Partie I

Problèmes Elliptiques Non Coercitifs

Chapitre 1

Non Coercive Linear Elliptic Problems

J. Droniou.

Abstract We study here some linear elliptic partial differential equations (with Dirichlet, Fourier or mixed boundary conditions), to which are added convection terms (first order perturbations) that entail the loss of the classical coercivity property. We prove existence, uniqueness and regularity results for the solutions to these problems.

1.1 Introduction

1.1.1 Notations

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) with Lipschitz continuous boundary. We denote by $\mathbf{n}$ the unit normal to $\partial\Omega$ outward to Ω and by σ the measure on $\partial\Omega$.
$x \cdot y$ denotes the usual euclidean scalar product of two vectors $(x, y) \in \mathbb{R}^N$; $|\cdot|$ is the associated euclidean norm.
When E is a measurable subset of $\mathbb{R}^N$, $|E|$ denotes the Lebesgue measure of E.
For $q \in [1, \infty]$, q' denotes the conjugate exponent of q (that is to say $1/q + 1/q' = 1$). The space $(L^q(\Omega))^N$ is endowed with the norm $||F||_{(L^q(\Omega))^N} = ||\,|F|\,||_{L^q(\Omega)}$; $B(q, R)$ denotes the closed ball in $(L^q(\Omega))^N$ of center 0 and radius R.
If Γ is a measurable subset of $\partial\Omega$, $W^{1,q}_\Gamma(\Omega)$ is the space of all functions in $W^{1,q}(\Omega)$ (the usual Sobolev space) the trace of which is null on Γ; it is endowed with the same norm as $W^{1,q}(\Omega)$, that is to say $||v||_{W^{1,q}(\Omega)} = ||v||_{L^q(\Omega)} + ||\,|\nabla v|\,||_{L^q(\Omega)}$. When $q = 2$, we denote as usual $W^{1,2} = H^1$.
We take, when $N \geq 3$, $N_* = N$ and, when $N = 2$, $N_* \in]2, \infty[$.

1.1.2 The Equations

The kinds of equations we will study are

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\mathrm{div}(A\nabla\mathcal{U}) - \mathrm{div}(\mathbf{v}\mathcal{U}) + b\mathcal{U} = \mathcal{L} & \text{in} & \Omega, \\ \mathcal{U} = \mathcal{U}_d & \text{on} & \Gamma_d, \\ A\nabla\mathcal{U} \cdot \mathbf{n} + (\lambda + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathcal{U} = \mathcal{U}_f & \text{on} & \Gamma_f, \end{array} \right. \tag{1.1}$$

and

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\mathrm{div}(A^T\nabla\mathcal{V}) + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathcal{V} + b\mathcal{V} = \mathcal{L} & \text{in} & \Omega, \\ \mathcal{V} = \mathcal{V}_d & \text{on} & \Gamma_d, \\ A^T\nabla\mathcal{V} \cdot \mathbf{n} + \lambda\mathcal{V} = \mathcal{V}_f & \text{on} & \Gamma_f \end{array} \right. \tag{1.2}$$

(where Γ_d and Γ_f are measurable subsets of $\partial\Omega$, the union of which is $\partial\Omega$ and such that $\sigma(\Gamma_d \cap \Gamma_f) = 0$).

In fact, we will only study the variational (or weak) formulations of these equations; using functions $\widetilde{\mathcal{U}}$ and $\widetilde{\mathcal{V}}$ the trace on $\partial\Omega$ of which are $\mathcal{U}_d$ and $\mathcal{V}_d$, searching weak solutions of (1.1) or (1.2) comes down to searching solutions of

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \displaystyle\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega u\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega bu\varphi + \int_{\Gamma_f}\lambda u\varphi\,d\sigma = \langle L,\varphi\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))',H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\varphi\in H^1_{\Gamma_d}(\Omega) \end{array}\right. \tag{1.3}$$

or

$$\left\{\begin{array}{l} v \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \displaystyle\int_\Omega A^T\nabla v\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega \varphi\mathbf{v}\cdot\nabla v + \int_\Omega bv\varphi + \int_{\Gamma_f}\lambda v\varphi\,d\sigma = \langle L,\varphi\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))',H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\varphi\in H^1_{\Gamma_d}(\Omega) \end{array}\right. \tag{1.4}$$

(with $u = \mathcal{U} - \widetilde{\mathcal{U}}$, $v = \mathcal{V} - \widetilde{\mathcal{V}}$ and L which takes into account $\mathcal{L}$ and $(\widetilde{\mathcal{U}},\mathcal{U}_f)$ or $(\widetilde{\mathcal{V}},\mathcal{V}_f)$).

In order that all the terms in (1.3) and (1.4) be defined, the minimal hypotheses on the datas are, thanks to the Sobolev injections: $A : \Omega \to M_N(\mathbb{R})$ is a matrix-valued essentially bounded measurable function, $b \in L^{\frac{N_*}{2}}(\Omega)$, $\lambda \in L^{N_*-1}(\partial\Omega)$ and $\mathbf{v} \in (L^{N_*}(\Omega))^N$.

The classical framework of study for linear elliptic problems is the Lax-Milgram Theorem, which demands the coercivity of the bilinear form appearing in (1.3) or (1.4), i.e. additional hypotheses on the datas.
The main coercivity hypothesis is on A, to ensure that the principal part of the operator is elliptic (see Hypothesis (1.9)).
In order that the lower order terms do not to cause the loss of this coercivity, it is usual to add then hypotheses on $\mathbf{v}$, b, and λ. For the pure Dirichlet condition ($\Gamma_f = \emptyset$), this can be

$$-\frac{1}{2}\mathrm{div}(\mathbf{v}) + b \geq c \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\Omega),$$

with c "small enough" in $L^{\frac{N_*}{2}}(\Omega)$ (in general, c is taken equal to 0) — notice that this condition adds an hypothesis on the *regularity* of $\mathbf{v}$ (when this inequality is satisfied, $\mathrm{div}(\mathbf{v})$ must be a Radon measure on Ω).
In the case of Fourier or mixed boundary conditions, to cleanly express these additional hypotheses, we need more regularity on $\mathbf{v}$ (to give a sense to $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$). Moreover, in these cases, when we want to obtain regularity results, the minimal regularity on $\mathbf{v}$ seemed to be the Lipschitz continuity (because of the many integrates by parts we have then to do; see [29]).

Asking for the principal part ($-\mathrm{div}(A\nabla u)$ or $-\mathrm{div}(A^T\nabla v)$) to be coercive is quite natural when we search for solutions in $H^1(\Omega)$. One could wonder if the additional hypotheses on the lower order terms $\mathrm{div}(\mathbf{v}u)$ (or $\mathbf{v}\cdot\nabla u$), bu and λu are really necessary; we will see below that we cannot avoid some hypotheses on the zero-order terms bu and λu. Concerning the first order terms, works have already been done to get rid of the coercivity hypothesis on the convection term when it is in conservative form.

In [8], the author proves an existence result, and studies some qualitative properties, for entropy solutions of

$$\left\{\begin{array}{lll} -\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) = f - \mathrm{div}(F + \Phi(u)) & \text{in} & \Omega, \\ u = 0 & \text{on} & \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{1.5}$$

where $\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u))$ is a Leray-Lions operator in divergence form acting on $W^{1,p}_0(\Omega)$ ($1-2/N < p < N$), $f \in L^1(\Omega)$, $F \in (L^{p'}(\Omega))^N$ and Φ is a continuous function from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}^N$; due to the lack of growth properties on Φ, it is crucial in (1.5) to consider pure homogeneous Dirichlet boundary conditions and a Φ not depending on $x \in \Omega$.

