right).$$

v_1 et v_2 ayant été construites à partir de v en ajoutant et en multipliant par des constantes, elles vérifient (A.12). Presque partout sur x_0+B_R, v_1 et v_2 sont positives et, puisque $v_1+v_2 \equiv 2$, on a $\{x \in x_0+B_{R/2} \mid v_1 \geq 1\} \cup \{x \in x_0+B_{R/2} \mid v_2 \geq 1\} = x_0+B_{R/2}$; il existe donc $i \in \{1,2\}$ tel que $|\{x \in x_0+B_{R/2} \mid v_i \geq 1\}| \geq \frac{1}{2}|B_{R/2}|$.
Avec β donné dans le lemme A.8 ($\beta \in]0,1[$ ne dépend que de $(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, r, \Lambda)$), on a donc $v_i \geq \beta$ presque partout sur $x_0+B_{R/4}$.

i) Si $i=1$, cela implique, presque partout sur $x_0+B_{R/4}$,

$$2v \geq \text{supess}(v, x_0+B_R)+\text{infess}(v, x_0+B_R)+\left(\frac{\beta}{2}-1\right)(\text{supess}(v, x_0+B_R)-\text{infess}(v, x_0+B_R)).$$

On en déduit que

$$2\text{infess}(v, x_0+B_{R/4}) \geq \text{supess}(v, x_0+B_R)+\text{infess}(v, x_0+B_R)+\left(\frac{\beta}{2}-1\right)\omega(v, x_0, R),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}&2(\mathrm{supess}(v, x_0 + B_{R/4}) - \mathrm{infess}(v, x_0 + B_{R/4}))\\ \leq\ & 2(\mathrm{supess}(v, x_0 + B_{R/4}) - \mathrm{supess}(v, x_0 + B_R)) + \left(2 - \frac{\beta}{2}\right)\omega(v, x_0, R).\end{aligned}$$

Mais $\mathrm{supess}(v, x_0 + B_{R/4}) - \mathrm{supess}(v, x_0 + B_R) \leq 0$, et on a finalement $2\omega(v, x_0, R/4) \leq (2 - \frac{\beta}{2})\omega(v, x_0, R)$, c'est à dire le résultat voulu avec $\alpha = 1 - \beta/4$.

ii) Si $i = 2$, alors on a, presque partout sur $x_0 + B_{R/4}$,

$$\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\omega(v, x_0, R) + \mathrm{supess}(v, x_0 + B_R) + \mathrm{infess}(v, x_0 + B_R) \geq 2v,$$

ce qui implique

$$2\mathrm{supess}(v, x_0 + B_{R/4}) \leq \mathrm{supess}(v, x_0 + B_R) + \mathrm{infess}(v, x_0 + B_R) + \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\omega(v, x_0, R),$$

d'où

$$\begin{aligned}&2(\mathrm{supess}(v, x_0 + B_{R/4}) - \mathrm{infess}(v, x_0 + B_{R/4}))\\ \leq\ & 2(\mathrm{infess}(v, x_0 + B_R) - \mathrm{infess}(v, x_0 + B_{R/4})) + \left(2 - \frac{\beta}{2}\right)\omega(v, x_0, R).\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{infess}(v, x_0+B_R)-\mathrm{infess}(v, x_0+B_{R/4}) \leq 0$, on en déduit $2\omega(v, x_0, R/4) \leq (2-\frac{\beta}{2})\omega(v, x_0, R)$, c'est à dire le résultat souhaité avec $\alpha = 1 - \beta/4$.

■

A.3 A l'intérieur de Ω

A.3.1 Le problème de Dirichlet sur des petits ouverts

Commençons par un lemme de Stampacchia.

Lemme A.9 *Soit $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante. S'il existe $\alpha > 0$, $\beta > 1$ et $C > 0$ tels que*

$$\forall h > k \geq 0\,,\ F(h) \leq \frac{C^\alpha}{(h-k)^\alpha}F(k)^\beta$$

et si

$$H = 2^{\frac{1}{\alpha}}CF(0)^{\frac{\beta-1}{\alpha}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\left(2^{\frac{\beta-1}{\alpha}}\right)^i},$$

alors $F(H) = 0$.

Preuve du lemme A.9
Si $F(0) = 0$, le lemme est trivial; on suppose donc que $F(0) > 0$.
Soit $h_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$,

$$h_n = 2^{\frac{1}{\alpha}}CF(0)^{\frac{\beta-1}{\alpha}}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\left(2^{\frac{\beta-1}{\alpha}}\right)^i}.$$

On constate par récurrence sur n que l'on a, pour tout $n \geq 0$, $F(h_n) \leq F(0)/2^n$; en effet, c'est évident pour $n=0$ et, lorsque $n \geq 1$, puisque

$$h_n - h_{n-1} = \frac{2^{\frac{1}{\alpha}} C F(0)^{\frac{\beta-1}{\alpha}}}{\left(2^{\frac{\beta-1}{\alpha}}\right)^{n-1}},$$

on a

$$\begin{array}{rcl} F(h_n) & \leq & \dfrac{C^\alpha}{(h_n - h_{n-1})^\alpha} F(h_{n-1})^\beta \\ & \leq & \dfrac{C^\alpha 2^{(n-1)(\beta-1)}}{2C^\alpha F(0)^{\beta-1}} \times \dfrac{F(0)^\beta}{2^{(n-1)\beta}} \\ & \leq & \dfrac{F(0)}{2^n}. \end{array}$$

F étant décroissante, on en déduit que, pour tout $n \geq 0$, puisque $h_n \leq H$, $F(H) \leq F(h_n) \leq F(0)/2^n$; en faisant tendre n vers l'infini dans cette dernière inégalité, on obtient $F(H) \leq 0$ ce qui conclut la démonstration du lemme. ■

Par un léger abus de notation, lorsque U est un ouvert inclus dans Ω, on peut considérer $\mathcal{L} \in (W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))'$ comme un élément de $W^{-1,p}(U)$; en effet, si $\varphi \in W^{1,p'}_0(U)$, on note $\widetilde{\varphi} \in W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega)$ son extension par 0 hors de Ω et on pose alors $\langle \widetilde{\mathcal{L}}, \varphi \rangle_{(W^{1,p'}_0(U))', W^{1,p'}_0(U)} = \langle \mathcal{L}, \widetilde{\varphi} \rangle_{(W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))', W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega)}$. Etant donné que l'extension par 0 hors de U est linéaire continue $W^{1,p'}_0(U) \to W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega)$, ceci définit bien un $\widetilde{\mathcal{L}} \in W^{-1,p}(U)$ ($\widetilde{\mathcal{L}}$ est en fait l'image de $\mathcal{L}$ par l'application duale de l'extension à Ω par 0 hors de U). On notera dans la suite, par abus, $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$; de même, $L \in (H^1_0(U))'$ désignera aussi la restriction de $\mathcal{L}$ à $H^1_0(U)$.

Lemme A.10 *Sous les hypothèses (A.3)—(A.7), il existe $\delta > 0$ ne dépendant que de*

$$(N, d, \alpha_A, N_*, \chi, r, \Lambda)$$

tel que, pour tout ouvert $U \subset \Omega$ de mesure inférieure à δ, le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} w \in H^1_0(U)\,, \\ \displaystyle\int_U A\nabla w \cdot \nabla \varphi + \int_U \varphi \mathbf{v} \cdot \nabla w = \langle L, \varphi \rangle_{(H^1_0(U))', H^1_0(U)}\,,\ \forall \varphi \in H^1_0(U) \end{array} \right. \tag{A.32}$$

admet une unique solution. Il existe de plus C ne dépendant que de $(N, d, \alpha_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p, \Lambda_L)$ tel que cette solution w vérifie $||w||_{L^\infty(U)} \leq C|U|^{\frac{1}{N} - \frac{1}{p}}$.

Preuve du lemme A.10

Soit U un ouvert inclus dans Ω. On a, par (A.5), pour tout $\varphi \in H^1_0(U)$,

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_U A\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi + \int_U \varphi \mathbf{v} \cdot \nabla\varphi \\ \quad \geq \ \alpha_A || \, |\nabla\varphi| \, ||^2_{L^2(U)} - || \, |\varphi \mathbf{v}| \, ||_{L^2(U)} || \, |\nabla\varphi| \, ||_{L^2(U)} \\ \quad \geq \ \alpha_A || \, |\nabla\varphi| \, ||^2_{L^2(U)} - \chi ||\varphi||_{L^{2^*}(U)} || \, |\nabla\varphi| \, ||_{L^2(U)} - \Lambda ||\varphi||_{L^{\frac{2r}{r-2}}(U)} || \, |\nabla\varphi| \, ||_{L^2(U)}. \end{array}$$

Or d est aussi un majorant du diamètre de U, donc (A.1) est valable avec Ω remplacé par U. De plus, puisque $\frac{2r}{r-2} < \frac{2N}{N-2}$, on peut prendre $q \in]\frac{2r}{r-2}, \frac{2N}{N-2}[$ (le choix d'un tel q ne dépend que de r et N); on déduit donc de l'inégalité précédente et de (A.1) que

$$\int_U A\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi + \int_U \varphi \mathbf{v} \cdot \nabla\varphi \tag{A.33}$$

$$\geq \ (\alpha_A - \chi C_S(N, d, 2, 2^*)) || \, |\nabla\varphi| \, ||^2_{L^2(U)} - \Lambda |U|^{\frac{r-2}{2r} - \frac{1}{q}} ||\varphi||_{L^q(U)} || \, |\nabla\varphi| \, ||_{L^2(U)}$$

$$\geq \ (\alpha_A - \chi C_S(N, d, 2, 2^*) - \Lambda |U|^{\frac{r-2}{2r} - \frac{1}{q}} C_S(N, d, 2, q)) || \, |\nabla\varphi| \, ||^2_{L^2(x_0 + B_R)}. \tag{A.34}$$

Or $\frac{r-2}{2r}-\frac{1}{q}>0$ donc, puisque χ vérifie (A.6), il existe $\delta>0$ ne dépendant que de $(\alpha_A,\chi,N,d,N_*,\Lambda,r,q)$, i.e. uniquement de $(N,d,\alpha_A,N_*,\chi,r,\Lambda)$, tel que, pour tout U vérifiant $|U|\le\delta$,

$$\begin{aligned}&\alpha_A-\chi C_S(N,d,2,2^*)-\Lambda|U|^{\frac{r-2}{2r}-\frac{1}{q}}C_S(N,d,2,q)\\ \geq\ &\alpha_A-\chi C_S(N,d,2,2^*)-\Lambda\delta^{\frac{r-2}{2r}-\frac{1}{q}}C_S(N,d,2,q)=C_0>0.\end{aligned}\tag{A.35}$$

Pour tout U ouvert de mesure inférieure à δ, la forme bilinéaire apparaissant dans (A.32) est donc coercitive sur $H_0^1(U)$; l'existence et l'unicité d'une solution à (A.32) est alors la conséquence directe du théorème de Lax-Milgram.

