UNIVERSITÉ DE PROVENCE, AIX-MARSEILLE I

Centre de Mathématiques et Informatique

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

Discipline : *Mathématiques*

présentée et soutenue publiquement par

Jérôme DRONIOU

ÉTUDE DE CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Soutenue le 18 juin 2001

devant le jury composé de :

M. **Thierry GALLOUËT**	PR, Université de Provence,	Directeur de Thèse,
M. **Olivier GUES**	PR, Université de Nice,	Président du jury,
M. **Emmanuel GRENIER**	PR, ENS Lyon,	Rapporteur,
M. **Michel PIERRE**	PR, ENS Cachan (Antenne de Bretagne),	Rapporteur,
M. **Philippe TCHAMITCHIAN**	PR, Université d'Aix-Marseille III.	

Remerciements

Thank Yoooouuuuu

C'est une étape délicate que celle des remerciements: il ne faut oublier personne, ne citer personne qui ne veuille l'être (pour une raison ou une autre), n'en faire ni trop ni trop peu...

Tout d'abord, merci à mes professeurs de prépa, Alain Soyeur et Michel "Jimmy" Gonnord, pour m'avoir donné le goût des mathématiques.

Merci à toute l'équipe du DMI de l'ENS Lyon, pour m'avoir initié aux "véritables" mathématiques. En particulier, bravo à Julien Michel qui a le plus souvent résisté à mes tentatives de le faire tourner en bourrique.

En parlant d'initiation, je ne peux oublier de remercier Jean-Pierre Raymond, qui m'a, le premier, fait réaliser que, en recherche et contrairement à ce que les cours peuvent nous laisser penser, on n'est absolument pas sûr de trouver!

Les gens avec qui j'ai eu des discussions intéressantes et fructeuses sont nombreux mais, parmi eux, je voudrais mentionner tout particulièrement Lucio Boccardo, Robert Eymard, Raphaèle Herbin, Olivier Gues, Alain Prignet et Alessio Porretta. Merci aussi à tous, permanents et doctorants, au CMI.

Je tiens à exprimer ma gratitude aux membres du Jury pour avoir accepté de jauger mon travail, ainsi que pour leurs remarques et questions pertinentes.

Merci à Mark Knopfler pour les paroles des chansons (et pour les chansons elles-mêmes).

Mais mes plus intenses remerciements vont bien entendu à Thierry Gallouët qui a accepté d'encadrer mon travail, qui a toujours su m'intéresser au plus haut point avec ses questions et commentaires, tout en me laissant énormément de liberté. Il a aussi beaucoup de mérite de m'avoir supporté tout ce temps, bien que j'ai été "trés méchant avec lui", comme il se plait à le dire... si quelqu'un est responsable de là où j'en suis actuellement, c'est sans conteste lui.

Table des Matières

Introduction **9**

I Problèmes Elliptiques Non Coercitifs 17

1 Non Coercive Linear Elliptic Problems **19**

1.1 Introduction . . . 19
1.1.1 Notations . . . 19
1.1.2 The Equations . . . 19
1.1.3 The Zero-Order Terms . . . 21
1.1.4 Hypotheses . . . 22
1.2 Existence and Uniqueness Results . . . 23
1.2.1 The main result . . . 23
1.2.2 Existence and uniqueness in a nonlinear case . . . 28
1.3 Regularity Results . . . 29
1.3.1 L^∞ bound . . . 30
1.3.2 Hölder continuity . . . 31
1.4 The Duality Method for Non Regular Right Hand Sides . . . 33
1.5 Appendix: Technical Lemmas . . . 34

2 Quelques résultats supplémentaires **37**

2.1 Cas non-linéaire . . . 37
2.1.1 Hypothèses . . . 37
2.1.2 Théorème d'existence . . . 39
2.1.3 Théorème d'unicité . . . 43
2.2 Contre-exemple à la régularité höldérienne . . . 46
2.2.1 Construction d'un Γ_d singulier . . . 46
2.2.2 Non-continuité sur $\partial\Omega$ de la solution de (2.34) . . . 47
2.3 Différentes formulations pour les solutions par dualité . . . 48
2.3.1 Lien avec le cadre variationnel . . . 48
2.3.2 Formulation intégrale forte de (1.46) . . . 49
2.3.3 Formulation intégrale faible de (1.47) . . . 50
2.4 Théorèmes de stabilité pour les solutions par dualité . . . 51
2.4.1 Résultat de stabilité pour la solution de (1.46) . . . 51
2.4.2 Lemmes techniques . . . 52
2.4.3 Convergence des solutions de (1.4) . . . 54
2.4.4 Preuve du théorème de stabilité . . . 56
2.4.5 Résultat de stabilité pour la solution par dualité de (1.48) . . . 61

3 Un Schéma Volumes Finis **65**
3.1 L'équation . . . 65
3.2 La discrétisation . . . 65
3.3 Estimations a priori sur la solution approchée . . . 67
3.3.1 Lemmes généraux . . . 67
3.3.2 Estimations a priori sur $\ln(1 + |u_{\mathcal{T}}|)$ . . . 68
3.3.3 Estimations a priori sur $u_{\mathcal{T}}$ . . . 72
3.4 Existence, unicité et convergence de la solution approchée . . . 74
3.5 Estimation d'erreur . . . 79
3.6 Concernant le décentrement amont . . . 80