In [43], the authors study the existence and uniqueness of renormalized solutions to

$$\begin{cases} \lambda u - \operatorname{div}(a(x,\nabla u) + \Phi(x,u)) = f & \text{in} \quad \Omega, \\ (a(x,\nabla u) + \Phi(x,u)) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on} \quad \Gamma_f, \\ u = 0 & \text{on} \quad \Gamma_d, \end{cases} \tag{1.6}$$

where λ is a non-negative real number, $\operatorname{div}(a(x,\nabla u))$ is a Leray-Lions operator in divergence form — notice the independance of a with respect to u — acting on $W^{1,p}(\Omega)$, $f \in L^1(\Omega)$ and Φ is a Caratheodory function with growth properties; the problem is either pure Dirichlet ($\Gamma_f = \emptyset$) or mixed ($\Gamma_f \neq \emptyset$ but $\sigma(\Gamma_d) > 0$).

We prove, in Section 2, existence and uniqueness results for (1.3) and (1.4), with no coercivity hypothesis on the convection term. These results are not consequences of [8] or [43], because the natural space of entropy or renormalized solutions is not the usual Sobolev space $H^1(\Omega)$.
In Section 3, we will see that the regularity results we already have in the coercive case, when the right-hand side L is more regular (see [70] and [29]), are still true with general convections terms. Under stronger hypotheses ($\mathbf{v} \in (L^\infty(\Omega))^N$ and $L \in L^\infty(\Omega)$), the existence and regularity results appear in [30].
We then shortly describe in Section 4 how the regularity results of Section 3 can be transformed in existence and uniqueness results with measures as datas (as in [70] or [29]).

1.1.3 The Zero-Order Terms

We cannot, in general, solve Problems (1.3) and (1.4) for any $b \in L^{\frac{N_*}{2}}(\Omega)$ and $\lambda \in L^{N_*-1}(\partial\Omega)$. This is due to the existence of an eigenvalue for the Laplace operator.
Consider pure Dirichlet boundary conditions and take e an eigenvector of $-\Delta$ on $H_0^1(\Omega)$, that is to say $e \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ such that $-\Delta e = le$ for a $l \in \mathbb{R}$ (in fact, we have then $l > 0$).
Take now $b \in \mathbb{R}$ and suppose there exists a solution $u \in H_0^1(\Omega)$ of $-\Delta u + bu = e$; that is to say, for all $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega bu\varphi = \int_\Omega e\varphi.$$

With $\varphi = e$, we get

$$(l+b)\int_\Omega ue = \int_\Omega e^2.$$

Since $e \neq 0$, this last equation can not be satisfied for $b = -l$; thus, there is no solution $u \in H_0^1(\Omega)$ of $-\Delta u - lu = e$.
The same kind of reasoning can be done in the mixed case, and this shows that we cannot avoid additional hypotheses on b and λ (i.e. we cannot only suppose integrability hypotheses on these datas).

In (1.3) we have considered convection terms only in conservative form; in (1.4), we have considered convection terms only in non-conservative form. A natural question is the following: can we consider, in the same equation, convection terms both in conservative and non-conservative form? That is to say, can we solve

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) - \operatorname{div}(\mathbf{v}u) + \mathbf{w}\cdot\nabla u + bu = L & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad \Gamma_d, \\ A\nabla u \cdot \mathbf{n} + (\lambda + \mathbf{v}\cdot\mathbf{n})u = 0 & \text{on} \quad \Gamma_f, \end{cases} \tag{1.7}$$

the same way we will solve (1.3) and (1.4) (i.e. without additional hypothesis on the convection terms)? The answer is no, and is due to the same objection as before. Indeed, take $\mathbf{v}$ a regular vector-valued function; since, for $u \in H_0^1(\Omega)$, we have $\operatorname{div}(\mathbf{v}u) - \mathbf{v}\cdot\nabla u = u\operatorname{div}(\mathbf{v})$, a solution in $H_0^1(\Omega)$ of $-\Delta u - \operatorname{div}(\mathbf{v}u) + \mathbf{v}\cdot\nabla u = L$ (that is to say Problem (1.7) in the case of pure Dirichlet boundary conditions, with $A = Id$, $b = 0$ and $\mathbf{w} = \mathbf{v}$) would be a solution to $-\Delta u - (\operatorname{div}(\mathbf{v}))u = L$; by taking a regular vector-valued function $\mathbf{v}$ such that $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = l$, the preceding reasoning proves that, in general, this last problem has no solution.

Thus, (1.7) is not solvable without additional hypotheses on the first-order terms.
Problems (1.3) and (1.4) seems thus to be the most general problems we can solve, when we add no structural hypothesis on the first order terms.

1.1.4 Hypotheses

We make the following hypotheses on the datas.

$$\Gamma_d \text{ and } \Gamma_f \text{ are measurable subsets of } \partial\Omega \text{ such that } \sigma(\Gamma_d \cap \Gamma_f) = 0 \text{ and } \partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_f, \tag{1.8}$$

$$\begin{gathered} A : \Omega \to M_N(\mathbb{R}) \text{ is a measurable matrix-valued function which satisfies:} \\ \exists \alpha_A > 0 \text{ such that } A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha_A |\xi|^2 \text{ for a.e. } x \in \Omega, \text{ for all } \xi \in \mathbb{R}^N, \\ \exists \Lambda_A > 0 \text{ such that } ||A(x)|| := \sup\{|A(x)\xi|\,,\ \xi \in \mathbb{R}^N\,,\ |\xi| = 1\} \leq \Lambda_A \text{ for a.e. } x \in \Omega, \end{gathered} \tag{1.9}$$

$$b \in L^{\frac{N_*}{2}}(\Omega)\,,\ b \geq 0 \text{ a.e. on } \Omega, \tag{1.10}$$

$$\lambda \in L^{N_*-1}(\partial\Omega)\,,\ \lambda \geq 0\ \sigma\text{-a.e. on } \partial\Omega, \tag{1.11}$$

$$\mathbf{v} \in (L^{N_*}(\Omega))^N, \tag{1.12}$$

$$L \in (H^1_{\Gamma_d}(\Omega))' \tag{1.13}$$

(recall that $N_* = N$ when $N \geq 3$ and that $N_* \in]2, \infty[$ when $N = 2$).

The non-convection parts of equations (1.3) and (1.4) are supposed to be coercive, that is to say:

$$\begin{gathered} \exists b_0 > 0\,,\ \exists E \subset \Omega \text{ such that } b \geq b_0 \text{ on } E, \\ \exists \lambda_0 > 0\,,\ \exists S \subset \Gamma_f \text{ such that } \lambda \geq \lambda_0 \text{ on } S \text{ and either} \\ \sigma(\Gamma_d) > 0 \text{ or } |E| > 0 \text{ or } \sigma(S) > 0. \end{gathered} \tag{1.14}$$

The set of variables that give the coercivity of the principal part of the operators in (1.3) or (1.4) is denoted by $\mathcal{B} = (\Omega, \alpha_A, \Gamma_d, b_0, E, \lambda_0, S)$.