Prouvons maintenant l'estimation sur $||w||_{L^\infty(U)}$.
Soit, pour $k\ge0$, $S_k(t)=t-T_k(t)$ (i.e. S_k est continue, affine par morceaux, nulle sur $[-k,k]$ et de dérivée égale à 1 hors de $[-k,k]$). Comme $\nabla(S_k(w))=\mathbf{1}_{\{|w|\ge k\}}\nabla w$, on a $\nabla w=\nabla(S_k(w))$ là où $S_k(w)\neq0$; ainsi, en prenant $\varphi=S_k(w)\in H_0^1(U)$ dans (A.32), on obtient

$$\begin{aligned}\langle L,S_k(w)\rangle_{(H_0^1(U))',H_0^1(U)}&=\int_U A\nabla w\cdot\nabla S_k(w)+\int_U S_k(w)\mathbf{v}\cdot\nabla v\\ &=\int_U A\nabla(S_k(w))\cdot\nabla(S_k(w))+\int_U S_k(w)\mathbf{v}\cdot\nabla(S_k(w)).\end{aligned}\tag{A.36}$$

Comme $|U|\le\delta$, (A.36), (A.34) et (A.35) donnent donc

$$\begin{aligned}C_0||\,|\nabla(S_k(w))|\,||^2_{L^2(U)}&\le\langle L,S_k(w)\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))',H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}\\ &=\langle\mathcal{L},S_k(w)\rangle_{(W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))',W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega)}\\ &\le\Lambda_L||S_k(w)||_{W^{1,p'}(U)},\end{aligned}\tag{A.37}$$

avec C_0 ne dépendant que de $(N,d,\alpha_A,N_*,\chi,r,\Lambda)$.
Comme $S_k(w)\in W_0^{1,p'}(U)$, on a, par l'inégalité de Poincaré et puisque d est un majorant du diamètre de U,

$$||S_k(w)||_{W^{1,p'}(U)}=||S_k(w)||_{L^{p'}(U)}+||\,|\nabla(S_k(w))|\,||_{L^{p'}(U)}\le(d+1)||\,|\nabla(S_k(w))|\,||_{L^{p'}(U)}.\tag{A.38}$$

De plus, $\nabla(S_k(w))=0$ hors de $E_k=\{|w|\ge k\}$, donc

$$||\,|\nabla(S_k(w))|\,||_{L^{p'}(U)}\le|E_k|^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}}||\,|\nabla(S_k(w))|\,||_{L^2(U)}.\tag{A.39}$$

(A.37), (A.38) et (A.39) donnent donc

$$C_0||\,|\nabla(S_k(w))|\,||_{L^2(U)}\le(1+d)\Lambda_L|E_k|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}.\tag{A.40}$$

Soit $h>k$; comme $|S_k(w)|\ge h-k$ sur E_h, on a, par (A.1) et puisque $\nabla(S_k(w))=0$ hors de E_k,

$$\begin{aligned}(h-k)|E_h|^{\frac{N-1}{N}}&\le||S_k(w)||_{L^{\frac{N}{N-1}}(U)}\\ &\le C_S(N,d,1,\frac{N}{N-1})||\,|\nabla(S_k(w))|\,||_{L^1(U)}\\ &\le C_S(N,d,1,\frac{N}{N-1})|E_k|^{\frac{1}{2}}||\,|\nabla(S_k(w))|\,||_{L^2(U)}.\end{aligned}$$

Utilisée dans (A.40), cette inégalité donne donc, pour tout $h>k\ge0$,

$$|E_h|\le\frac{C_1^\alpha}{(h-k)^\alpha}|E_k|^\beta\tag{A.41}$$

avec C_1 ne dépendant que de $(N, d, \alpha_A, N_*, \chi, r, \Lambda, \Lambda_L)$, $\alpha = \frac{N}{N-1} > 0$ et $\beta = (1 - \frac{1}{p})\frac{N}{N-1} > 1$ (rappelons que $p > N$).
Le lemme A.9 nous donne alors

$$H_0 = 2^{\frac{1}{\alpha}} C_1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\left(2^{\frac{\beta-1}{\alpha}}\right)^i},$$

ne dépendant que de (C_1, α, β), i.e. ne dépendant que de $(N, d, \alpha_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p, \Lambda_L)$, tel que

$$|E_{H_0 |E_0|^{\frac{\beta-1}{\alpha}}}| = 0,$$

ce qui signifie $|w| \leq H_0 |E_0|^{\frac{\beta-1}{\alpha}}$ presque partout sur U. Comme $\frac{\beta-1}{\alpha} = \frac{1}{N} - \frac{1}{p}$ et $|E_0| = |U|$, cela conclut la preuve de ce lemme. ■

A.3.2 Continuité höldérienne sur les compacts de Ω

Tout d'abord un petit lemme technique, puis le résultat proprement dit.

Lemme A.11 *Soit K un compact de Ω, $R_0 < \mathrm{dist}(K, \partial\Omega)/2$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ essentiellement bornée par C sur K. S'il existe $\delta \in]0,1[$ et C' tels que, pour tout $x \in K$ et tout $n \geq 0$,*

$$\omega\left(u, x, \frac{R_0}{4^n}\right) \leq C' \delta^n,$$

alors il existe $\kappa > 0$ ne dépendant que de δ et C'' ne dépendant que de (C, δ, C', R_0) tels que $u \in \mathcal{C}^{0,\kappa}(K)$ et $||u||_{\mathcal{C}^{0,\kappa}(K)} \leq C''$.

Remarque A.3 *Le fait que l'on parle de $\omega(u, x, R_0/4^n)$ suppose que u est essentiellement bornée sur $x + B_{R_0/4^n}$ pour tout $x \in K$ et tout $n \geq 0$.*

Preuve du lemme A.11
Soit $R \in]0, R_0]$; il existe $n \geq 0$ tel que $R \in]R_0/4^{n+1}, R_0/4^n]$.
On a alors $R_0/(4R) \leq 4^n$, soit $n \ln(4) \geq \ln(R_0/4) - \ln(R)$, d'où $n \geq (\ln(4))^{-1} \ln(R_0/4) - (\ln(4))^{-1} \ln(R)$; puisque $\delta \in]0,1[$, cela donne

$$n \ln(\delta) \leq \ln(\delta)(\ln(4))^{-1} \ln(R_0/4) - \ln(\delta)(\ln(4))^{-1} \ln(R) = \ln((R_0/4)^{\ln(\delta)/\ln(4)}) + \ln(R^{-\ln(\delta)/\ln(4)}).$$

Ainsi, pour un tel n,

$$\delta^n \leq \left(\frac{R_0}{4}\right)^{\frac{\ln(\delta)}{\ln(4)}} \times R^{-\frac{\ln(\delta)}{\ln(4)}} = C_0 R^\kappa,$$

avec C_0 ne dépendant que de (δ, R_0) et $\kappa = -\ln(\delta)/\ln(4) > 0$ ne dépendant que de δ.
De plus, puisque $R \leq R_0/4^n$, on a $\omega(u, x, R) \leq \omega(u, x, R_0/4^n)$, donc

$$\omega(u, x, R) \leq C' C_0 R^\kappa = C_1 R^\kappa, \tag{A.42}$$

où C_1 ne dépend que de (δ, C', R_0).

Cette inégalité permet de voir que, pour tout $x \in K$,

$$\lim_{R \to 0} \frac{1}{|B_R|} \int_{x+B_R} u(t)\, dt$$

existe dans $\mathbb{R}$; pour cela, on voit que lorsque $R \leq R_0$, on a

$$\mathrm{infess}(u, x, R) \leq \frac{1}{|B_R|} \int_{x+B_R} u(t)\, dt \leq \mathrm{supess}(u, x, R).$$

Mais, par (A.42), $\mathrm{supess}(u,x,R)-\mathrm{infess}(u,x,R)=\omega(u,x,R)\to 0$ lorsque $R\to 0$, et $\lim_{R\to 0}\mathrm{supess}(u,x,R)$ existe dans $\mathbb{R}$ (car $R\to\mathrm{supess}(u,x,R)$ est croissante et bornée, lorsque $R\le R_0$, par $||u||_{L^\infty(x_0+B_{R_0})}$ — on a supposé, en parlant de $\omega(u,x,R_0)$, que cette dernière quantité était finie). On en déduit que $\lim_{R\to 0}\mathrm{infess}(u,x,R)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut $\lim_{R\to 0}\mathrm{supess}(u,x,R)$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{R\to 0}\frac{1}{|B_R|}\int_{x+B_R}u$ existe donc aussi dans $\mathbb{R}$.
Comme cette limite vaut, pour presque tout $x\in K$ (en tous les points de Lebesgue de u), $u(x)$, quitte à changer u sur un ensemble de mesure nulle on peut supposer que

$$u(x)=\lim_{R\to 0}\frac{1}{|B_R|}\int_{x+B_R}u(t)\,dt \quad \text{pour tout } x\in K.$$

Dès que $R\le R_0$, on a pour tout $y\in(x+B_R)\cap K$ et tout $\rho<R-||y-x||$, $y+B_\rho\subset x+B_R$, donc

$$\mathrm{infess}(u,x,R)\le\frac{1}{|B_\rho|}\int_{y+B_\rho}u\le\mathrm{supess}(u,x,R)$$

ce qui donne, en faisant $\rho\to 0$ (rappelons que $y\in K$),

$$\mathrm{infess}(u,x,R)\le u(y)\le\mathrm{supess}(u,x,R)$$

c'est à dire, par (A.42),

$$\sup_{(x+B_R)\cap K}u-\inf_{(x+B_R)\cap K}u\le\omega(u,x,R)\le C_1R^\kappa$$

La continuité höldérienne de u sur K est maintenant aisée à voir. En effet, pour tous $(x,y)\in K^2$,

i) Si $|x-y|<R_0$, alors, en prenant $R\in]|x-y|,R_0]$, $|u(x)-u(y)|\le\sup_{x+B_R}u-\inf_{x+B_R}u\le C_1R^\kappa$ c'est à dire, en faisant $R\to|x-y|$, $|u(x)-u(y)|\le C_1|x-y|^\kappa$,

ii) Si $|x-y|\ge R_0$, $|u(x)-u(y)|\le 2||u||_{L^\infty(K)}\le\frac{2||u||_{L^\infty(K)}}{R_0^\kappa}|x-y|^\kappa\le\frac{2C}{R_0^\kappa}|x-y|^\kappa$.