II Unicité des Solutions Obtenues comme Limites d'Approximations 83

4 A Uniqueness Result for SOLA **85**
4.1 Introduction . . . 85
4.1.1 Notations . . . 85
4.1.2 The SOLA and the main result . . . 88
4.2 The "dual" equation . . . 89
4.3 Proof of the uniqueness and stability theorems . . . 99

5 Remarques sur l'unicité des SOLA **103**
5.1 A propos de la définition des SOLA . . . 103
5.2 Contre-exemple à l'unicité des SOLA . . . 104

III La Condition d'Hyperbolicité pour les Systèmes Linéaires du Premier Ordre 107

6 The Hyperbolicity Condition **109**
6.1 Introduction . . . 109
6.2 Definitions, remarks and results . . . 110
6.2.1 A preliminary result . . . 112
6.3 The 1-dimensional case . . . 113
6.3.1 Particularities of the 1-dimensional case . . . 113
6.3.2 Necessity of the Hyperbolicity Condition . . . 114
6.4 The multi-dimensional case . . . 118
6.4.1 On the uniqueness of solutions to (6.1) . . . 118
6.4.2 Proof of the main result . . . 120
6.5 About the linearization of a particular non-hyperbolic problem . . . 122
6.6 Appendix . . . 123
6.6.1 Harmonic functions . . . 123
6.6.2 Lemmas for Proposition 6.2 . . . 125

7 Un contre-exemple intéressant **129**
7.1 Hyperbolique "Fourier" et Hyperbolique au sens de [37] . . . 129
7.1.1 Cas $N = l = 2$ (d'après l'exercice 3.9 de [67]) . . . 129
7.1.2 Cas général . . . 130
7.2 Non-résolubilités du système défini par (A_1, A_2) . . . 131
7.2.1 Une fonction f particulière . . . 133
7.2.2 Non-résolubilité $L^\infty - L^1_{\mathrm{loc}}$ . . . 136
7.2.3 Non-résolubilité $BV_{\mathrm{loc}} - BV_{\mathrm{loc}}$ . . . 136
7.3 Instabilité d'un système hyperbolique par rapport au flux . . . 137

IV Autres Travaux **141**

8 A Density Result in Sobolev Spaces **143**
8.1 Introduction . . . 143
8.1.1 Definitions . . . 143
8.1.2 Main Results . . . 144
8.2 Theorem 8.1 and a generalization . . . 145
8.3 Polygonal open set . . . 149
8.4 Applications, Counter-example and Generalization . . . 152
8.4.1 A new formulation for the Neumann problem . . . 152
8.4.2 Application to the convergence of a finite volume scheme . . . 153
8.4.3 Counter-example . . . 153
8.4.4 Mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions . . . 154

9 A Finite Volume - Mixed Finite Element Method **157**
9.1 Introduction . . . 157
9.2 The discretization . . . 160
9.2.1 Admissible discretizations . . . 160
9.2.2 Discrete function spaces . . . 161
9.2.3 The mixed finite element scheme . . . 162
9.2.4 The finite volume scheme . . . 163
9.3 The convergence of the mixed method . . . 163
9.4 The convergence of the finite volume method . . . 168
9.4.1 L^∞ estimate . . . 169
9.4.2 A weak inequality on the spatial variations . . . 169
9.4.3 The proof of the convergence theorem 9.2 . . . 171
9.5 Uniqueness of the weak solution under regularity on the data . . . 174
9.6 Appendix : technical lemmata . . . 175

10 Parabolic Capacity and soft measures... **183**
10.1 Introduction . . . 183
10.2 Parabolic capacity and measures . . . 185
10.2.1 Capacity . . . 185
10.2.2 Quasicontinuous functions . . . 190
10.2.3 Measures . . . 195
10.3 The IBV problem with data in $\mathcal{M}_0(Q)$. . . . 204
10.3.1 Variational case . . . 205
10.3.2 Definition and properties of renormalized solutions . . . 207
10.3.3 Proof of existence and uniqueness theorems . . . 213
10.3.4 Data in $L^1 + W'$. . . . 226
10.4 Appendix: Proof of the density theorem . . . 226
10.4.1 The case of compactly supported functions . . . 226
10.4.2 The general case . . . 226

A Continuité Höldérienne **233**
A.1 Introduction . . . 233
A.1.1 Notations Générales . . . 233
A.1.2 L'Equation . . . 234
A.1.3 Matrice de Diffusion . . . 234
A.1.4 Terme de convection . . . 234
A.1.5 Second Membre . . . 234
A.1.6 Conditions au bord . . . 234

A.1.7 Le Théorème 235
A.2 L'équation sans second membre 235
A.2.1 Résultats préliminaires 236
A.2.2 Preuve de la proposition A.1 240
A.3 A l'intérieur de Ω 246
A.3.1 Le problème de Dirichlet sur des petits ouverts 246
A.3.2 Continuité höldérienne sur les compacts de Ω 249
A.4 Continuité höldérienne près du bord de Ω 253
A.5 Preuve du théorème A.1 260

Introduction

It's a mystery to me — the game commences
For the usual fee — plus expenses
Confidential information — it's in a diary
This is my investigation — it's not a public inquiry.