Remark 1.1 *It is well-known that, under Hypotheses (1.8)—(1.11) and (1.14), for all $q \in [1, 2]$, there exists $\mathcal{K}(q, \mathcal{B}) > 0$ such that, for all $\varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$,*

$$\mathcal{K}(q, \mathcal{B})||\varphi||^2_{H^1(\Omega)} \leq \alpha_A \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 + \left(b_0 \int_E |\varphi|^q + \lambda_0 \int_S |\varphi|^q \, d\sigma\right)^{\frac{2}{q}}.$$

By denoting $C_S(\Omega, N_*)$ the norm of the Sobolev injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N_*}{N_*-2}}(\Omega)$ (see [1]), we also take

$$\chi \in [0, \tfrac{\mathcal{K}(2,\mathcal{B})}{C_S(\Omega, N_*)}[. \tag{1.15}$$

Remark 1.2 *When χ satisfies (1.15), we have, for all $\mathbf{w} \in B(N_*, \chi)$ and all $\varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$,*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega A\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega \varphi \mathbf{w} \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega b\varphi^2 + \int_{\Gamma_f} \lambda\varphi^2 \, d\sigma \\ &\geq \ \mathcal{K}(2, \mathcal{B})||\varphi||^2_{H^1(\Omega)} - ||\,|\mathbf{w}|\,||_{L^{N_*}(\Omega)} ||\varphi||_{L^{\frac{2N_*}{N_*-2}}(\Omega)} ||\,|\nabla\varphi|\,||_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \ (\mathcal{K}(2, \mathcal{B}) - \chi C_S(\Omega, N_*))||\varphi||^2_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

with $\mathcal{K}(2, \mathcal{B}) - \chi C_S(\Omega, N_*) > 0$ (this exactly means that the bilinear form $(\varphi, \psi) \to \int_\Omega A\nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \int_\Omega \varphi\mathbf{w} \cdot \nabla\psi + \int_\Omega b\varphi\psi + \int_{\Gamma_f} \lambda\varphi\psi \, d\sigma$ is coercive on $H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$).
When $\mathbf{v} \in B(N_*, \chi)$ with χ satisfying (1.15), by the Lax-Milgram Theorem, (1.3) and (1.4) have thus unique solutions; our aim is to prove that we do not need such an hypothesis on $\mathbf{v}$ to have existence and uniqueness results for these problems.

Remark 1.3 *When* $\mathbf{v}$ *only satisfies (1.12), Problems (1.3) and (1.4) are in general non-coercive not only in the sense of the Lax-Milgram Theorem (the classical tool for linear elliptic problems) but also in the sense of the Leray-Lions Theorem (the classical tool for nonlinear elliptic problems). Indeed, consider the pure Dirichlet boundary conditions with* $b = \lambda = 0$ *(for the sake of simplicity) and take* $\mathbf{w}$ *a regular function such that* $\mathrm{div}(\mathbf{w}) \neq 0$*; we can find* $u \in H_0^1(\Omega)$ *such that*

$$\int_\Omega u\mathbf{w} \cdot \nabla u = \frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{w} \cdot \nabla(u^2) \neq 0$$

(take $u \in C_c^\infty(\Omega)\backslash\{0\}$*, the support of which is contained in* $\{x \in \Omega \mid \mathrm{div}(\mathbf{w})(x) < 0\}$ *or in* $\{x \in \Omega \mid \mathrm{div}(\mathbf{w})(x) > 0\}$*); let then*

$$s = -\frac{\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u}{\int_\Omega u\mathbf{w} \cdot \nabla u} \quad \text{and} \quad \mathbf{v} = s\mathbf{w}.$$

The sequence $(u_n)_{n\geq 1} = (nu)_{n\geq 1} \in H_0^1(\Omega)$ *satisfies* $||u_n||_{H_0^1(\Omega)} \to \infty$ *as* $n \to \infty$ *and*

$$\int_\Omega A\nabla u_n \cdot \nabla u_n + \int_\Omega u_n\mathbf{v} \cdot \nabla u_n = 0 \qquad \text{for all } n \geq 1,$$

which means that the operator in (1.3) or (1.4) is not coercive in the sense of Leray-Lions (see [53]).

Remark 1.4 *When* A *satisfies (1.9),* A^T *also satisfies (1.9); thus, in (1.4), we could replace* A^T *by* A*. We have written (1.4) with* A^T *so that the duality between (1.3) and (1.4) clearly appears.*

1.2 Existence and Uniqueness Results

1.2.1 The main result

Theorem 1.1 *Under Hypotheses (1.8)—(1.14), there exists a unique solution* u *to (1.3) and a unique solution* v *to (1.4). Moreover, if* $r > N$ *and* $\Lambda \geq 0$ *are such that* $\mathbf{v} \in B(N_*, \chi) + B(r, \Lambda)$*, with* χ *satisfying (1.15), and if* Λ_L *is an upper bound of* $||L||_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))'}$*, there exists* C *only depending on* $(N_*, \mathcal{B}, \chi, r, \Lambda, \Lambda_L)$ *such that* $||u||_{H^1(\Omega)} \leq C$ *and* $||v||_{H^1(\Omega)} \leq C$*.*

Remark 1.5 *For all* $\mathbf{v} \in (L^{N_*}(\Omega))^N$ *and all* $\eta > 0$*, there exists* $\Lambda > 0$ *such that* $\mathbf{v} \in B(N_*, \eta) + B(\infty, \Lambda)$*; however, this* Λ *does not only depend on the norm of* $\mathbf{v}$ *in* $(L^{N_*}(\Omega))^N$*. On the other hand, if* $\mathbf{v}$ *is in a compact subset* K *of* $(L^{N_*}(\Omega))^N$*, for example, we can choose* Λ *only depending on* K *and* η*.*

Remark 1.6 *In the pure Dirichlet case* ($\Gamma_f = \emptyset$)*, we do not need, in this theorem, the Lipschitz continuity hypothesis on the boundary of* Ω*.*

Proof of Theorem 1.1
The proof is made in several steps. The main tool to obtain existence and estimates on the solutions of (1.3) and (1.4) is the Leray-Schauder Topological Degree (see [26]).
The first three steps are devoted to prove an existence result for (1.3). This existence result is then used in the fourth and fifth steps to prove an *a priori* estimate on the solution of (1.4) that lead to an existence result for (1.4). Using the linearity of these equations and a duality argument, we prove, in the last step, the uniqueness results.
We will simultaneously obtain the existence of solutions to (1.3) and (1.4) and the estimates given in the theorem; thus, we take from now on $r > N$, $\Lambda \geq 0$ and χ satisfying (1.15), and we suppose that $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ with $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1) \in (L^{N_*}(\Omega))^N \times (L^r(\Omega))^N$, $||\,|\mathbf{v}_0|\,||_{L^{N_*}(\Omega)} \leq \chi$ and $||\,|\mathbf{v}_1|\,||_{L^r(\Omega)} \leq \Lambda$. We will see that the bound in $H^1(\Omega)$ on the solutions we obtain only depends on $(N_*, \mathcal{B}, \chi, r, \Lambda, \Lambda_L)$.

Step 1: a compact application for (1.3).