En notant donc $C_2=\sup(C_1,2C/R_0^\kappa)$, qui ne dépend que de (C,δ,C',R_0), on a, pour tous $(x,y)\in K^2$, $|u(x)-u(y)|\le C_2|x-y|^\kappa$; associée à la majoration supposée de $||u||_{L^\infty(K)}$ par C, cette inégalité donne le résultat du lemme. ■

Proposition A.2 *Soit K un compact de Ω et $M>0$. Sous les hypothèses (A.3)—(A.7), il existe*

$$\kappa>0 \textit{ ne dépendant que de } (N,d,\alpha_A,\Lambda_A,N_*,\chi,r,\Lambda,p)$$

et

$$C \textit{ ne dépendant que de } (N,d,\alpha_A,\Lambda_A,N_*,\chi,r,\Lambda,p,\Lambda_L,K,M)$$

tels que, si $u\in H^1(\Omega)$ vérifie $||u||_{L^2(\Omega)}\le M$ et

$$\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla\varphi+\int_\Omega\varphi\mathbf{v}\cdot\nabla u=\langle L,\varphi\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))',H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}\,,\ \forall\varphi\in H^1_0(\Omega)\,, \tag{A.43}$$

alors $u\in\mathcal{C}^{0,\kappa}(K)$ et $||u||_{\mathcal{C}^{0,\kappa}(K)}\le C$.

Preuve de la proposition A.2
Prenons le δ donné par le lemme A.10 (δ ne dépend que de $(N,d,\alpha_A,N_*,\chi,r,\Lambda)$) et $R_0<\mathrm{dist}(K,\partial\Omega)/2$ tel que $|B_{2R_0}|\le\delta$ (R_0 ne dépend que de K et δ, i.e. de $(N,d,\alpha_A,N_*,\chi,r,\Lambda,K)$).

Etape 0: préliminaires.

Soit $x \in K$ et $R \leq R_0$. Par le lemme A.10, et puisque $x + B_{2R} \subset \Omega$, il existe $w_{x,R}$ solution de (A.32) lorsque $U = x + B_{2R}$. $w_{x,R}$ vérifie de plus

$$||w_{x,R}||_{L^\infty(x+B_{2R})} \leq C_0 |B_{2R}|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}} \leq C_1 R^{1-\frac{N}{p}}, \tag{A.44}$$

avec C_0 et C_1 ne dépendant que de $(N, d, \alpha_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p, \Lambda_L)$.
Soit $\varphi \in H_0^1(x + B_{2R})$; en notant $\widetilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$ l'extension de φ à Ω par 0 hors de Ω, on a

$$\begin{aligned} \int_{x+B_{2R}} A\nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_{x+B_{2R}} \varphi \mathbf{v} \cdot \nabla u &= \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla\widetilde{\varphi} + \int_\Omega \widetilde{\varphi}\mathbf{v} \cdot \nabla u \\ &= \langle L, \widetilde{\varphi} \rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)} \\ &= \langle L, \varphi \rangle_{(H^1_0(x+B_{2R}))', H^1_0(x+B_{2R})} \end{aligned}$$

(avec le petit abus de notation concernant $L \in (H_0^1(x + B_{2R}))'$ dont nous avons déja parlé).
Ainsi, $v_{x,R} = u - w_{x,R} \in H^1(x + B_{2R})$ vérifie (A.12) avec $U = x + B_{2R}$.
De la proposition A.1, on déduit l'existence de $\alpha \in]0,1[$ et $C_2 > 0$ ne dépendant que de

$$(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda)$$

tels que

$$||v_{x,R}||_{L^\infty(x+B_R)} \leq C_2 R^{-\frac{N}{2}} ||v_{x,R}||_{L^2(x+B_{2R})} \tag{A.45}$$

$$\omega(v_{x,R}, x, R/4) \leq \alpha\omega(v_{x,R}, x, R). \tag{A.46}$$

Or, par (A.44),

$$\begin{aligned} ||v_{x,R}||_{L^2(x+B_{2R})} &\leq ||u||_{L^2(x+B_{2R})} + ||w_{x,R}||_{L^2(x+B_{2R})} \\ &\leq ||u||_{L^2(\Omega)} + |B_{2R}|^{\frac{1}{2}} ||w_{x,R}||_{L^\infty(x+B_{2R})} \\ &\leq M + |B_{2R_0}|^{\frac{1}{2}} C_1 R_0^{1-\frac{N}{p}} = C_3, \end{aligned}$$

où C_3 ne dépend que de $(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p, \Lambda_L, K, M)$. (A.45) peut donc se re-écrire

$$||v_{x,R}||_{L^\infty(x+B_R)} \leq C_2 C_3 R^{-\frac{N}{2}}. \tag{A.47}$$

Etape 1: borne essentielle de u sur K.
De (A.44) et (A.47) appliqués à $R = R_0$, on déduit, puisque $u = w_{x,R_0} + v_{x,R_0}$ sur $x + B_{R_0}$,

$$||u||_{L^\infty(x+B_{R_0})} \leq C_1 R_0^{1-\frac{N}{p}} + C_2 C_3 R_0^{-\frac{N}{2}} = C_4, \tag{A.48}$$

avec C_4 ne dépendant que de $(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p, \Lambda_L, K, M)$.
Mais on a $||u||_{L^\infty(K)} \leq \sup_{x\in K} ||u||_{L^\infty(x+B_{R_0})}$. En effet, pour voir cela, on commence par recouvrir K par un nombre fini de boules $(x_i + B_{R_0})_{i\in[1,l]}$ (un nombre dénombrable serait en fait suffisant); si on avait $||u||_{L^\infty(K)} > \sup_{i\in[1,l]} ||u||_{L^\infty(x_i+B_{R_0})}$, alors il existerait un ensemble A de mesure non nulle, inclus dans K, tel que $|u| > \sup_{i\in[1,l]} ||u||_{L^\infty(x_i+B_{R_0})}$ sur A; A étant de mesure non nulle et inclus dans K, il existe $i \in [1,l]$ tel que $A \cap (x_i + B_{R_0})$ soit de mesure non-nulle; on aurait alors $|u| > ||u||_{L^\infty(x_i+B_{R_0})}$ sur un ensemble inclus dans $x_i + B_{R_0}$ et de mesure non-nulle, ce qui est une contradiction.
On en déduit donc

$$||u||_{L^\infty(K)} \leq C_4.$$

Etape 2: continuité höldérienne de u.

Comme $u = v_{x,R} + w_{x,R}$ sur $x + B_{R/4}$, il est aisé de constater que $\omega(u, x, R/4) \le \omega(v_{x,R}, x, R/4) + \omega(w_{x,R}, x, R/4)$.
Or, pour tout $\rho \le 2R$,

$$\omega(w_{x,R}, x, \rho) \le 2||w_{x,R}||_{L^\infty(x+B_\rho)} \le 2||w_{x,R}||_{L^\infty(x+B_{2R})} \le 2C_1 R^{1-\frac{N}{p}}, \tag{A.49}$$

donc

$$\omega(u, x, R/4) \le \omega(v_{x,R}, x, R/4) + 2C_1 R^{1-\frac{N}{p}}.$$

De plus, par (A.46), $\omega(v_{x,R}, x, R/4) \le \alpha\omega(v_{x,R}, x, R)$; mais, puisque $v_{x,R} = u - w_{x,R}$ sur $x + B_R$, par (A.49), on a $\omega(v_{x,R}, x, R) \le \omega(u, x, R) + \omega(w_{x,R}, x, R) \le \omega(u, x, R) + 2C_1 R^{1-\frac{N}{p}}$, d'où

$$\omega(u, x, R/4) \le \alpha\omega(u, x, R) + 2C_1 R^{1-\frac{N}{p}} + 2\alpha C_1 R^{1-\frac{N}{p}} = \alpha\omega(u, x, R) + C_5 R^\beta, \tag{A.50}$$

avec $\beta = 1 - \frac{N}{p}$ et C_5 ne dépendant que de $(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p, \Lambda_L)$.