Nous étudions dans ce document différents problèmes d'équations aux dérivées partielles. La majeure partie de ce document concerne des équations de type elliptique (parties I et II, annexe A et une partie du chapitre 9), mais nous abordons aussi certaines questions concernant les systèmes et équations de type hyperboliques (partie III ainsi qu'une partie du chapitre 9) et les équations de type parabolique (chapitre 10).

Partie I

La première partie de ce travail consiste en une étude d'équations elliptiques non coercitives.

On sait depuis longtemps qu'une bonne manière d'aborder les équations aux dérivées partielles de la forme

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) + \mathrm{div}(\mathbf{v}u) + bu = L & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.1}$$

(avec Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$) est de considérer une formulation dite "variationnelle" (ou, pour être plus exact, faible) de ces problèmes, faisant intervenir la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v - \int_\Omega u\mathbf{v} \cdot \nabla v + \int_\Omega buv \tag{0.2}$$

sur l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ (on impose des hypothèses d'intégrabilité *ad-hoc* sur les données pour que tous les termes de (0.2) aient un sens lorsque $(u,v) \in H_0^1(\Omega)$). Le théorème de Lax-Milgram (un outil linéaire) donne alors, sous l'hypothèse que a est "coercitive" (i.e. $a(u,u) \geq \alpha ||u||_{H_0^1}^2$ pour un certain $\alpha > 0$), l'existence et l'unicité de la solution, en un sens faible, à (0.1). Il existe un autre outil, le théorème de Leray-Lions (principalement utilisé pour les équations non-linéaires), qui donne, sinon l'unicité, du moins l'existence d'une solution sous une hypothèse de coercitivité sur a plus faible (à savoir: $\frac{a(u,u)}{||u||_{H_0^1}} \to \infty$ lorsque $||u||_{H_0^1} \to \infty$) ([1]).

[1]Le théorème de Leray-Lions demande aussi une propriété de monotonie de l'opérateur.

On sait bien que ce genre d'hypothèse n'est pas totalement dispensable: par exemple, il est impossible, à cause de l'existence de valeurs propres pour l'opérateur $\Delta : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, d'espérer pouvoir résoudre, dans le cadre fonctionnel $H^1_0(\Omega)$, l'équation $-\Delta u + bu = f$ pour tout second membre f (même très régulier) et tout $b \in \mathbb{R}$.
Il est alors généralement imposé des hypothèses structurelles de la forme: A est une fonction matricielle bornée uniformément définie positive et $\frac{1}{2}\mathrm{div}(\mathbf{v}) + b \geq 0$. Sous ces conditions, la forme bilinéaire a précédemment définie satisfait les hypothèses du théorème de Lax-Milgram et on a donc un cadre d'existence et d'unicité de la solution de (0.1).

Chapitre 1

Nous prouvons, dans le chapitre 1, que l'on peut se passer de condition structurelle sur la partie convective de (0.1) (i.e. d'une hypothèse sur $\mathrm{div}(\mathbf{v})$). En considérant des hypothèses de coercitivité uniquement sur A (A est uniformément définie positive) et sur b (b est positive), la forme bilinéaire (0.2) n'est alors plus, en général, coercitive (ni au sens de Lax-Milgram, ni au sens de Leray-Lions), mais nous obtenons néanmoins existence et unicité d'une solution à (0.1) dans un cadre variationnel, i.e. une unique solution dans $H^1_0(\Omega)$. En fait, nous ne nous limitons pas au cas de conditions au bord de type Dirichlet: nous considérons des conditions au bord mixtes Dirichlet/Fourier. De même, nous ne traitons pas uniquement des termes convectifs sous forme conservative: grâce au caractère linéaire de l'équation, nous prouvons aussi l'existence et l'unicité d'une solution faible lorsque le terme convectif est sous forme non conservative.

La méthode employée pour obtenir ce résultat fait appel au degré topologique de Leray-Schauder. Grâce à cet outil, prouver l'existence d'une solution à (0.1) se ramène à obtenir des estimations *a priori* sur les solutions de cette équation.
Une astuce de Boccardo nous permet tout d'abord d'obtenir une estimation sur $\ln(1 + |u|)$; cette estimation n'est utile que par le contrôle qu'elle implique sur la mesure de Lebesgue des ensembles $E_k = \{x \in \Omega \mid |u(x)| > k\}$. La principale originalité de ce travail réside dans l'estimation de $S_k(u) = u - \max(-k, \min(u, k))$, qui utilise le contrôle précédemment trouvé sur la mesure de E_k afin d'éliminer le terme quadratique gênant en $S_k(u)$. L'estimation sur $T_k(u) = u - S_k(u)$ est, de son côté, assez évidente.
L'unicité de la solution de (0.1) s'obtient simplement en prouvant l'existence d'une solution pour le problème dual, ce qui revient à considérer (0.1) dans lequel le terme convectif sous forme conservative $\mathrm{div}(\mathbf{v}u)$ est remplacé par un terme convectif sous forme non conservative $\mathbf{v} \cdot \nabla u$.