For all $\overline{u} \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$, since $\overline{u}\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^N$ (because of the Sobolev injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N_*}{N_*-2}}(\Omega)$), there exists a unique $u = \mathcal{F}(\overline{u})$ solution to

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \displaystyle\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega bu\varphi + \int_{\Gamma_f} \lambda u\varphi\, d\sigma = \langle L, \varphi\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)} - \int_\Omega \overline{u}\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega). \end{array}\right. \tag{1.16}$$

This defines an application $\mathcal{F} : H^1_{\Gamma_d}(\Omega) \to H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$.
It is quite easy to see that $\mathcal{F}$ is continuous; indeed, if $\overline{u}_n \to \overline{u}$ in $H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ as $n \to \infty$, then $\overline{u}_n\mathbf{v} \to \overline{u}\mathbf{v}$ in $(L^2(\Omega))^N$ so that $\mathcal{F}(\overline{u}_n) \to \mathcal{F}(\overline{u})$ in $H^1(\Omega)$.
Suppose that $(\overline{u}_n)_{n\geq 1}$ is a bounded sequence of $H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$. There exists then $\overline{u} \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ such that, up to a subsequence, $\overline{u}_n \to \overline{u}$ a.e. on Ω and is bounded in $L^{\frac{2N_*}{N_*-2}}(\Omega)$; applying Lemma 1.1, we get $\overline{u}_n\mathbf{v} \to \overline{u}\mathbf{v}$ in $(L^2(\Omega))^N$, which implies $\mathcal{F}(\overline{u}_n) \to \mathcal{F}(\overline{u})$ in $H^1(\Omega)$. $\mathcal{F}$ is thus a compact operator.

A fixed point of $\mathcal{F}$ is a solution to (1.3). To prove, using the Leray-Schauder Topological Degree, that $\mathcal{F}$ has a fixed point, we have to find $R > 0$ such that, for all $t \in [0,1]$, there exists no solution of $u - t\mathcal{F}(u) = 0$ satisfying $||u||_{H^1(\Omega)} = R$. This is the aim of steps two and three.

Take $t \in [0,1]$ and suppose that u satisfies $u = t\mathcal{F}(u)$; we have then

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \displaystyle\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega bu\varphi + \int_{\Gamma_f} \lambda u\varphi\, d\sigma = t\langle L, \varphi\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)} - t\int_\Omega u\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega). \end{array}\right. \tag{1.17}$$

Notice that the equation in (1.17) can also be written as

$$\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla\varphi + t\int_\Omega u\mathbf{v}_0\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega bu\varphi + \int_{\Gamma_f}\lambda u\varphi\, d\sigma = t\langle L,\varphi\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)} - t\int_\Omega u\mathbf{v}_1\cdot\nabla\varphi. \tag{1.18}$$

Step 2: using the ideas of [10], we prove an estimate on $\ln(1+|u|)$.
Define, for $k \geq 0$, $T_k(s) = \min(k, \max(-s,k))$ and $r_k(s) = T_1(s - T_k(s))$. Since $b \geq 0$ a.e. on Ω, $\lambda \geq 0$ σ-a.e. on $\partial\Omega$ and $sr_k(s) \geq 0$ for all $s \in \mathbb{R}$, and since $\nabla(r_k(u)) = \mathbf{1}_{B_k}\nabla u$, with $\mathbf{1}_{B_k}$ the characteristic function of the set $B_k = \{x \in \Omega \mid k \leq |u| < k+1\}$, we find, by putting $\varphi = r_k(u)$ in (1.17),

$$\begin{aligned} &\alpha_A \int_\Omega |\nabla(r_k(u))|^2 + b_0\int_E r_k(u)u + \lambda_0\int_S r_k(u)u\, d\sigma \\ &\leq \int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla(r_k(u)) + \int_\Omega bur_k(u) + \int_{\Gamma_f}\lambda ur_k(u)\, d\sigma \\ &\leq |\langle L, r_k(u)\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}| + \int_\Omega |u||\mathbf{v}||\nabla(r_k(u))| \\ &\leq ||L||_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))'}||r_k(u)||_{H^1(\Omega)} + (k+1)||\,|\mathbf{v}|\,||_{L^2(B_k)}||\,|\nabla(r_k(u))|\,||_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

But $|r_k(s)| \leq 1$ so that

$$||r_k(u)||_{H^1(\Omega)} = ||r_k(u)||_{L^2(\Omega)} + ||\,|\nabla(r_k(u))|\,||_{L^2(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/2} + ||\,|\nabla(r_k(u))|\,||_{L^2(\Omega)}.$$

We obtain thus

$$\begin{aligned} &\alpha_A \int_\Omega |\nabla(r_k(u))|^2 + b_0\int_E r_k(u)u + \lambda_0\int_S r_k(u)u\, d\sigma \\ &\leq \Lambda_L|\Omega|^{1/2} + \Lambda_L||\,|\nabla(r_k(u))|\,||_{L^2(\Omega)} + (k+1)||\,|\mathbf{v}|\,||_{L^2(B_k)}||\,|\nabla(r_k(u))|\,||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \Lambda_L|\Omega|^{1/2} + \frac{\Lambda_L^2}{\alpha_A} + \frac{\alpha_A}{4}||\,|\nabla(r_k(u))|\,||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha_A}{4}||\,|\nabla(r_k(u))|\,||^2_{L^2(\Omega)} + (k+1)^2\frac{||\,|\mathbf{v}|\,||^2_{L^2(B_k)}}{\alpha_A}, \end{aligned}$$

that is to say

$$\frac{\alpha_A}{2}||\,|\nabla(r_k(u))|\,||^2_{L^2(\Omega)} + b_0\int_E r_k(u)u + \lambda_0\int_S r_k(u)u\,d\sigma \le \Lambda_L|\Omega|^{1/2} + \frac{\Lambda_L^2}{\alpha_A} + (k+1)^2\frac{||\,|\mathbf{v}|\,||^2_{L^2(B_k)}}{\alpha_A}. \quad (1.19)$$

With $k=0$, since $sr_0(s)=|s|$ as soon as $|s|\ge 1$, (1.19) gives

$$\begin{aligned}
& b_0\int_E \ln(1+|u|) + \lambda_0\int_S \ln(1+|u|)\,d\sigma \\
\le\ & b_0\int_E |u| + \lambda_0\int_S |u|\,d\sigma \\
\le\ & b_0\int_{E\cap\{|u|\ge 1\}} r_0(u)u + \lambda_0\int_{S\cap\{|u|\ge 1\}} r_0(u)u\,d\sigma + b_0\int_{E\cap\{|u|\le 1\}}|u| + \lambda_0\int_{S\cap\{|u|\le 1\}}|u|\,d\sigma \\
\le\ & \Lambda_L|\Omega|^{1/2} + \frac{\Lambda_L^2}{\alpha_A} + \frac{||\,|\mathbf{v}|\,||^2_{L^2(\Omega)}}{\alpha_A} + b_0|E| + \lambda_0\sigma(S) \\
\le\ & \Lambda_L|\Omega|^{1/2} + \frac{\Lambda_L^2}{\alpha_A} + \frac{2}{\alpha_A}(||\,|\mathbf{v}_0|\,||^2_{L^2(\Omega)} + ||\,|\mathbf{v}_1|\,||^2_{L^2(\Omega)}) + b_0|E| + \lambda_0\sigma(S) \\
\le\ & \Lambda_L|\Omega|^{1/2} + \frac{\Lambda_L^2}{\alpha_A} + \frac{2}{\alpha_A}\left(|\Omega|^{1-\frac{2}{N_*}}\chi^2 + |\Omega|^{1-\frac{2}{r}}\Lambda^2\right) + b_0|E| + \lambda_0\sigma(S) = C_1 \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