Soit $n \ge 0$; par (A.50) appliqué à $R = R_0/4^n \in]0, R_0]$, on a

$$\omega\left(u, x, \frac{R_0}{4^{n+1}}\right) \le \alpha\omega\left(u, x, \frac{R_0}{4^n}\right) + \frac{C_5 R_0^\beta}{(4^\beta)^n} = \alpha\omega\left(u, x, \frac{R_0}{4^n}\right) + \frac{C_6}{\zeta^n}$$

avec $\zeta > 1$ ne dépendant que de (N, p) et C_6 ne dépendant que de $(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p, \Lambda_L, K)$.
Ceci nous permet de voir par récurrence sur n que, pour tout $n \ge 1$,

$$\omega\left(u, x, \frac{R_0}{4^n}\right) \le \alpha^n\omega(u, x, R_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{C_6\alpha^{n-1-i}}{\zeta^i} \tag{A.51}$$

(cette formule est aussi vérifiée pour $n = 0$ à condition de poser $\sum_{i=0}^{-1} = 0$).
En posant $\gamma = \sup(\alpha, 1/\zeta) \in]0, 1[$ (rappelons que $\alpha \in]0, 1[$ et $\zeta > 1$) qui ne dépend que de

$$(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p),$$

on a, pour tout $i \in [0, n-1]$, puisque $n - 1 - i \ge 0$ et $i \ge 0$,

$$\frac{\alpha^{n-1-i}}{\zeta^i} = \alpha^{n-1-i} \times \left(\frac{1}{\zeta}\right)^i \le \gamma^{n-1-i}\gamma^i = \gamma^{n-1},$$

donc (A.51) nous donne, pour tout $n \ge 0$, et puisque $\omega(u, x, R_0) \le 2||u||_{L^\infty(x+B_{R_0})} \le 2C_4$ (cf (A.48)),

$$\omega\left(u, x, \frac{R_0}{4^n}\right) \le 2C_4\alpha^n + nC_6\gamma^{-1}\gamma^n. \tag{A.52}$$

Prenons $\widetilde{\gamma} \in]\gamma, 1[$ (un tel choix ne dépend que de γ, i.e. de $(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p)$); on a alors

$$n\gamma^n = n\left(\frac{\gamma}{\widetilde{\gamma}}\right)^n \widetilde{\gamma}^n.$$

Or $\gamma/\widetilde{\gamma} < 1$, donc la suite $(n(\gamma/\widetilde{\gamma})^n)_{n\ge 0}$ est bornée par C_7 ne dépendant que de $(\gamma, \widetilde{\gamma})$, i.e. de

$$(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p)$$

Ainsi, $n\gamma^n \le C_7\widetilde{\gamma}^n$ et on a, par (A.52), pour tout $n \ge 0$,

$$\omega\left(u, x, \frac{R_0}{4^n}\right) \le 2C_4\alpha^n + C_6 C_7\gamma^{-1}\widetilde{\gamma}^n,$$

soit, en posant $\delta = \sup(\alpha, \widetilde{\gamma}) \in]0,1[$ (δ ne dépend que de $(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p)$), pour tout $n \geq 0$,

$$\omega\left(u, x, \frac{R_0}{4^n}\right) \leq C_8 \delta^n, \tag{A.53}$$

avec C_8 ne dépendant que de $(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p, \Lambda_L, K, M)$.
Par le lemme A.11, et puisque u est essentiellement bornée sur K par C_4 ne dépendant que de

$$(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p, \Lambda_L, K, M),$$

u est égale presque partout sur K à une fonction continue et il existe $\kappa > 0$ ne dépendant que de $(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p)$ et C_9 ne dépendant que de $(N, d, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p, \Lambda_L, K, M)$ tels que $u \in \mathcal{C}^{0,\kappa}(K)$ avec $||u||_{\mathcal{C}^{0,\kappa}(K)} \leq C_9$, ce qui conclut cette démonstration. ■

A.4 Continuité höldérienne près du bord de Ω

On commence par prouver la continuité dans une carte locale, puis on regroupera toutes les cartes et l'intérieur.

Proposition A.3 *Soit $M \geq 0$. Sous les hypothèses (A.3)—(A.7), (A.10) et (A.11), pour tout $i \in [1, m]$ et tout compact K de O_i, il existe $\kappa > 0$ ne dépendant que de $(h_i, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p)$ et C ne dépendant que de $(h_i, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p, \Lambda_L, K, M)$ tels que, si u vérifie (A.2) et $||u||_{L^2(\Omega)} \leq M$, alors $u \in \mathcal{C}^{0,\kappa}(\Omega \cap K)$ et $||u||_{\mathcal{C}^{0,\kappa}(\Omega \cap K)} \leq C$.*

Preuve de la proposition A.3
On commence par transporter le problème dans une partie de B, puis il faudra différencier selon que (O_i, h_i) vérifie (D), (F) ou (DF).
On note $O_{\rm tr} = h_i(O_i \cap \Omega)$, $\Gamma = h_i(O_i \cap \Gamma_d)$ et $\Gamma_0 = \partial O_{\rm tr} \cap \partial B$.

Etape 1: transport dans $O_{\rm tr}$.
Soit $q \in [1, \infty[$ et E^q l'espace vectoriel des fonction de $W^{1,q}_\Gamma(O_{\rm tr})$ à support compact dans B, muni de la norme de $W^{1,q}(O_{\rm tr})$. L'application

$$\left\{ \begin{array}{ccl} E^q & \longrightarrow & F^q = \{\theta \in W^{1,q}_{O_i \cap \Gamma_d}(O_i \cap \Omega) \mid \theta \text{ est à support compact dans } O_i\} \\ \varphi & \longrightarrow & \varphi \circ h_i \end{array} \right.$$

est linéaire continue bijective, de norme ne dépendant que de (q, h_i) (F^q est muni de la norme de $W^{1,q}(O_i \cap \Omega)$). De plus, par un lemme classique, l'extension par 0 hors de $O_i \cap \Omega$ est une application linéaire continue $F^q \to W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega)$ de norme égale à 1.
La composée de ces deux applications est donc une application linéaire continue

$$T_i^q : E^q \to W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega)$$

dont la norme ne dépend que de (q, h_i).

Soit $\varphi \in E^2$ et $\phi = T_i^2 \varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$. L'équation satisfaite par u nous donne

$$\begin{aligned} \int_{O_i \cap \Omega} A\nabla u \cdot \nabla(\varphi \circ h_i) + \int_{O_i \cap \Omega} \varphi \circ h_i \mathbf{v} \cdot \nabla u &= \int_\Omega A \nabla u \cdot \nabla \phi + \int_\Omega \phi \mathbf{v} \cdot \nabla u \\ &= \langle L, \phi \rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)} \\ &= \langle (T_i^2)^* L, \varphi \rangle_{(E^2)', E^2}, \end{aligned} \tag{A.54}$$

où $(T_i^2)^* : (H^1_{\Gamma_d}(\Omega))' \to (E^2)'$ est la transposée de T_i^2.

En posant $u_{\rm tr} = u_{|O_i\cap\Omega} \circ h_i^{-1} \in H^1_\Gamma(O_{\rm tr})$ (car $u_{|O_i\cap\Omega} \in H^1_{O_i\cap\Gamma_d}(O_i\cap\Omega)$), on a, puisque $||u||_{L^2(\Omega)} \leq M$,

$$||u_{\rm tr}||_{L^2(O_{\rm tr})} \leq ||Jh_i||^{1/2}_{L^\infty(O_i\cap\Omega)} M. \tag{A.55}$$

Sur $O_i\cap\Omega$, $u = u_{\rm tr}\circ h_i$, donc $\nabla u = (h_i')^T\nabla u_{\rm tr}\circ h_i$; on en déduit que, sur $O_i\cap\Omega$,

$$A\nabla u\cdot\nabla(\varphi\circ h_i) = A((h_i')^T\nabla u_{\rm tr}\circ h_i)\cdot((h_i')^T\nabla\varphi\circ h_i) = h_i'A(h_i')^T(\nabla u_{\rm tr}\circ h_i)\cdot(\nabla\varphi\circ h_i)$$

et

$$\varphi\circ h_i\mathbf{v}\cdot\nabla u = \varphi\circ h_i\mathbf{v}\cdot((h_i')^T\nabla u_{\rm tr}\circ h_i) = \varphi\circ h_i h_i'\mathbf{v}\cdot(\nabla u_{\rm tr}\circ h_i);$$

par le théorème de changement de variable ($h_i^{-1} : O_{\rm tr}\to O_i\cap\Omega$ est un homéomorphisme localement lipschitzien), on a donc

$$\begin{aligned}&\int_{O_i\cap\Omega} A\nabla u\cdot\nabla(\varphi\circ h_i) + \int_{O_i\cap\Omega}\varphi\circ h_i\mathbf{v}\cdot\nabla u\\ &\quad= \int_{O_{\rm tr}}(|Jh_i^{-1}|(h_i'A(h_i')^T)\circ h_i^{-1})\nabla u_{\rm tr}\cdot\nabla\varphi + \int_{O_{\rm tr}}\varphi(|Jh_i^{-1}|(h_i'\mathbf{v})\circ h_i^{-1})\cdot\nabla u_{\rm tr}.\end{aligned} \tag{A.56}$$

On a, pour tout $\theta\in E^2\subset E^{p'}$, et puisque $T_i^{p'}\theta = T_i^2\theta$,

$$\langle (T_i^{p'})^*\mathcal{L},\theta\rangle_{(E^{p'})',E^{p'}} = \langle\mathcal{L},T_i^{p'}\theta\rangle_{(W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))',W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega)} = \langle L,T_i^2\theta\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))',H^1_{\Gamma_d}(\Omega)} = \langle (T_i^2)^*L,\theta\rangle_{(E^2)',E^2}.$$

Cela signifie donc que $(T_i^2)^*L = ((T_i^{p'})^*\mathcal{L})_{|E^2}$.
Comme, pour tout $q\in]1,\infty[$, E^q est dense dans $W^{1,q}_{\Gamma\cup\Gamma_0}(O_{\rm tr})$, les fonctions $(T_i^2)^*L\in(E^2)'$ et $(T_i^{p'})^*\mathcal{L}\in(E^{p'})'$ s'étendent en respectivement en

$$L_{\rm tr}\in(H^1_{\Gamma\cup\Gamma_0}(O_{\rm tr}))' \quad\text{et}\quad \mathcal{L}_{\rm tr}\in(W^{1,p'}_{\Gamma\cup\Gamma_0}(O_{\rm tr}))' \text{ telles que } L_{\rm tr} = \mathcal{L}_{{\rm tr}|H^1_{\Gamma\cup\Gamma_0}(O_{\rm tr})}. \tag{A.57}$$

Remarquons aussi au passage que

$$\begin{aligned}||\mathcal{L}_{\rm tr}||_{(W^{1,p'}_{\Gamma\cup\Gamma_0}(O_{\rm tr}))'} &= ||(T_i^p)^*\mathcal{L}||_{(E^{p'})'}\\ &\leq ||(T_i^p)^*||_{\mathcal{L}((W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))',(E^{p'})')}||\mathcal{L}||_{(W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))'}\\ &\leq ||T_i^p||_{\mathcal{L}(E^{p'},W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))}\Lambda_L = \Lambda_{L,{\rm tr}},\end{aligned} \tag{A.58}$$

avec $\Lambda_{L,{\rm tr}}$ ne dépendant que de (p,h_i,Λ_L).