Dans [25], De Giorgi prouve la continuité höldérienne sur les compacts de Ω des fonctions $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant $-\mathrm{div}(A\nabla u) = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dans [70], Stampacchia prouve la continuité höldérienne sur $\overline{\Omega}$ des solutions variationnelles de problèmes elliptiques avec seconds membres non nuls (mais assez réguliers) et conditions au bord de type Dirichlet([2]); les méthodes employées par Stampacchia sont aussi sensiblement différentes de celles employées par De Giorgi (et font appel à plus de pré-requis).
Dans l'annexe A, nous montrons, grâce à des techniques de transport et réflexion, que les résultats de [70] concernant la continuité höldérienne sur $\overline{\Omega}$ des solutions de problèmes elliptiques sont aussi valables lorsque l'on considère certaines conditions au bord mixtes. Nous avons aussi écrit une preuve du résultat de [70] concernant la continuité sur les compacts de Ω en utilisant les méthodes, beaucoup plus abordables à notre goût, de [25]. Enfin, la manière dont les différentes estimations obtenues dépendent des données a été détaillée, ce qui est essentiel pour établir les résultats de stabilité de la section 2.4.

Munis de l'annexe A, nous prouvons alors la régularité höldérienne des solutions d'équations non coercitives de la forme (0.1), ce qui permet ensuite, par la méthode de dualité de [70], d'obtenir l'existence et l'unicité (en un certain sens) de solutions pour des problèmes elliptiques non coercitifs à seconds membres mesures.

[2]La preuve dans [70] de la continuité au bord ne nous parait cependant pas claire...

Chapitre 2

Le chapitre 2 contient quelques extensions, remarques et résultats supplémentaires à propos des thèmes abordés dans le premier chapitre.

Nous commençons par parler du cas non-linéaire non-coercitif. Comme nous le signalons en section 1.2.2, l'outil que nous employons dans le chapitre 1, pour prouver l'existence de solutions à des problèmes variationnels linéaires non-coercitif, est non-linéaire et permet de traiter certains termes de convections non-linéaires. Cependant, la méthode générale employée dans le cas linéaire (i.e. prouver l'existence d'un point fixe à une application en utilisant le degré topologique) n'est pas très adaptée pour traiter les équations dont les parties non-convectives sont non-linéaires, i.e. de la forme

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) + \mathrm{div}(\Phi(x,u)) + b|u|^{p-2}u = L & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.3}$$

(car on ne peut, en général, définir comme dans le cas linéaire l'application dont nous pourrions chercher un point fixe). Nous prouvons cependant que, associées à une méthode d'approximation déjà employée dans [8], le même genre d'estimations que dans le cas linéaire permet de prouver l'existence d'une solution "variationnelle" (i.e. lorsque L est dans le dual de l'espace d'energie $W_0^{1,p}(\Omega)$ associé à l'opérateur $\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u))$) à (0.3).

Pour établir, dans l'annexe A, les résultats de continuité höldérienne des solutions de problèmes elliptiques linéaires avec conditions au bord mixtes, nous imposons une hypothèse sur la manière dont ces conditions au bord se repartissent sur $\partial\Omega$ (hypothèse (1.42)). Nous prouvons dans la section 2.2 que l'on ne peut se passer d'une hypothèse de ce genre.

Les sections 2.3 et 2.4 établissent quelques résultats concernant les solutions par dualité de problèmes elliptiques à seconds membres mesures, définies dans le premier chapitre. La première de ces sections donne quelques éléments pour comprendre pourquoi ce que nous appelons "solution par dualité" est effectivement, en un sens, solution d'un problème elliptique; la seconde section établit un résultat de stabilité concernant ces solutions par dualité, résultat bien naturel (mais pas évident) puisque l'on a existence et unicité de cette notion de solution.

Chapitre 3

Dans le troisième et dernier chapitre de cette partie, nous abordons le problème de l'étude numérique, via un schéma de type volumes finis, des équations linéaires non coercitives dont nous parlons dans le premier chapitre. Essentiellement, cela consiste à adapter les méthodes d'estimation du cas continu au cas discret.
Cependant, au lieu de considérer une discrétisation de (0.1) avec $L \in L^2(\Omega)$, comme c'est le cas par exemple dans [37], nous discrétisons cette équation avec un second membre de la forme $L = f + \mathrm{div}(G)$ où $f \in L^2(\Omega)$ et $G \in (\mathcal{C}(\overline{\Omega}))^N$; cela n'entraine pas vraiment de difficulté supplémentaire par rapport au cas étudié dans [37], mais cela a l'énorme avantage de faire apparaitre les estimations d'erreur comme conséquences immédiates des estimations *a priori* sur les solutions du problème discrétisé.
Nous généralisons aussi [37] dans le sens ou nous prouvons la convergence du schéma volumes finis non pas uniquement quand la convection $\mathbf{v}$ est supposée $\mathcal{C}^1$ mais aussi quand elle n'est supposée que continue.