(recall that $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{v}_1$ with $||\,|\mathbf{v}_0|\,||_{L^{N_*}(\Omega)}\le\chi$ and $||\,|\mathbf{v}_1|\,||_{L^r(\Omega)}\le\Lambda$), with C_1 only depending on $(N_*,\mathcal{B},\chi,r,\Lambda,\Lambda_L)$.
Since $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ is a partition of Ω, and since $|u|\ge k$ on B_k, we find, using once again (1.19),

$$\begin{aligned}
||\,|\nabla(\ln(1+|u|))|\,||^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{(1+|u|)^2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{B_k}\frac{|\nabla u|^2}{(1+|u|)^2} \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty}\int_\Omega \frac{|\nabla(r_k(u))|^2}{(1+k)^2} \\
&\le \frac{2}{\alpha_A}\left(\Lambda_L|\Omega|^{1/2} + \frac{\Lambda_L^2}{\alpha_A}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+k)^2} + \frac{2}{\alpha_A^2}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{B_k}|\mathbf{v}|^2 \\
&\le \frac{2}{\alpha_A}\frac{\pi^2}{6}\left(\Lambda_L|\Omega|^{1/2} + \frac{\Lambda_L^2}{\alpha_A}\right) + \frac{2||\,|\mathbf{v}_0|+|\mathbf{v}_1|\,||^2_{L^2(\Omega)}}{\alpha_A^2} \\
&\le \frac{2}{\alpha_A}\frac{\pi^2}{6}\left(\Lambda_L|\Omega|^{1/2} + \frac{\Lambda_L^2}{\alpha_A}\right) + \frac{4|\Omega|^{1-\frac{2}{N_*}}\chi^2 + 4|\Omega|^{1-\frac{2}{r}}\Lambda^2}{\alpha_A^2} = C_2 \quad (1.21)
\end{aligned}$$

where C_2 only depends on $(N_*,\mathcal{B},\chi,r,\Lambda,\Lambda_L)$.
Taking together (1.20) and (1.21) we get, thanks to Remark 1.1,

$$||\ln(1+|u|)||^2_{L^2(\Omega)} \le ||\ln(1+|u|)||^2_{H^1(\Omega)} \le \frac{1}{\mathcal{K}(1,\mathcal{B})}(\alpha_A C_2 + C_1^2) = C_3 \qquad (1.22)$$

with C_3 only depending on $(N_*,\mathcal{B},\chi,r,\Lambda,\Lambda_L)$.

Step 3: conclusion for (1.3).
We prove now a $H^1(\Omega)$ estimate on the solution of (1.17).

Take $\varphi = S_k(u) = u - T_k(u)$ in (1.18). Since $S_k(u)u \ge (S_k(u))^2$, we have, thanks to Remark 1.2 (notice that, for all $t \in [0,1]$, $t\mathbf{v}_0 \in B(N_*, \chi)$),

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{K}(2,\mathcal{B}) - \chi C_S(\Omega, N_*))||S_k(u)||^2_{H^1(\Omega)}\\
&\le \int_\Omega A\nabla(S_k(u))\cdot\nabla(S_k(u)) + t\int_\Omega S_k(u)\mathbf{v}_0\cdot\nabla S_k(u) + \int_\Omega b(S_k(u))^2 + \int_{\Gamma_f}\lambda(S_k(u))^2\,d\sigma\\
&\le \int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla(S_k(u)) + t\int_\Omega u\mathbf{v}_0\cdot\nabla S_k(u) + \int_\Omega buS_k(u) + \int_{\Gamma_f}\lambda u S_k(u)\,d\sigma\\
&\quad + t\int_\Omega (S_k(u)-u)\mathbf{v}_0\cdot\nabla(S_k(u))\\
&\le |\langle L, S_k(u)\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}| + \int_\Omega |u||\mathbf{v}_1||\nabla(S_k(u))| + \int_\Omega |u - S_k(u)||\mathbf{v}_0||\nabla(S_k(u))|\\
&\le |\langle L, S_k(u)\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}| + \int_\Omega |u - S_k(u)|(|\mathbf{v}_0| + |\mathbf{v}_1|)|\nabla(S_k(u))| + \int_\Omega |S_k(u)||\mathbf{v}_1||\nabla(S_k(u))|.
\end{aligned}$$

But $|u - S_k(u)| \le k$ and $\nabla(S_k(u)) = 0$ outside $E_k = \{|u| \ge k\}$, so that

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{K}(2,\mathcal{B}) - \chi C_S(\Omega, N_*))||S_k(u)||^2_{H^1(\Omega)}\\
&\le |\langle L, S_k(u)\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}| + k||\,|\mathbf{v}_0| + |\mathbf{v}_1|\,||_{L^2(E_k)}||S_k(u)||_{H^1(\Omega)}\\
&\quad + ||\,|\mathbf{v}_1|\,||_{L^r(\Omega)}||S_k(u)||_{L^{\frac{2r}{r-2}}(\Omega)}||S_k(u)||_{H^1(\Omega)}\\
&\le |\langle L, S_k(u)\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}| + k\left(|E_k|^{\frac12 - \frac{1}{N_*}}\chi + |E_k|^{\frac12-\frac1r}\Lambda\right)||S_k(u)||_{H^1(\Omega)}\\
&\quad + \Lambda||S_k(u)||_{L^{\frac{2r}{r-2}}(\Omega)}||S_k(u)||_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}\tag{1.23}$$

Since $\frac{2r}{r-2} < \frac{2N}{N-2}$, there exists $q_r > \frac{2r}{r-2}$ only depending on r and N such that $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q_r}(\Omega)$; we have thus, by denoting C_4 the norm of this injection (C_4 only depends on (Ω, r) — a dependence on Ω takes into account a dependence on N) and by noticing that $S_k(u) = 0$ outside E_k,

$$||S_k(u)||_{L^{\frac{2r}{r-2}}(\Omega)} \le |E_k|^{\frac{r-2}{2r} - \frac{1}{q_r}}||S_k(u)||_{L^{q_r}(\Omega)} \le C_4|E_k|^{\frac{r-2}{2r}-\frac{1}{q_r}}||S_k(u)||_{H^1(\Omega)},$$

which gives, in (1.23),

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{K}(2,\mathcal{B}) - \chi C_S(\Omega, N_*))||S_k(u)||^2_{H^1(\Omega)}\\
&\le |\langle L, S_k(u)\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}| + k\left(|E_k|^{\frac12 - \frac{1}{N_*}}\chi + |E_k|^{\frac12-\frac1r}\Lambda\right)||S_k(u)||_{H^1(\Omega)}\\
&\quad + C_4\Lambda|E_k|^{\frac{r-2}{2r}-\frac{1}{q_r}}||S_k(u)||^2_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}\tag{1.24}$$

By the Tchebycheff inequality and (1.22), we have

$$|E_k| = |\{\ln(1+|u|)^2 \ge \ln(1+k)^2\}| \le \frac{1}{(\ln(1+k))^2}||\ln(1+|u|)||^2_{L^2(\Omega)} \le \frac{C_3}{(\ln(1+k))^2}.$$