On obtient finalement, par (A.54) et (A.56), pour tout $\varphi\in E^2$,

$$\int_{O_{\rm tr}}(|Jh_i^{-1}|(h_i'A(h_i')^T)\circ h_i^{-1})\nabla u_{\rm tr}\cdot\nabla\varphi + \int_{O_{\rm tr}}\varphi(|Jh_i^{-1}|(h_i'\mathbf{v})\circ h_i^{-1})\cdot\nabla u_{\rm tr} = \langle L_{\rm tr},\varphi\rangle_{(H^1_{\Gamma\cup\Gamma_0}(O_{\rm tr}))',H^1_{\Gamma\cup\Gamma_0}(O_{\rm tr})}.$$

E^2 étant dense dans $H^1_{\Gamma\cup\Gamma_0}(O_{\rm tr})$, on déduit de cette équation que $u_{\rm tr}$ vérifie

$$\left\{\begin{array}{l} u_{\rm tr}\in H^1_\Gamma(O_{\rm tr})\,,\\ \displaystyle\int_{O_{\rm tr}} A_{\rm tr}\nabla u_{\rm tr}\cdot\nabla\varphi + \int_{O_{\rm tr}}\varphi\mathbf{v}_{\rm tr}\nabla u_{\rm tr} = \langle L_{\rm tr},\varphi\rangle_{(H^1_{\Gamma\cup\Gamma_0}(O_{\rm tr}))',H^1_{\Gamma\cup\Gamma_0}(O_{\rm tr})}\,,\ \forall\varphi\in H^1_{\Gamma\cup\Gamma_0}(O_{\rm tr}),\end{array}\right. \tag{A.59}$$

où $A_{tr} = |Jh_i^{-1}|(h_i'A(h_i')^T)\circ h_i^{-1} = \frac{h_i'A(h_i')^T}{|Jh_i|}\circ h_i^{-1}$ (car $Jh_i^{-1} = (Jh_i\circ h_i^{-1})^{-1}$) et $\mathbf{v}_{\rm tr} = |Jh_i^{-1}|(h_i'\mathbf{v})\circ h_i^{-1}$.

Avant de passer à la suite, étudions un peu $A_{\rm tr}$ et $\mathbf{v}_{\rm tr}$.
On a, pour presque tout $x \in O_{\rm tr}$,

$$||A_{\rm tr}(x)|| \le ||Jh_i^{-1}||_{L^\infty(O_{\rm tr})}||h_i'(h_i^{-1}(x))||\,||(h_i')^T(h_i^{-1}(x))||\,||A(h_i^{-1}(x))||,$$

soit, puisque h_i^{-1} transporte les ensembles de mesure nulle sur des ensembles de mesure nulle et, pour $H \in M_N(\mathbb{R})$, $||H^T|| \le ||H||$, pour presque tout $x \in O_{\rm tr}$,

$$||A_{\rm tr}(x)|| \le ||Jh_i^{-1}||_{L^\infty(O_{\rm tr})}||\,||h_i'||\,||^2_{L^\infty(O_i\cap\Omega)}\Lambda_A = \Lambda_{A,{\rm tr}} \tag{A.60}$$

avec $\Lambda_{A,{\rm tr}}$ ne dépendant que de (h_i, Λ_A).
De plus, pour presque tout $x \in O_{\rm tr}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, on a

$$|(h_i')^T(h_i^{-1}(x))\xi| \ge \frac{|\xi|}{||((h_i^{-1})')^T(x)||} \ge \frac{|\xi|}{||\,||(h_i^{-1})'||\,||_{L^\infty(O_{\rm tr})}},$$

donc

$$\begin{aligned}
A_{\rm tr}(x)\xi\cdot\xi &= \frac{h_i'A(h_i')^T}{|Jh_i|}\circ h_i^{-1}(x)\xi\cdot\xi \\
&= \frac{A(h_i^{-1}(x))(h_i')^T(h_i^{-1}(x))\xi\cdot(h_i')^T(h_i^{-1}(x))\xi}{|Jh_i(h_i^{-1}(x))|} \\
&\ge \frac{\alpha_A}{||Jh_i||_{L^\infty(O_i\cap\Omega)}}|(h_i')^T(h_i^{-1}(x))\xi|^2 \\
&\ge \frac{\alpha_A}{||Jh_i||_{L^\infty(O_i\cap\Omega)}||\,||(h_i^{-1})'||\,||^2_{L^\infty(O_{\rm tr})}}|\xi|^2 := \alpha_{A,{\rm tr}}|\xi|^2.
\end{aligned} \tag{A.61}$$

Soit $q \in [1,\infty[$ et $f \in (L^q(O_i\cap\Omega))^N$; on a, pour presque tout $x \in O_{\rm tr}$,

$$|Jh_i^{-1}(x)|\,|(h_i'f)\circ h_i^{-1}(x)| \le ||Jh_i^{-1}||^{1-1/q}_{L^\infty(O_{\rm tr})}||\,||h_i'||\,||_{L^\infty(O_i\cap\Omega)}|Jh_i^{-1}(x)|^{1/q}|f|\circ h_i^{-1}(x),$$

ce qui implique, par changement de variable,

$$||\,|Jh_i^{-1}|\,|(h_i'f)\circ h_i^{-1}|\,||_{L^q(O_{\rm tr})} \le ||Jh_i^{-1}||^{1-1/q}_{L^\infty(O_{\rm tr})}||\,||h_i'||\,||_{L^\infty(O_i\cap\Omega)}||f||_{L^q(O_i\cap\Omega)}$$

(cette égalité est en fait aussi valable avec $q = \infty$). Comme $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ avec $\mathbf{v}_1 \in B(\Omega, N_*, \chi)$ et $\mathbf{v}_2 \in B(\Omega, r, \Lambda)$, cette inégalité appliquée à $(q,f) = (N_*, \mathbf{v}_{1|O_i\cap\Omega})$ et à $(q,f) = (r, \mathbf{v}_{2|O_i\cap\Omega})$ nous permet de voir que

$$\mathbf{v}_{\rm tr} \in B(O_{\rm tr}, N_*, \chi_{\rm tr}) + B(O_{\rm tr}, r, \Lambda_{\rm tr}), \tag{A.62}$$

où $\chi_{\rm tr} = ||Jh_i^{-1}||^{1-1/N_*}_{L^\infty(O_{\rm tr})}||\,||h_i'||\,||_{L^\infty(O_i\cap\Omega)}\chi$ et $\Lambda_{\rm tr} = ||Jh_i^{-1}||^{1-1/r}_{L^\infty(O_{\rm tr})}||\,||h_i'||\,||_{L^\infty(O_i\cap\Omega)}\Lambda$.

Soit K un compact de O_i et $K_0 = h_i(K)$ (c'est un compact de B).
Les trois étapes suivantes consistent à montrer, dans chaque cas (F), (D) et (DF), que $u_{\rm tr}$ est höldérienne sur $K_0 \cap O_{\rm tr}$. On utilisera pour cela des techniques de réflexion et la proposition A.2.

Etape 2: (O_i, h_i) est du type (F).
Dans ce cas, $O_{\rm tr} = B_+$ et $\Gamma = \emptyset$. Nous appelons τ la symétrie par rapport à la dernière variable de $\mathbb{R}^N$ (i.e. $\tau(x_1,\dots,x_N) = (x_1,\dots,x_{N-1},-x_N)$); nous confondrons, dans la suite, τ et sa matrice dans la base canonique.

Définissons $u_{\rm sy}$, $A_{\rm sy}$ et $\mathbf{v}_{\rm sy}$ presque partout sur B par:

- $u_{\rm sy} = u_{\rm tr}$ sur B_+ et $u_{\rm sy} = u_{\rm tr}\circ\tau$ sur $B_- = \tau(B_+)$;

- $A_{\rm sy} = A_{\rm tr}$ sur B_+ et $A_{\rm sy} = \tau A_{\rm tr} \circ \tau\tau$ sur B_- ;
- $\mathbf{v}_{\rm sy} = \mathbf{v}_{\rm tr}$ sur B_+ et $\mathbf{v}_{\rm sy} = \tau\mathbf{v}_{\rm tr} \circ \tau$ sur B_-.