Partie II

La deuxième partie concerne l'unicité des solutions à des problèmes elliptiques non linéaires avec seconds membres mesures.

Comme nous l'avons signalé auparavant, Stampacchia a introduit dans [70] une notion de solution pour des problèmes elliptiques *linéaires* avec seconds membres mesures, notion qui donne existence et unicité de la solution. Dans le cas de problèmes elliptiques non-linéaires, Boccardo et Gallouët ont prouvé dans [10] (voir aussi [66]) l'existence d'une solution (en un sens faible assez naturel) par des méthodes d'approximation: en prenant f_n régulier qui converge vers la mesure μ du second membre et en notant u_n une solution du problème avec f_n comme second membre, on peut prouver que (à une sous-suite près) u_n converge vers une solution faible u du problème avec μ comme second membre (u est alors appelée "SOLA": solution obtenue comme limite d'approximations). Cependant, on sait (cf [65]) que, même dans le cas linéaire, cette solution faible n'est pas unique. Plusieurs notions de solutions ont alors été développées afin de récupérer l'unicité: SOLA (voir [22]), solutions entropiques (voir [4]) ou encore solutions renormalisées (voir [21]).

Chapitre 4

Dans le premier chapitre de cette partie, nous établissons l'unicité dans le cadre des SOLA des solutions d'équations elliptiques non-linéaires (définies par des opérateurs de Leray-Lions $\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u))$ agissant sur $H^1(\Omega)$) avec des mesures générales comme second membre. Un résultat similaire avait été établi par Boccardo (voir [6]), mais avec des hypothèses plus restrictives sur la fonction a (a indépendant de u et de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à ∇u) et des conditions au bord de type Dirichlet. La principale originalité de ce chapitre est que nous acceptons une certaine dépendance de a par rapport à u, ainsi que des conditions au bord plus générales.

La méthode employée pour prouver cette unicité est une méthode de dualité. En effet, bien que le problème considéré ne soit pas linéaire, notre résultat d'unicité se base sur l'existence (et la régularité) d'une solution à un problème "dual": si u et v sont deux SOLA pour un même second membre et $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ sont des approximations de u et v, alors on se rend compte que $u_n - v_n$ vérifie un problème elliptique linéaire (P_n) avec un second membre qui tend vers 0 dans $(\mathcal{C}(\overline{\Omega}))'$ faible-$*$; en utilisant la solution φ_n d'un problème dual de (P_n) comme fonction test dans (P_n), et grâce aux estimations höldériennes que l'on peut avoir sur φ_n, on peut passer à la limite([3]) et constater alors que $u = v$.

A la fin de ce même chapitre, nous établissons un résultat de stabilité sur la SOLA, beaucoup plus simple à obtenir (comme on peut s'y attendre, vu la définition même de ce qu'est une SOLA) que le résultat de stabilité des solutions par dualité dont nous parlons dans la partie I.

Chronologiquement parlant, ce chapitre a été établi avant les résultats (ou du moins une partie des résultats) de la partie I. En effet, lorsque l'on considère un opérateur non-linéaire ne dépendant pas de u, comme c'est le cas dans [6], le problème dual de (P_n) que l'on doit résoudre est un problème elliptique classique

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A_n \nabla \varphi_n) = f & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.4}$$

Mais lorsque l'on accepte une dépendance de a par rapport à u, le problème dual de (P_n) devient

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A_n \nabla \varphi_n) + \mathbf{v}_n \cdot \nabla \varphi_n = f & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.5}$$

où

$$\mathbf{v}_n = \frac{a(x,u_n,\nabla v_n) - a(x,v_n,\nabla v_n)}{u_n - v_n}.$$

On voit alors clairement qu'il est impossible d'imposer une condition sur $\mathrm{div}(\mathbf{v}_n)$ et que résoudre (0.5) revient donc à résoudre un problème linéaire non coercitif, avec un terme convectif sous forme non

[3] Car le second membre de (P_n) converge dans $(\mathcal{C}(\overline{\Omega}))'$ faible-$*$ et $(\varphi_n)_{n\geq 1}$, étant bornée dans un espace de Hölder, converge fortement à une sous-suite près dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

conservative. C'est donc lors de l'étude de l'unicité de la SOLA que la résolution de problèmes linéaires non coercitifs s'est avérée nécessaire, et c'est pourquoi une étude sommaire (dans un cadre assez restreint) de ces problèmes apparait dans le chapitre 4. Si nous avons ensuite étudié plus à fond ces questions dans la partie I, c'est qu'elles nous paraissaient intéressantes en soi.

Chapitre 5

Le chapitre 5 clos cette deuxième partie. Nous y discutons tout d'abord brièvement de la manière dont on peut approcher les solutions de problèmes elliptiques à données mesures (et donc sur la définition même de SOLA).
Notre méthode pour prouver l'unicité de la SOLA repose essentiellement sur un résultat de continuité höldérienne des solutions de problèmes elliptiques linéaires; nous avons vu, dans la partie I, que pour obtenir un tel résultat lorsque l'on considère des conditions au bord mixtes, il est nécessaire de supposer une hypothèse de "bonne répartition" (hypothèse (1.42)) de ces conditions au bord. Nous prouvons à la fin du chapitre 5 que, sans une hypothèse de ce genre, le résultat d'unicité des SOLA n'est plus valable en général.