Since $\frac{r-2}{2r} - \frac{1}{q_r} > 0$, there exists thus k_0 only depending on $(C_3, C_4, \Lambda, r, q_r, \mathcal{K}(2,\mathcal{B}), \chi, C_S(\Omega, N_*))$, i.e. only depending on $(N_*, \mathcal{B}, \chi, r, \Lambda, \Lambda_L)$, such that, for all $k \ge k_0$, $C_4\Lambda|E_k|^{\frac{r-2}{2r}-\frac{1}{q_r}} \le \frac{\mathcal{K}(2,\mathcal{B}) - \chi C_S(\Omega,N_*)}{2}$. We deduce then form (1.24) that, for all $k \ge k_0$,

$$\begin{aligned}
&||S_k(u)||_{H^1(\Omega)}\\
&\le \frac{2}{\mathcal{K}(2,\mathcal{B}) - \chi C_S(\Omega, N_*)}\left(\frac{|\langle L, S_k(u)\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}|}{||S_k(u)||_{H^1(\Omega)}} + k\left(|E_k|^{\frac12-\frac{1}{N_*}}\chi + |E_k|^{\frac12-\frac1r}\Lambda\right)\right)
\end{aligned}\tag{1.25}$$

(we have not simplified so far, because this inequality will be useful in the proof of Proposition 1.2). Taking $k = k_0$, and since $E_k \subset \Omega$, we get

$$||S_{k_0}(u)||_{H^1(\Omega)} \leq \frac{2}{\mathcal{K}(2,\mathcal{B}) - \chi C_S(\Omega, N_*)} \left(\Lambda_L + k_0 \left(|\Omega|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{N_*}}\chi + |\Omega|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}}\Lambda\right)\right) = C_5 \tag{1.26}$$

with C_5 only depending on $(N_*, \mathcal{B}, \chi, r, \Lambda, \Lambda_L)$.
Take now $\varphi = T_{k_0}(u)$ in (1.17). Since $uT_{k_0}(u) \geq (T_{k_0}(u))^2$ and $\nabla(T_{k_0}(u)) = \mathbf{1}_{\{|u|\leq k_0\}}\nabla u$, we have, by Remark 1.1,

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(2,\mathcal{B})||T_{k_0}(u)||^2_{H^1(\Omega)} &\leq \Lambda_L ||T_{k_0}(u)||_{H^1(\Omega)} + \int_\Omega |u||\mathbf{v}||\nabla(T_{k_0}(u))| \\
&\leq \Lambda_L ||T_{k_0}(u)||_{H^1(\Omega)} + k_0 || \, |\mathbf{v}_0| + |\mathbf{v}_1| \, ||_{L^2(\Omega)} ||T_{k_0}(u))||_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

that is to say

$$||T_{k_0}(u)||_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\Lambda_L + k_0 \left(|\Omega|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{N_*}}\chi + |\Omega|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}}\Lambda\right)}{\mathcal{K}(2,\mathcal{B})} = C_6$$

with C_6 only depending on $(N_*, \mathcal{B}, \chi, r, \Lambda, \Lambda_L)$ (recall that k_0 only depends on these datas).
Since $u = T_{k_0}(u) + S_{k_0}(u)$, we deduce from this last inegality and (1.26) that

$$||u||_{H^1(\Omega)} \leq C_5 + C_6 = C_7,$$

with C_7 only depending on $(N_*, \mathcal{B}, \chi, r, \Lambda, \Lambda_L)$.

Notice that we have just proven the estimate on the solution of (1.3) given in the theorem: if u is a solution of (1.3), then it is a solution of (1.17) with $t = 1$ and we have thus $||u||_{H^1(\Omega)} \leq C_7$.

Take now $R = C_7 + 1$. For all $t \in [0,1]$ and all $u \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ solution of $u - t\mathcal{F}(u) = 0$, we have $||u||_{H^1(\Omega)} \neq R$; since $\mathcal{F}$ is a compact operator, the Leray Schauder Topological Degree allows us to see that $\mathcal{F}$ has a fixed point, that is to say a solution u of (1.3).

Step 4: a compact application for (1.4).
Let $\overline{v} \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$; we have $\mathbf{v} \cdot \nabla\overline{v} \in L^{\frac{2N_*}{N_*+2}}(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'$; there exists thus a unique solution $v = \mathcal{G}(\overline{v})$ to

$$\left\{\begin{array}{l}
v \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\
\displaystyle\int A^T\nabla v \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega bv\varphi + \int_{\Gamma_f} \lambda v\varphi\, d\sigma = \langle L, \varphi\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)} - \int_\Omega \varphi\mathbf{v}\cdot\nabla\overline{v}\,, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega).
\end{array}\right. \tag{1.27}$$

This defines an application $\mathcal{G} : H^1_{\Gamma_d}(\Omega) \to H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$. It is quite easy to see that $\mathcal{G}$ is continuous; indeed, if $\overline{v}_n \to \overline{v}$ in $H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$, then $\mathbf{v}\cdot\nabla\overline{v}_n \to \mathbf{v}\cdot\nabla\overline{v}$ in $(H^1(\Omega))'$, which implies $\mathcal{G}(\overline{v}_n) \to \mathcal{G}(\overline{v})$ in $H^1(\Omega)$.
We will now prove that $\mathcal{G}$ is a compact operator. Suppose that $(\overline{v}_n)_{n\geq 1}$ is bounded in $H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$; then $(\mathbf{v}\cdot\nabla\overline{v}_n)_{n\geq 1}$ is bounded in $(H^1(\Omega))'$ so that, using $\varphi = \mathcal{G}(\overline{v}_n) = v_n$ in the equation satisfied by v_n, we get

$$\mathcal{K}(2,\mathcal{B})||v_n||^2_{H^1(\Omega)} \leq (\Lambda_L + ||\mathbf{v}\cdot\nabla\overline{v}_n||_{(H^1(\Omega))'})||v_n||_{H^1(\Omega)},$$

which implies that $(v_n)_{n\geq 1}$ is bounded in $H^1(\Omega)$.
Up to a subsequence, we can thus suppose that $(v_n)_{n\geq 1}$ converges a.e. on Ω and is bounded in $L^{\frac{2N_*}{N_*-2}}(\Omega)$. Let $n \geq 1$, $m \geq 1$; substract the equation satisfied by v_m to the equation satisfied by v_n and use $\varphi = v_n - v_m$ as a test function; by denoting M a bound on $(||\overline{v}_n||_{H^1(\Omega)})_{n\geq 1}$, this gives

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(2,\mathcal{B})||v_n - v_m||^2_{H^1(\Omega)} &\leq \left|\int_\Omega (v_n - v_m)\mathbf{v}\cdot(\nabla\overline{v}_m - \nabla\overline{v}_n)\right| \\
&\leq 2M|| \, |v_n\mathbf{v} - v_m\mathbf{v}| \, ||_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

But, since $\mathbf{v} \in (L^{N_*}(\Omega))^N$ and $(v_n)_{n\geq 1}$ is a bounded sequence of $L^{\frac{2N_*}{N_*-2}}(\Omega)$ which converges a.e. on Ω, Lemma 1.1 tells us that $(v_n\mathbf{v})_{n\geq 1}$ converges in $(L^2(\Omega))^N$, and is thus a Cauchy sequence in this space. We deduce from (1.28) that $(v_n)_{n\geq 1}$ is a Cauchy sequence in $H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ and converges in this space.
Since $\mathcal{G}$ is a compact operator, to prove that it has a fixed point, we just have to find $R > 0$ such that, for all $t \in [0,1]$, there exists no solution of $v - t\mathcal{G}(v) = 0$ satisfying $||v||_{H^1(\Omega)} = R$.