Par un résultat classique, $u_{\rm sy}$ est dans $H^1(B)$ et on a $\nabla u_{\rm sy} = \nabla u$ sur B_+, $\nabla u_{\rm sy} = \tau\nabla u_{\rm tr} \circ \tau$ sur B_-; τ étant de jacobien égal à 1 en valeur absolue, (A.55) nous donne

$$||u_{\rm sy}||_{L^2(B)} \leq 2||Jh_i||^{1/2}_{L^\infty(O_i\cap\Omega)} M = M_0 \tag{A.63}$$

(M_0 ne dépend que de (h_i, M)). τ étant une isométrie, on a, pour presque tout $x \in B$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, par (A.60) et (A.61),

$$||A_{\rm sy}(x)|| \leq \Lambda_{A,\rm tr} \quad \text{ et } \quad A_{\rm sy}(x)\xi\cdot\xi \geq \alpha_{A,\rm tr}|\xi|^2. \tag{A.64}$$

Enfin, (A.62) donne

$$\mathbf{v}_{\rm sy} \in B(B, N_*, 2\chi_{\rm tr}) + B(B, r, 2\Lambda_{\rm tr}). \tag{A.65}$$

Puisque, pour $q \in [1,\infty[$ et $\varphi \in W^{1,q}_0(B)$, on a $\varphi_{|B_+} + \varphi_{|B_-} \circ \tau \in W^{1,q}_{\Gamma_0}(B_+)$ (rappelons que l'on a ici $O_{\rm tr} = B_+$ et $\Gamma_0 = \partial B_+ \cap \partial B$); on peut donc définir $L_{\rm sy} \in (H^1_0(B))'$ et $\mathcal{L}_{\rm sy} \in (W^{1,p'}_0(B))'$ par

$$\langle L_{\rm sy}, \varphi\rangle_{(H^1_0(B))', H^1_0(B)} = \langle L_{\rm tr}, \varphi_{|B_+} + \varphi_{|B_-} \circ \tau\rangle_{(H^1_{\Gamma_0}(B_+))', H^1_{\Gamma_0}(B_+)}$$

et

$$\langle \mathcal{L}_{\rm sy}, \varphi\rangle_{(W^{1,p'}_0(B))', W^{1,p'}_0(B)} = \langle \mathcal{L}_{\rm tr}, \varphi_{|B_+} + \varphi_{|B_-} \circ \tau\rangle_{(W^{1,p'}_{\Gamma_0}(B_+))', W^{1,p'}_{\Gamma_0}(B_+)}.$$

On a alors

$$L_{\rm sy} = \mathcal{L}_{{\rm sy}|H^1_0(B)} \tag{A.66}$$

et $||\mathcal{L}_{\rm sy}||_{(W^{1,p'}_0(B))'} \leq 2\Lambda_{L,\rm tr}$ ($\Lambda_{L,\rm tr}$ est donné dans (A.58)).

Nous allons montrer que $u_{\rm sy}$ vérifie une équation du genre (A.43).
Soit $\varphi \in H^1_0(B)$; en utilisant $\varphi_{|B_+} + \varphi_{|B_-} \circ \tau \in H^1_{\Gamma_0}(B_+)$ dans (A.59), on a

$$\begin{aligned}
&\langle L_{\rm sy}, \varphi\rangle_{(H^1_0(B))', H^1_0(B)} \\
&= \langle L_{\rm tr}, \varphi_{|B_+} + \varphi_{|B_-} \circ \tau\rangle_{(H^1_{\Gamma_0}(B_+))', H^1_{\Gamma_0}(B_+)} \\
&= \int_{B_+} A_{\rm tr}\nabla u_{\rm tr}\cdot\nabla\varphi_{|B_+} + \int_{B_+} \varphi_{|B_+}\mathbf{v}_{\rm tr}\cdot\nabla u_{\rm tr} + \int_{B_+} A_{\rm tr}\nabla u_{\rm tr}\cdot\nabla(\varphi_{|B_-}\circ\tau) \\
&\quad + \int_{B_+} \varphi_{|B_-}\circ\tau\mathbf{v}_{\rm tr}\cdot\nabla u_{\rm tr} \\
&= \int_{B_+} A_{\rm tr}\nabla u_{\rm tr}\cdot\nabla\varphi + \int_{B_+} \varphi\mathbf{v}_{\rm tr}\cdot\nabla u_{\rm tr} + \int_{B_-} A_{\rm tr}\circ\tau(\nabla u_{\rm tr}\circ\tau)\cdot(\tau\nabla\varphi) + \int_{B_-} \varphi\mathbf{v}_{\rm tr}\circ\tau\cdot\nabla u_{\rm tr}\circ\tau \\
&= \int_{B_+} A_{\rm tr}\nabla u_{\rm tr}\cdot\nabla\varphi + \int_{B_+} \varphi\mathbf{v}_{\rm tr}\cdot\nabla u_{\rm tr} + \int_{B_-} (\tau A_{\rm tr}\circ\tau\tau)\nabla(u_{\rm tr}\circ\tau)\cdot\nabla\varphi \\
&\quad + \int_{B_-} \varphi(\tau\mathbf{v}_{\rm tr}\circ\tau)\cdot\nabla(u_{\rm tr}\circ\tau) \\
&= \int_B A_{\rm sy}\nabla u_{\rm sy}\cdot\nabla\varphi + \int_B \varphi\mathbf{v}_{\rm sy}\cdot\nabla u_{\rm sy}.
\end{aligned}$$

Cette équation, vérifiée pour tout $\varphi \in H^1_0(B)$, montre que $u_{\rm sy}$ vérifie (A.43) lorsque Ω est remplacé par B, Γ_d par $\partial\Omega$, A par $A_{\rm sy}$, $\mathbf{v}$ par $\mathbf{v}_{\rm sy}$ et L par $L_{\rm sy}$.

Par la proposition A.2, K_0 étant un compact de B, $u_{\rm sy}$ vérifiant (A.63), $A_{\rm sy}$ vérifiant (A.64), $\mathbf{v}_{\rm sy}$ vérifiant (A.65) avec, par (A.6) et (A.11),

$$0 \leq 2\chi_{\rm tr} < \frac{\alpha_{A,\rm tr}}{C_S(N, d_0, 2, 2^*)}$$

(où $d_0 = 2$ est un majorant du diamètre de B), et $L_{\rm sy}$ vérifiant (A.66), il existe $\kappa > 0$ ne dépendant que de N, d_0, $\alpha_{A,{\rm tr}}$, $\Lambda_{A,{\rm tr}}$, N_*, $2\chi_{\rm tr}$, r, $2\Lambda_{\rm tr}$ et p, i.e. ne dépendant que de

$$(h_i, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p),$$

et C_0 ne dépendant que de N, d_0, $\alpha_{A,{\rm tr}}$, $\Lambda_{A,{\rm tr}}$, N_*, $2\chi_{\rm tr}$, r, $2\Lambda_{\rm tr}$, p, $2\Lambda_{L,{\rm tr}}$, K_0 et M_0, i.e. ne dépendant que de

$$(h_i, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p, \Lambda_L, K, M),$$

tel que $u_{\rm sy} \in \mathcal{C}^{0,\kappa}(K_0)$ et $||u_{\rm sy}||_{\mathcal{C}^{0,\kappa}(K_0)} \le C_0$.
Puisque $u_{\rm sy} = u_{\rm tr}$ sur B_+, on en déduit que $u_{\rm tr} \in \mathcal{C}^{0,\kappa}(K_0 \cap B_+)$ et $||u_{\rm tr}||_{\mathcal{C}^{0,\kappa}(K_0\cap B_+)} \le C_0$.

Etape 3: (O_i, h_i) est de type (D).
La symétrie effectuée est alors cette fois impaire.
On a $O_{\rm tr} = B_+$, $\Gamma = B^{N-1}$ et $\Gamma \cup \Gamma_0 = \partial B_+$. On note toujours τ la symétrie par rapport à la dernière variable de $\mathbb{R}^N$.

Définissons $u_{\rm sy}$, $A_{\rm sy}$ et $\mathbf{v}_{\rm sy}$ presque partout sur B par:

- $u_{\rm sy} = u_{\rm tr}$ sur B_+ et $u_{\rm sy} = -u_{\rm tr} \circ \tau$ sur $B_- = \tau(B_+)$;
- $A_{\rm sy} = A_{\rm tr}$ sur B_+ et $A_{\rm sy} = \tau A_{\rm tr} \circ \tau\tau$ sur B_-;
- $\mathbf{v}_{\rm sy} = \mathbf{v}_{\rm tr}$ sur B_+ et $\mathbf{v}_{\rm sy} = \tau \mathbf{v}_{\rm tr} \circ \tau$ sur B_-.

Puisque $u_{\rm tr} \in H^1_{B^{N-1}}(B_+)$, $u_{\rm sy}$ est dans $H^1(B)$ (on peut prouver ceci en vérifiant, grâce à une intégration par parties dans B_+ et dans B_- et au fait que $u_{{\rm tr}|B^{N-1}} = 0$, que la dérivée au sens des distributions de $u_{\rm sy}$ est la fonction de $L^2(B)$ égale à $\nabla u_{\rm tr}$ sur B_+ et a $-\tau\nabla u_{\rm tr} \circ \tau$ sur B_-). (A.55) nous donne

$$||u_{\rm sy}||_{L^2(B)} \le 2||Jh_i||^{1/2}_{L^\infty(O_i\cap\Omega)} M = M_0 \tag{A.67}$$

(M_0 ne dépend que de (h_i, M)). Comme précédemment, on a, par (A.60) et (A.61),

$$||A_{\rm sy}(x)|| \le \Lambda_{A,{\rm tr}} \quad \text{et} \quad A_{\rm sy}(x)\xi\cdot\xi \ge \alpha_{A,{\rm tr}}|\xi|^2 \quad \text{pour presque tout } x \in B \text{ et tout } \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{A.68}$$

et, par (A.62),

$$\mathbf{v}_{\rm sy} \in B(B, N_*, 2\chi_{\rm tr}) + B(B, r, 2\Lambda_{\rm tr}). \tag{A.69}$$