Partie III

Dans cette partie, nous nous intéressons aux systèmes linéaires d'équations du premier ordre à coefficients constants de la forme

$$\begin{cases} u_t + \sum_{i=1}^N A_i u_{x_i} = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{0.6}$$

(Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $(A_i)_{i\in[1,N]}$ sont des matrices réelles $l \times l$).

Il est bien connu que, selon la manière dont on veut résoudre ces systèmes, il faut ou non imposer certaines conditions sur les matrices $(A_i)_{i\in[1,N]}$: si l'on cherche à résoudre localement (0.6) avec des conditions initiales analytiques, aucune condition n'est requise (théorème de Cauchy-Kowalewska, voir [33]); si l'on veut résoudre, lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$, ce système pour toute condition initiale $\mathcal{C}^\infty$, alors il faut supposer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, $A(\xi) = \sum_{i=1}^N \xi_i A_i$ a des valeurs propres réelles (théorème de Lax-Mizohata, voir [18]); si l'on veut résoudre (0.6) pour $\Omega = \mathbb{R}^N$ et toute condition initiale dans $(L^2(\mathbb{R}^N))^l$, un raisonnement passant par la transformée de Fourier nous montre qu'il faut supposer que $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} ||iA(\xi)|| < \infty$ (voir [67]). Toutes ces conditions sont nécessaires et suffisantes dans le cadre considéré, et ont été énoncées de la plus faible à la plus forte.

Cependant, aucune de ces conditions ne recouvre exactement le cas qui intéresse les mathématiciens qui étudient les discrétisations des systèmes du premier ordre. En effet, de nombreux schémas numériques dans ce domaine (schéma de Roe, de VFRoe; voir [37] par exemple) demandent, pour discrétiser un système de la forme

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}(f(u)) = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{0.7}$$

(où $f = (f_1, \ldots, f_N)$ avec $f_i : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$), de résoudre des problèmes de la forme (0.6) avec une condition initiale de type "Riemann" (i.e. constante de part et d'autre d'un certain hyperplan de $\mathbb{R}^N$). Ce genre de condition initiale ne rentre ni dans le cadre du théorème de Lax-Mizohata (elle n'est pas dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$), ni dans le cadre "Fourier" (i.e. avec une condition initiale de type $L^2(\mathbb{R}^N)$). On pourrait éventuellement, à l'aide d'un théorème de propagation à vitesse finie ou en utilisant des espaces construits sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ (de la forme $H^s(\mathbb{R}^N)$ pour $s < 0$), considérer que les conditions initiales de type Riemann "rentrent" dans le cadre Fourier, mais ce serait certainement assez inadapté: en effet, on demanderait alors à résoudre (0.6) pour beaucoup trop de condition initiales (pour tous les u_0 dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ ou dans $H^s(\mathbb{R}^N)$) et non pas uniquement pour les conditions initiales qui nous intéressent dans ce cas particulier (conditions initiales de type Riemann).

Chapitre 6

Nous établissons, dans le chapitre 6, une condition nécessaire et suffisante pour que (0.6) ait une solution pour toute condition initiale de type Riemann; il faut noter que, grâce à un résultat de propagation à vitesse finie que nous prouvons dans ce chapitre, la solution en question est alors unique, à condition que $\Omega = \mathbb{R}^N$ (i.e. que l'on ne considère pas de condition au bord).
Cette condition nécessaire et suffisante (que nous appelons "hyperbolicité" de (0.6), comme dans [37], même si nous sommes conscients que la terminologie dans ce domaine n'est pas évidente) est simplement la suivante: pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, $A(\xi) = \sum_{i=1}^N \xi_i A_i$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Elle est évidemment strictement plus forte que la condition obtenue dans le cadre du théorème de Lax-Mizohata et on prouve, au début du chapitre 7, qu'elle est strictement plus faible que la condition obtenue dans le cadre "Fourier".

Il faut aussi noter que, au cours de notre preuve, nous retrouvons deux phénomènes connus: en considérant le système unidimensionnel

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t + Au_x = 0 & \text{dans }]0,T[\times\mathbb{R}, \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}, \end{array} \right. \tag{0.8}$$

on voit que si A a des valeurs propres complexes (non-réelles), alors on ne pourra en général résoudre ce système que pour des conditions initiales analytiques (théorème de Lax-Mizohata) et, si A a des blocs de Jordan non triviaux, alors la solution de (0.8) est en général moins dérivable en espace que ne l'est u_0 (on peut perdre autant de dérivées que la taille du plus gros bloc de Jordan de A moins 1).