Step 5: estimate on the solutions of $v - t\mathcal{G}(v) = 0$.
Let $t \in [0,1]$ and suppose that $v \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ satifies $v = t\mathcal{G}(v)$. We have then

$$\left\{\begin{array}{l} v \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \displaystyle\int A^T\nabla v\cdot\nabla\varphi + t\int_\Omega \varphi\mathbf{v}\cdot\nabla v + \int_\Omega bv\varphi + \int_{\Gamma_f}\lambda v\varphi\,d\sigma = \langle tL,\varphi\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))',H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\varphi\in H^1_{\Gamma_d}(\Omega). \end{array}\right. \tag{1.29}$$

Since, for all $t \in [0,1]$, $t\mathbf{v} \in B(N_*,\chi) + B(r,\Lambda)$, there exists, by the result of step 3, C_8 only depending on $(N_*,\mathcal{B},\chi,r,\Lambda)$ such that, for all $\theta \in (H^1_{\Gamma_d}(\Omega))'$ satisfying $||\theta||_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))'} \leq 1$, we can find a solution u to

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\,,\ ||u||_{H^1(\Omega)} \leq C_8\,, \\ \displaystyle\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla\varphi + t\int_\Omega u\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega bu\varphi + \int_{\Gamma_f}\lambda u\varphi\,d\sigma = \langle\theta,\varphi\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))',H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\varphi\in H^1_{\Gamma_d}(\Omega). \end{array}\right. \tag{1.30}$$

By taking $\varphi = v$ in the equation satisfied by u and $\varphi = u$ in the equation satisfied by v, we get

$$\langle\theta,v\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))',H^1_{\Gamma_d}(\Omega)} = \langle tL,u\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))',H^1_{\Gamma_d}(\Omega)} \leq \Lambda_L C_8.$$

Since this inequality is satisfied for all $\theta \in (H^1_{\Gamma_d}(\Omega))'$ such that $||\theta||_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))'} \leq 1$, we deduce that $||v||_{H^1(\Omega)} \leq \Lambda_L C_8$.

Notice that this gives the estimate of the theorem; indeed, if v is a solution of (1.4), then it is a solution of (1.29) with $t = 1$ so that $||v||_{H^1(\Omega)} \leq \Lambda_L C_8$.

Take now $R = \Lambda_L C_8 + 1$. We have juste proven that, for any $t \in [0,1]$, any solution v to $v - t\mathcal{G}(v) = 0$ satisfies $||v||_{H^1(\Omega)} < R$; thus, by the Leray-Schauder Topological Degree, $\mathcal{G}$ has a fixed point, that is to say a solution of (1.4).

Step 6: uniqueness.
Since (1.3) is a linear problem, it is sufficient to prove that the only solution to (1.3) with $L = 0$ is the null function. Let u be a solution to (1.3) with $L = 0$; let v be a solution of (1.4) with $L = \mathrm{sgn}(u) \in (H^1_{\Gamma_d}(\Omega))'$ (the existence of a solution to this problem is ensured by step 5); by putting $\varphi = v$ in the equation satisfied by u and $\varphi = u$ in the equation satisfied by v, we get $\int_\Omega |u| = 0$, that is to say $u = 0$.
A similar reasoning gives the uniqueness of the solution to (1.4). ■

1.2.2 Existence and uniqueness in a nonlinear case

To prove the existence of a solution to (1.3), we have not really used the linearity with respect to u of the divergence part $\mathrm{div}(u\mathbf{v})$ (indeed, the tool used in the preceding proof — the Leray-Schauder Topological Degree — is a nonlinear tool). With exactly the same reasoning as in the first three steps of the proof of Theorem 1.1, we can prove the following result.

Theorem 1.2 *Under Hypotheses (1.8)—(1.11), (1.13), (1.14), if $\Phi : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ is a Caratheodory function satisfying*

$$\exists g \in L^{N_*}(\Omega) \text{ such that } |\Phi(x,s)| \leq g(x)(1+|s|) \text{ for a.e. } x\in\Omega, \text{ for all } s\in\mathbb{R}, \tag{1.31}$$

and if Λ_L is an upper bound of $||L||_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))'}$, there exists a solution to

$$\left\{\begin{array}{l} u\in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\,,\\ \displaystyle\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla\varphi+\int_\Omega \Phi(\cdot,u)\cdot\nabla\varphi+\int_\Omega bu\varphi+\int_{\Gamma_f}\lambda u\varphi\,d\sigma=\langle L,\varphi\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))',H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}\,,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\forall\varphi\in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\end{array}\right. \tag{1.32}$$

such that $||u||_{H^1(\Omega)}\le C$, with C only depending([1]) *on $(N_*,\mathcal{B},g,\Lambda_L)$.*

Remark 1.7 *Since the proof of the existence of a solution to (1.4) strongly used the linearity of the equation (the* a priori *estimate on the solution to (1.4) comes from a duality argument), we cannot state, with this reasoning, an existence result for a nonlinear problem coming from Equation (1.4) (conversely to what we have done in Theorem 1.2 for Equation (1.3)).*

Adding a Lipschitz continuity hypothesis on Φ, it is also quite easy to obtain an uniqueness result for (1.32).

Proposition 1.1 *Under the hypotheses of Theorem 1.2, if Φ satisfies moreover*

$$\begin{array}{c}\exists C>0\,,\ \exists h\in L^{N_*}(\Omega)\ \textit{such that}\ |\Phi(x,s)-\Phi(x,t)|\le C\left(h(x)+|s|^{\frac{2}{N_*-2}}+|t|^{\frac{2}{N_*-2}}\right)|s-t|\\ \textit{for a.e. } x\in\Omega,\ \textit{for all } (s,t)\in\mathbb{R}^2,\end{array}$$

then the solution to (1.32) is unique.

Proof of Proposition 1.1
Take two solutions u and $\overline{u}$ to (1.32) and define

$$\mathbf{v}(x)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{\Phi(x,u(x))-\Phi(x,\overline{u}(x))}{u(x)-\overline{u}(x)} & \text{when } u(x)\neq\overline{u}(x),\\ 0 & \text{when } u(x)=\overline{u}(x).\end{array}\right.$$

Thanks to the Lipschitz continuity hypothesis on Φ, and since $(u,\overline{u})\in H^1(\Omega)\subset L^{\frac{2N_*}{N_*-2}}(\Omega)$, we have $\mathbf{v}\in(L^{N_*}(\Omega))^N$; substracting the equation satisfied by $\overline{u}$ to the equation satisfied by u, we see that $w=u-\overline{u}$ satisfies (1.3) with $L=0$. Since the solution to (1.3) is unique, this gives $w=0$, that is to say $u=\overline{u}$. ∎

Thanks to the existence, uniqueness and estimates results of Theorem 1.1, we could also, as it is classical in the coercive case, prove existence results for some other non-linear equations built from (1.3) and (1.4).

1.3 Regularity Results

In the coercive case, when the right-hand side satisfies([2])

$$\exists p>N \text{ such that } L\in(W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))', \tag{1.33}$$

(and under additional properties on $\mathbf{v}$, b, λ and Γ_d) we already know that the solutions to (1.3) and (1.4) are Hölder continuous (see [70] in the pure Dirichlet case, and [29] for other boundary conditions and a convection term in conservative form). We will see that this property is still true in the non-coercive case.