Pour tout $q \in [1,\infty[$ et tout $\varphi \in W^{1,q}_0(B)$, on a $\varphi_{|B_+} - \varphi_{|B_-} \circ \tau \in W^{1,q}_0(B_+)$; l'appartenance de cette fonction à $W^{1,q}(B_+)$ est évidente. Pour la nullité de la trace, on sait que, τ étant un homéomorphisme bilipschitzien entre B_- et B_+, en notant f la trace de $\varphi_{|B_-}$ sur B_-, la trace sur ∂B_+ de $\varphi_{|B_-} \circ \tau$ est égale à $f \circ \tau$; ainsi, si g désigne la trace de $\varphi_{|B_+}$ sur ∂B_+, la trace de $\varphi_{|B_+} - \varphi_{|B_-} \circ \tau$ est $g - f \circ \tau$; or cette fonction est nulle sur Γ_0 car $f = 0$ sur $\partial B \cap \partial B_-$ et $g = 0$ sur $\partial B \cap \partial B_+$ (puisque $\varphi \in H^1_0(B)$) et aussi nulle sur B^{N-1}, puisque $f \circ \tau_{|B^{N-1}} = f = g$ (les traces de $\varphi_{|B_+}$ et de $\varphi_{|B_-}$ sur B^{N-1} sont égales).
On peut donc définir $L_{\rm sy} \in (H^1_0(B))'$ et $\mathcal{L}_{\rm sy} \in (W^{1,p'}_0(B))'$ par

$$\langle L_{\rm sy}, \varphi\rangle_{(H^1_0(B))', H^1_0(B)} = \langle L_{\rm tr}, \varphi_{|B_+} - \varphi_{|B_-} \circ \tau\rangle_{(H^1_{\Gamma_0}(B_+))', H^1_{\Gamma_0}(B_+)}$$

et

$$\langle \mathcal{L}_{\rm sy}, \varphi\rangle_{(W^{1,p'}_0(B))', W^{1,p'}_0(B)} = \langle \mathcal{L}_{\rm tr}, \varphi_{|B_+} - \varphi_{|B_-} \circ \tau\rangle_{(W^{1,p'}_{\Gamma_0}(B_+))', W^{1,p'}_{\Gamma_0}(B_+)}.$$

On a alors

$$L_{\rm sy} = \mathcal{L}_{{\rm sy}|H^1_0(B)} \tag{A.70}$$

et $||\mathcal{L}_{\rm sy}||_{(W^{1,p'}_0(B))'} \le 2\Lambda_{L,{\rm tr}}$ ($\Lambda_{L,{\rm tr}}$ est donné dans (A.58)).

Nous allons montrer ici aussi que $u_{\rm sy}$ vérifie une équation du genre (A.43).
Soit $\varphi \in H_0^1(B)$. En prenant $\varphi_{|B_+} - \varphi_{|B_-} \circ \tau \in H_0^1(B_+)$ dans (A.59), on a

$$
\begin{aligned}
&\langle L_{\rm sy}, \varphi\rangle_{(H_0^1(B))', H_0^1(B)}\\
&= \langle L_{\rm tr}, \varphi_{|B_+} - \varphi_{|B-} \circ \tau\rangle_{(H^1_{\Gamma_0}(B_+))', H^1_{\Gamma_0}(B_+)}\\
&= \int_{B_+} A_{\rm tr}\nabla u_{\rm tr}\cdot\nabla\varphi_{|B_+} + \int_{B_+}\varphi_{|B_+}\mathbf{v}_{\rm tr}\cdot\nabla u_{\rm tr} - \int_{B_+} A_{\rm tr}\nabla u_{\rm tr}\cdot\nabla(\varphi_{|B_-}\circ\tau)\\
&\quad -\int_{B_+}\varphi_{|B_-}\circ\tau\mathbf{v}_{\rm tr}\cdot\nabla u_{\rm tr}\\
&= \int_{B_+} A_{\rm tr}\nabla u_{\rm tr}\cdot\nabla\varphi + \int_{B_+}\varphi\mathbf{v}_{\rm tr}\cdot\nabla u_{\rm tr} - \int_{B_-} A_{\rm tr}\circ\tau(\nabla u_{\rm tr}\circ\tau)\cdot(\tau\nabla\varphi) - \int_{B_-}\varphi\mathbf{v}_{\rm tr}\circ\tau\cdot\nabla u_{\rm tr}\circ\tau\\
&= \int_{B_+} A_{\rm tr}\nabla u_{\rm tr}\cdot\nabla\varphi + \int_{B_+}\varphi\mathbf{v}_{\rm tr}\cdot\nabla u_{\rm tr} + \int_{B_-}(\tau A_{\rm tr}\circ\tau\tau)\nabla(-u_{\rm tr}\circ\tau)\cdot\nabla\varphi\\
&\quad +\int_{B_-}\varphi(\tau\mathbf{v}_{\rm tr}\circ\tau)\cdot\nabla(-u_{\rm tr}\circ\tau)\\
&= \int_B A_{\rm sy}\nabla u_{\rm sy}\cdot\nabla\varphi + \int_B\varphi\mathbf{v}_{\rm sy}\cdot\nabla u_{\rm sy}.
\end{aligned}
$$

Cette équation, vérifiée pour tout $\varphi \in H_0^1(B)$, montre que $u_{\rm sy}$ vérifie (A.43) lorsque Ω est remplacé par B, Γ_d par $\partial\Omega$, A par $A_{\rm sy}$, $\mathbf{v}$ par $\mathbf{v}_{\rm sy}$ et L par $L_{\rm sy}$.

Comme dans l'étape 2, par la proposition A.2, puisque K_0 est un compact de B, $u_{\rm sy}$ vérifie (A.67), $A_{\rm sy}$ vérifie (A.68), $\mathbf{v}_{\rm sy}$ vérifie (A.69) avec, par (A.6) et (A.11),

$$0 \le 2\chi_{\rm tr} < \frac{\alpha_{A,{\rm tr}}}{C_S(N, d_0, 2, 2^*)}$$

(où $d_0 = 2$ est un majorant du diamètre de B), et $L_{\rm sy}$ vérifie (A.70), il existe $\kappa > 0$ ne dépendant que de N, d_0, $\alpha_{A,{\rm tr}}$, $\Lambda_{A,{\rm tr}}$, N_*, $2\chi_{\rm tr}$, r, $2\Lambda_{\rm tr}$, et p, i.e. ne dépendant que de

$$(h_i, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p),$$

et C_0 ne dépendant que de N, d_0, $\alpha_{A,{\rm tr}}$, $\Lambda_{A,{\rm tr}}$, N_*, $2\chi_{\rm tr}$, r, $2\Lambda_{\rm tr}$, p, $2\Lambda_{L,{\rm tr}}$, K_0 et M_0, i.e. ne dépendant que de

$$(h_i, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p, \Lambda_L, K, M),$$

tel que $u_{\rm sy}$ est κ-höldérienne sur K_0 avec $||u_{\rm sy}||_{\mathcal{C}^{0,\kappa}(K_0)} \le C_0$; $u_{\rm tr}$ étant égale à $u_{\rm sy}$ sur B_+, on en déduit que $u_{\rm tr} \in \mathcal{C}^{0,\kappa}(K_0 \cap B_+)$ et $||u_{\rm tr}||_{\mathcal{C}^{0,\kappa}(K_0\cap B_+)} \le C_0$.

Etape 4: (O_i, h_i) est de type (DF).
On a ici $O_{\rm tr} = B_{++}$ et $\Gamma = \Gamma_2$. Il faut effectuer une symétrie par rapport à l'hyperplan $x_{N-1} = 0$ pour se ramener au cas (D).

Soit τ' la réflexion par rapport à $x_{N-1} = 0$ (i.e. $\tau'(x) = (x_1, \ldots, x_{N-2}, -x_{N-1}, x_N)$). On définit u_1, A_1 et $\mathbf{v}_1$ presque partout sur B_+ par

- $u_1 = u_{\rm tr}$ sur B_{++}, $u_1 = u_{\rm tr} \circ \tau'$ sur $B_{-+} = \tau'(B_{++})$;
- $A_1 = A_{\rm tr}$ sur B_{++}, $A_1 = \tau' A_{\rm tr} \circ \tau'\tau'$ sur B_{-+};
- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{\rm tr}$ sur B_{++}, $\mathbf{v}_1 = \tau'\mathbf{v}_{\rm tr} \circ \tau'$ sur B_{-+};

Par (A.55), on a $u_1 \in H^1_{B^{N-1}}(B_+)$ (rappelons que $u_{\rm tr} \in H^1_\Gamma(B_{++})$) et

$$||u_1||_{L^2(B_+)} \le 2||Jh_i||^{1/2}_{L^\infty(O_i\cap\Omega)} M = ||Jh_i||^{1/2}_{L^\infty(O_i\cap\Omega)} M_1 \tag{A.71}$$

(M_1 ne dépend que de (h_i, M)). Par (A.60) et (A.61), on a

$$||A_1(x)|| \le \Lambda_{A,\rm tr} \quad \text{et} \quad A_1(x)\xi\cdot\xi \ge \alpha_{A,\rm tr}|\xi|^2 \quad \text{pour presque tout } x \in B_+ \text{ et tout } \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{A.72}$$

Enfin, par (A.62),

$$\mathbf{v}_1 \in B(B_+, N_*, \chi_1) + B(B_+, r, \Lambda_1), \tag{A.73}$$

avec $\chi_1 = 2\chi_{\rm tr}$ et $\Lambda_1 = 2\Lambda_{\rm tr}$.

Pour $q \in [1,\infty[$ et $\varphi \in W^{1,q}_0(B_+)$, on a $\varphi_{|B_{++}} + \varphi_{|B_{-+}} \circ \tau' \in W^{1,q}_{\Gamma\cup\Gamma_0}(B_{++})$, donc on peut définir $L_1 \in (H^1_0(B_+))'$ et $\mathcal{L}_1 \in (W^{1,p'}_0(B_+))'$ par

$$\langle L_1, \varphi\rangle_{(H^1_0(B_+))', H^1_0(B_+)} = \langle L_{\rm tr}, \varphi_{|B_{++}} + \varphi_{|B_{-+}} \circ \tau'\rangle_{(H^1_{\Gamma\cup\Gamma_0}(B_{++}))', H^1_{\Gamma\cup\Gamma_0}(B_{++})}$$

et

$$\langle \mathcal{L}_1, \varphi\rangle_{(W^{1,p'}_0(B_+))', W^{1,p'}_0(B_+)} = \langle \mathcal{L}_{\rm tr}, \varphi_{|B_{++}} + \varphi_{|B_{-+}} \circ \tau'\rangle_{(W^{1,p'}_{\Gamma\cup\Gamma_0}(B_{++}))', W^{1,p'}_{\Gamma\cup\Gamma_0}(B_{++})},$$

et on a

$$L_1 = \mathcal{L}_{1|H^1_0(B_+)} \tag{A.74}$$

avec $||\mathcal{L}_1||_{(W^{1,p'}_0(B_+))'} \le 2\Lambda_{L,\rm tr} = \Lambda_{L,1}$ ($\Lambda_{L,1}$ ne dépend que de (h_i, p, Λ_L)).