Chapitre 7

Dans la remarque 6.2, nous donnons un système particulier qui, affirmons-nous, montre la différence entre notre condition d'"hyperbolicité" et la condition obtenue par analyse de Fourier. Au début du chapitre 7, nous prouvons ces dires. Ce système est ensuite, dans le reste du chapitre, étudié un peu plus à fond, car il se révèle finalement assez riche.
Il permet par exemple de montrer que la condition d'hyperbolicité n'est en général pas suffisante pour résoudre (0.6) pour toute condition initiale dans L^∞ ou dans BV_{loc} (si l'on veut éviter de perdre des dérivées). Et il permet aussi de prouver que, contrairement à ce qui se passe dans le cas scalaire (cf [54]), la solution d'un système d'équations du genre (0.8) peut ne pas dépendre continuement de la matrice A définissant ce système: si $A_n \to A_\infty$ et même si, pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, le problème (0.8) avec $A = A_n$ est bien posé au sens de Hadamard dans $(L^2(\mathbb{R}))^l$, la solution de (0.8) avec $A = A_n$ peut ne pas converger vers la solution de ce problème avec $A = A_\infty$.

Partie IV

Cette partie rassemble divers autres travaux de recherche.

Chapitre 8

Le chapitre 8 est un résultat de densité dans les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Nous prouvons que, sous certaines hypothèses sur l'ouvert considéré (Ω est soit un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$, soit un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^N$), les fonctions régulières satisfaisant une condition de Neumann sur $\partial\Omega$ sont denses dans $W^{1,p}(\Omega)$; nous établissons aussi une généralisation au cas des conditions au bord mixtes et un contre-exemple dans le cas d'un ouvert insuffisament régulier (mais quand même à frontière lipschitzienne). Quelques applications de ces résultats sont données, comme l'écriture d'une formulation du problème de Neumann en faisant passer (comme c'est possible pour le problème de Dirichlet) toutes les dérivées sur les fonctions tests, ou encore la possibilité de simplifier certaines démonstrations et de généraliser certains théorèmes de convergence de schémas volumes finis (voir [45] et [55]).

Chapitre 9

Dans le chapitre 9, nous étudions une discrétisation éléments finis mixtes — volumes finis pour un système modélisant, de manière simplifiée, un écoulement diphasique (formé de deux phases immiscibles) au travers d'un milieu poreux. Le système se réduit à une équation elliptique donnant une des deux inconnues, la seconde étant obtenue par résolution d'une équation de transport dont le champ de vitesses est donné par le gradient de la première inconnue. En l'absence de termes de diffusion, ce cas de découplage est le seul sur lequel des résultats mathématiques sont connus quant à l'existence d'une solution dans un sens faible. Il existait déjà plusieurs résultats de convergence de schémas numériques pour ce système, avec différentes méthodes pour discrétiser l'équation elliptique (éléments finis conformes, volumes finis). Nous introduisons dans ce chapitre des maillages non usuels dans le cadre des éléments finis (les mailles ne sont pas forcément polygonales) et une méthode d'éléments finis mixtes pour l'équation elliptique, dont l'intérêt est de traiter de façon précise des cas hétérogènes et anisotropes sur des maillages très généraux (les méthodes citées précédemment posent des difficultés de fabrication de maillages compatibles avec les hétérogénéités et les anisotropies), ce qui correspond à un besoin industriel bien identifié. Le raisonnement est assez classique, mais les difficultés rencontrées pour traiter les preuves mathématiques dans le cas des mailles considérées demandent des traitements nouveaux.

Chapitre 10

Le chapitre 10 comporte essentiellement deux parties. Dans la première, nous introduisons la capacité parabolique à l'aide d'une approche fonctionnelle dans le même esprit que [62]. Nous établissons ensuite un théorème de décomposition des mesures (en espace-temps) ne chargeant pas les ensembles de capacité parabolique nulle, similaire au résultat obtenu dans [12] pour le cas elliptique. Dans la deuxième partie, nous prouvons, grâce à cette décomposition, l'existence et l'unicité d'une solution renormalisée pour un problème parabolique non-linéaire dont le second membre est une mesure ne chargeant pas les ensembles de capacité parabolique nulle.

Enfin, pour clore ce panorama, nous souhaiterions signaler quelques autres travaux de recherche qui ne figurent pas dans ce document mais ont, pour certains, des liens avec quelques-un des chapitres qui suivent.
Le premier de ces travaux s'est effectué hors du cadre de cette thèse. Il s'agit d'un article paru dans Nonlinear Analysis, TMA: "Optimal Pointwise Control of Semilinear Parabolic Equations" (vol. **39** (2000), pp 135-156), co-écrit avec Jean-Pierre Raymond suite à un stage de magistère effectué sous sa direction.
Le chapitre 9 (en particulier l'appendice) s'appuie beaucoup sur le polycopié [31]. Ce travail est en grande partie non original mais comporte certaines études sur les ouverts "faiblement lipschitziens" (appelés "sous-variété lipschitzienne N-dimensionnelle de $\mathbb{R}^N$" dans [42] et plus généraux que les ouverts à frontière lipschitzienne de [58]) — en particulier la preuve de l'existence d'une normale extérieure et du théorème de Stokes pour ces ouverts — qui sont, à notre connaissance, nouvelles.
Beaucoup de résultats de densité et d'intégration par parties (dissimulées) du chapitre 10 trouvent leur justification au travers des résultats de [32]. On retrouve dans ce polycopié des résultats classiques (tels que les théorèmes d'injections compactes d'Aubin et de Simon), mais certains résultats (comme la différence entre $L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ et $L^\infty(]0,T[\times\Omega)$, des résultats de densité ou la justification de certaines identifications) sont, semble-t-il, nouveaux.