Soit $\varphi \in H^1_0(B_+)$; en utilisant $\varphi_{|B_{++}} + \varphi_{|B_{-+}} \circ \tau' \in H^1_{\Gamma\cup\Gamma_0}(B_{++})$ dans (A.59), on voit avec le même genre de calculs que dans l'étape 1 que $u_1 \in H^1_{B^{N-1}}(B_+)$ vérifie

$$\int_{B_+} A_1\nabla u_1 \cdot \nabla\varphi + \int_{B_+} \varphi\mathbf{v}_1 \cdot \nabla u_1 = \langle L_1, \varphi\rangle_{(H^1_0(B_+))', H^1_0(B_+)}.$$

u_1 vérifie donc (A.59) lorsque $O_{\rm tr}$ est remplacé par B_+, Γ par B^{N-1}, $A_{\rm tr}$ par A_1, $\mathbf{v}_{\rm tr}$ par $\mathbf{v}_1$ et $L_{\rm tr}$ par L_1. Avec ces changements de notation, u_1 vérifie (A.55) avec M remplacé par M_1 (propriété (A.71)), A_1 vérifie (A.60) et (A.61) (propriété (A.72)), L_1 vérifie (A.57) et (A.58) avec $\mathcal{L}_{\rm tr}$ remplacé par $\mathcal{L}_1$ et $\Lambda_{L,\rm tr}$ remplacé par $\Lambda_{L,1}$ (propriété (A.74)) et $\mathbf{v}_1$ vérifie (A.62) avec $\chi_{\rm tr}$ remplacé par χ_1 et $\Lambda_{\rm tr}$ remplacé par Λ_1 (propriété (A.73)).
Par (A.6) et (A.11), on constate que

$$0 \le 2\chi_1 < \frac{\alpha_{A,\rm tr}}{C_S(N,2,2,2^*)}.$$

On peut donc appliquer le raisonnement de l'étape 3 en changeant tous les indices "tr" en indices "1", et on en déduit qu'il existe $\kappa > 0$ ne dépendant que de N, $\alpha_{A,\rm tr}$, $\Lambda_{A,\rm tr}$, N_*, $2\chi_1$, r, $2\Lambda_1$ et p, i.e. ne dépendant que de

$$(h_i, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p),$$

et C_0 ne dépendant que de N, $\alpha_{A,\rm tr}$, $\Lambda_{A,\rm tr}$, N_*, $2\chi_1$, r, $2\Lambda_1$, p, $2\Lambda_{L,1}$, K_0 et M_1, i.e. ne dépendant que de

$$(h_i, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p, \Lambda_L, K, M),$$

tel que $u_1 \in \mathcal{C}^{0,\kappa}(K_0 \cap B_+)$ et $||u_1||_{\mathcal{C}^{0,\kappa}(K_0\cap B_+)} \le C_0$; comme $u_{\rm tr} = u_1$ sur B_{++}, on en déduit que $u_{\rm tr} \in \mathcal{C}^{0,\kappa}(K_0 \cap B_{++})$ et que $||u_{\rm tr}||_{\mathcal{C}^{0,\kappa}(K_0\cap B_{++})} \le C_0$.

Etape 5: conclusion.

On a donc trouvé, dans l'étape 2, 3 ou 4 (selon que (O_i, h_i) est de type (F), (D) ou (DF)), $\kappa > 0$ ne dépendant que de

$$(h_i, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p),$$

et C_0 ne dépendant que de

$$(h_i, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p, \Lambda_L, K, M)$$

tels que $u_{\rm tr} \in \mathcal{C}^{0,\kappa}(K_0 \cap O_{\rm tr})$ et que $||u_{\rm tr}||_{\mathcal{C}^{0,\kappa}(K_0\cap O_{\rm tr})} \le C_0$ (rappelons que $K_0 = h_i(K)$). Or $u = u_{\rm tr} \circ h_i$ sur $O_i \cap \Omega$; u est donc continue sur $K \cap \Omega$ et

$$||u||_{L^\infty(K\cap\Omega)} \le ||u_{\rm tr}||_{L^\infty(h_i(K\cap\Omega))} = ||u_{\rm tr}||_{L^\infty(K_0\cap O_{\rm tr})} \le C_0. \tag{A.75}$$

De plus, h_i étant lipschitzienne sur O_i, on a, pour tous $(x, y) \in K \cap \Omega$, puisque $((h_i(x), h_i(y)) \in K_0 \cap O_{\rm tr}$,

$$|u(x) - u(y)| = |u_{\rm tr}(h_i(x)) - u_{\rm tr}(h_i(y))| \le C_0|h_i(x) - h_i(y)|^\kappa \le C_0 \mathrm{Lip}(h_i)^\kappa |x - y|^\kappa. \tag{A.76}$$

(A.75) et (A.76) permettent de voir que $u \in \mathcal{C}^{0,\kappa}(K \cap \Omega)$ et donnent une estimation de la norme de u dans cet espace, ce qui conclut la démonstration. ■

A.5 Preuve du théorème A.1

La preuve du théorème est maintenant un simple agencement des propositions A.2 et A.3

Preuve du théorème A.1
Lorsque les hypothèses du théorème A.1 sont satisfaites, alors celles des propositions A.2 et A.3 le sont aussi.

On note $\kappa_0 > 0$ le κ donné par la proposition A.2 et $\kappa_i > 0$ le κ donné par la proposition A.3 appliquée à $i \in [1, m]$. On pose $\kappa = \inf(\kappa_0, \ldots, \kappa_m) > 0$; κ ne dépend que de $(\Omega, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p)$.

Pour U ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $s > 0$, on note $K_s(U) = \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \backslash U) \ge 1/s\}$; les $(K_s(U))_{s>0}$ sont des compacts de U et l'union croissante des intérieurs des $(K_s(U))_{s>0}$ est U.
Pour uniformiser les notations, O_0 désignera Ω.
Puisque $\overline{\Omega} \subset \cup_{i=0}^m O_i$, on a $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{s>0} \cup_{i=0}^m \mathrm{int}(K_s(O_i))$; $\overline{\Omega}$ étant un compact de $\mathbb{R}^N$, on peut extraire de ce recouvrement ouvert un recouvrement fini; cela signifie, la suite $(\cup_{i=0}^m \mathrm{int}(K_s(O_i)))_{s>0}$ étant croissante, qu'il existe $s_0 > 0$ tel que $\overline{\Omega} \subset \cup_{i=0}^m \mathrm{int}(K_{s_0}(O_i))$ (le choix de s_0 ne dépend que de Ω).
En notant C_0 le C donné par la proposition A.2 appliquée à $K = K_{2s_0}(O_0) = K_{2s_0}(\Omega)$ et, pour $i \in [1, m]$, C_i le C donné par la proposition A.3 appliquée à i et $K = K_{2s_0}(O_i)$, on pose $H = \sup_{i\in[0,m]} C_i$; puisque le choix de s_0 ne dépend que de Ω, H ne dépend que de $(\Omega, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p, \Lambda_L, M)$.

Par les propositions A.2 et A.3, u étant (presque partout égale à une fonction) continue sur chaque ouvert $\mathrm{int}(K_{s_0}(O_i)) \cap \Omega$ ($i \in [0, m]$) et Ω étant la réunion de ces ouverts, u est (presque partout égale à une fonction) continue sur Ω.
De plus, puisque pour tout $i \in [0, m]$, $\sup_{K_{s_0}(O_i)\cap\Omega} |u| \le \sup_{K_{2s_0}(O_i)\cap\Omega} |u| \le H$, on a

$$\sup_\Omega |u| \le H. \tag{A.77}$$

Soit $(x, y) \in \Omega$. Notons $i \in [0, m]$ un indice tel que $x \in K_{s_0}(O_i)$ (un tel indice existe par choix de s_0).
Si $y \in K_{2s_0}(O_i)$, alors par la proposition correspondante (proposition A.2 si $i = 0$, proposition A.3 si $i > 0$), on a $|u(x) - u(y)| \le H|x - y|^{\kappa_i} \le H|x - y|^{\kappa_i - \kappa}|x - y|^\kappa$; or, d étant un majorant du diamètre de Ω, on a $|x - y| \le d$ et $\kappa_i - \kappa \ge 0$, donc $|x - y|^{\kappa_i-\kappa} \le d^{\kappa_i-\kappa}$. On a donc, pour tout $y \in K_{2s_0}(O_i)$, $|u(x) - u(y)| \le H d^{\kappa_i-\kappa}|x - y|^\kappa$.

Si ce n'est pas le cas, on a $\mathrm{dist}(y, \mathbb{R}^N \backslash O_i) < 1/(2s_0)$, donc, par 1-lipschitziannité de la fonction distance,

$$|x-y| \geq \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \backslash O_i) - \mathrm{dist}(y, \mathbb{R}^N \backslash O_i) \geq \frac{1}{s_0} - \frac{1}{2s_0} = \frac{1}{2s_0};$$

on déduit alors de (A.77) que $|u(x) - u(y)| \leq 2H \leq 2H(1/2s_0)^{-\kappa}|x-y|^\kappa$.
En posant donc $C = \sup(\sup_{i\in[0,m]}(Hd^{\kappa_i - \kappa}), 2H(2s_0)^\kappa)$, qui ne dépend que de

$$(\Omega, \alpha_A, \Lambda_A, N_*, \chi, r, \Lambda, p, \Lambda_L, M),$$

on a, pour tous $(x, y) \in \Omega$,

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\kappa. \tag{A.78}$$

Le résultat du théorème découle alors de (A.77) et (A.78). ∎