- Le chapitre 1 est un article accepté pour publication dans Potential Analysis.

- Les sections 2.2 et 2.3, ainsi que la section A.4 de l'annexe (concernant le traitement des conditions au bord mixtes) sont en grande partie tirées, avec quelques légères modifications, de l'article [29] publié dans Advances in Differential Equations.

- Le chapitre 4 est un article co-écrit avec Thierry Gallouët et accepté pour publication dans Rendiconti di Matematica.
- Le chapitre 6 est un article actuellement soumis pour publication.
- Le chapitre 8 est un article actuellement soumis pour publication.
- Le chaptre 9 est un article en préparation, co-écrit avec Robert Eymard, Danielle Hilhorst et Xiao Dong Zhou.
- Le chapitre 10 est un article en préparation, co-écrit avec Alessio Porretta et Alain Prignet.

And I'm on the edge
Of an endless fall
Sure enough
He's come to call
Got to go now
Get on that bus
Me and the wanderlust.

Etude de certaines Equations aux Dérivées Partielles

Résumé

La première partie de ce travail concerne les équations elliptiques non coercitives. Nous prouvons, tout d'abord dans un cadre linéaire, l'existence et l'unicité d'une solution faible dans l'espace d'énergie habituel $H^1(\Omega)$ pour une classe d'équations de convection-diffusion pour lesquelles le terme de convection provoque la perte de coercitivité. Nous prouvons des résultats de régularité höldérienne sur les solutions de ces équations qui permettent ensuite de résoudre ces mêmes équations avec un second membre mesure. Nous étendons aussi les résultats d'existence et d'unicité d'une solution dans des cas variationnels non-linéaires non-coercitifs et nous étudions, pour une équation elliptique linéaire non-coercitive, la convergence d'un schéma volumes finis.
La deuxième partie concerne l'unicité des solutions à des problèmes elliptiques non-linéaires avec seconds membres mesure.
La troisième partie aborde la question de la condition d'hyperbolicité des systèmes du premier ordre à coefficients constants. Nous prouvons une CNS pour qu'un tel système ait une solution pour toute condition initiale de type Riemann (condition initiale naturelle dans l'étude des discrétisations numériques de ces systèmes). A l'aide d'un système particulier, nous étudions ensuite la différence entre notre CNS et les diverses conditions d'hyperbolicité de la littérature, puis nous prouvons que la solution d'un système hyperbolique n'est pas toujours stable par rapport au flux.
La quatrième partie rassemble quelques autres travaux. Le premier concerne la densité dans $W^{1,p}(\Omega)$ des fonctions régulières satisfaisant une condition de Neumann. Le second est l'étude d'une discrétisation EF mixtes—VF pour un écoulement diphasique à travers un milieu poreux. Le troisième et dernier est l'étude des mesures sur $]0,T[\times\Omega$ ne chargeant pas les boréliens de capacité parabolique nulle et l'application de cette étude à la résolution d'une équation parabolique non-linéaire avec second membre mesure.

Mots-clés: Equations elliptiques non coercitives, Termes de convection, Solutions par dualité, Régularité höldérienne, Données mesures, Unicité, Stabilité, Hyperbolicité, Condition initiale de type Riemann, Densité dans les espaces de Sobolev, Schéma éléments finis mixtes—volumes finis, Capacité parabolique et mesures, Solutions renormalisées.

Study of some Partial Differential Equations

Abstract

The first part of this work concerns non-coercive elliptic equations. We first prove existence and uniqueness of a weak solution in the usual energy space $H^1(\Omega)$ for a class of linear convection-diffusion equations in which the convection term entails the loss of coercivity. We prove Hölder regularity results for the solutions of these equations, and this allows us to solve the same equations with a measure right-hand side. We also extend the existence and uniqueness results to the variational nonlinear noncoercive case. We study then, for a linear noncoercive elliptic equation, the convergence of a finite volume scheme.
The second part concerns the uniqueness of solutions to nonlinear elliptic problems with a measure right-hand side.
In the third part, we study the hyperbolicity condition for first order systems with constant coefficients. We prove a necessary and sufficient condition for such a system to have solutions for any initial condition of Riemann type (a natural initial condition in the study of numerical schemes for such systems). Thanks to a particular system, we study the difference between our condition and the several hyperbolicity conditions of the literature, and we then prove that the solution of a hyperbolic system is not always stable with respect to the flux.
The fourth part gathers some other works. The first work concerns the density in $W^{1,p}(\Omega)$ of regular functions satisfying a Neumann condition. The second is the study of a Mixed Finite Element—Finite Volume scheme for a two-fluids flow through a porous media. The third and last is the study of measures on $]0,T[\times\Omega$ that do not charge sets of null parabolic capacity and the application of this study to a nonlinear parabolic equations with measure right-hand side.

Laboratoire: LATP (UMR 6632), CMI, Université de Provence, 39 rue Joliot-Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France.