[1] As in Theorem 1.1, C does not depend on g only through $||g||_{L^{N_*}(\Omega)}$, but this dependance could be precised by cutting g into two parts — one small in $L^{N_*}(\Omega)$, the other in $L^r(\Omega)$ for a $r>N$.

[2] There is a little abuse of notation here. By writing "the right-hand side satisfies (1.33)", we mean that we solve (1.3) or (1.4) with $L=\widetilde{L}_{|H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}$ for a $\widetilde{L}\in(W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))'$; in the following, we make this abuse of notation by confusing L with $\widetilde{L}$. Under Hypothesis (1.42), this is not an abuse since we can then prove that $H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ is densely imbedded in $W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega)$.

1.3.1 L^∞ bound

In the proof of Theorem 1.1, the role played by the convection term in conservative form $\mathrm{div}(\mathbf{v}u)$ is quite different from the role played by the convection term in non conservative form $\mathbf{v}\cdot\nabla u$ (the technique used to obtain estimates on the solution to (1.3) does not work to obtain estimates on the solution to (1.4)). As it is shown in [70], when considering regularity results, the difference between (1.3) and (1.4) is even more stronger; when the convection term is in non conservative form, Hypothesis (1.12) is enough, but when it is in conservative form, $\mathbf{v}$ must be (at least for technical reasons) slightly more integrable than what is strictly necessary to obtain the existence result.
This is why we will have to consider, when dealing with (1.3), the following hypothesis:

$$\exists r > N \text{ such that } \mathbf{v} \in (L^r(\Omega))^N. \tag{1.34}$$

When $\mathbf{v}$ satisfies this hypothesis, we denote by $\Lambda_{\mathbf{v}}$ an upper bound of $||\,|\mathbf{v}|\,||_{L^r(\Omega)}$.

The first regularity results deal with essential bounds on the solutions to (1.3) and (1.4)

Proposition 1.2 *Under Hypotheses (1.8)—(1.11), (1.14), (1.33) and (1.34), the solution u to (1.3) is in $L^\infty(\Omega)$. Moreover, if Λ_L is an upper bound of $||L||_{(W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))'}$, there exists C only depending on $(N_*,\mathcal{B},r,\Lambda_{\mathbf{v}},p,\Lambda_L)$ such that $||u||_{L^\infty(\Omega)}\le C$.*

Remark 1.8 *In dimension $N=2$, (1.12) implies (1.34) (i.e. there is no additional hypothesis on $\mathbf{v}$ with respect to the hypotheses of Theorem 1.1).*

Proposition 1.3 *Under Hypotheses (1.8)—(1.12), (1.14) and (1.33), the solution v to (1.4) is in $L^\infty(\Omega)$. Moreover, if $r>N$ and $\Lambda\ge 0$ are such that $\mathbf{v}\in B(N_*,\chi)+B(r,\Lambda)$, with χ satisfying (1.15), and if Λ_L is an upper bound of $||L||_{(W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))'}$, then there exists C only depending on $(N_*,\mathcal{B},\chi,r,\Lambda,p,\Lambda_L)$ such that $||v||_{L^\infty(\Omega)}\le C$.*

Proof of Proposition 1.2
The solution u of (1.3) is also a solution of (1.17) with $t=1$. Since $\mathbf{v}\in B(N_*,0)+B(r,\Lambda_{\mathbf{v}})$, the reasoning in the proof of Theorem 1.1 that has lead to (1.25) can be applied to u with $\chi=0$; there exists thus $k_0>0$ only depending on $(N_*,\mathcal{B},r,\Lambda_{\mathbf{v}},p,\Lambda_L)$ (notice that $|\Omega|^{\frac12-\frac1p}\Lambda_L$ is an upper bound of $||L||_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))'}$) such that, for all $k\ge k_0$,

$$||S_k(u)||_{H^1(\Omega)} \le \frac{2}{\mathcal{K}(2,\mathcal{B})}\left(\frac{|\langle L,S_k(u)\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))',H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}|}{||S_k(u)||_{H^1(\Omega)}} + \Lambda_{\mathbf{v}}k|E_k|^{\frac12-\frac1r}\right), \tag{1.35}$$

with $S_k(u)=u-T_k(u)=u-\min(k,\max(u,-k))$ and $E_k=\{x\in\Omega \mid |u(x)|\ge k\}$.
Since $S_k(u)=0$ outside E_k and $p'<2$, we have $||S_k(u)||_{W^{1,p'}(\Omega)}\le |E_k|^{\frac{1}{p'}-\frac12}||S_k(u)||_{H^1(\Omega)}$, so that

$$\frac{|\langle L,S_k(u)\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))',H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}|}{||S_k(u)||_{H^1(\Omega)}} \le \Lambda_L\frac{||S_k(u)||_{W^{1,p'}(\Omega)}}{||S_k(u)||_{H^1(\Omega)}} \le \Lambda_L|E_k|^{\frac12-\frac1p}. \tag{1.36}$$

Let $h>k\ge k_0$. Since $|S_k(u)|\ge (h-k)$ on E_h, and thanks to the Sobolev injection $W^{1,1}(\Omega)\hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$, there exists C_1 only depending on Ω such that

$$(h-k)|E_h|^{\frac{N-1}{N}} \le ||S_k(u)||_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \le C_1||S_k(u)||_{W^{1,1}(\Omega)} \le C_1|E_k|^{\frac12}||S_k(u)||_{H^1(\Omega)}. \tag{1.37}$$

(1.36) and (1.37) used in (1.35) give then, for all $h>k\ge k_0$,

$$|E_h|^{\frac{N-1}{N}} \le \frac{2C_1|E_k|^{\frac12}}{\mathcal{K}(2,\mathcal{B})(h-k)}\left(\Lambda_L|E_k|^{\frac12-\frac1p}+\Lambda_{\mathbf{v}}k|E_k|^{\frac12-\frac1r}\right) \le \frac{C_2}{h-k}(|E_k|^{1-\frac1p}+k|E_k|^{1-\frac1r}),$$

with C_2 only depending on $(\mathcal{B},\Lambda_{\mathbf{v}},\Lambda_L)$. Since, for $q\in\{r,p\}$, $|E_k|^{1-\frac{1}{q}}\leq|\Omega|^{\frac{1}{\inf(r,p)}-\frac{1}{q}}|E_k|^{1-\frac{1}{\inf(r,p)}}$, there exists thus C_3 only depending on $(\mathcal{B},r,\Lambda_{\mathbf{v}},p,\Lambda_L)$ such that, for all $h>k\geq k_0$,

$$|E_h|\leq\frac{C_3^\beta(1+k)^\beta}{(h-k)^\beta}|E_k|^\gamma$$

with $\beta=\frac{N}{N-1}>0$ and $\gamma=\beta(1-\frac{1}{\inf(r,p)})>1$ (recall that $r>N$ and $p>N$).
For all $h>k\geq 0$, we have then

$$|E_{h+k_0}|\leq\frac{C_3^\beta(1+k_0)^\beta(1+k)^\beta}{(h-k)^\beta}|E_{k+k_0}|^\gamma$$

(because $(1+k+k_0)\leq(1+k_0)(1+k)$), and Lemma 1.2 (a generalization of a classical lemma by Stampacchia) applied to $F(k)=|E_{k+k_0}|$ gives thus H only depending on $(C_3,k_0,\beta,\gamma,\Omega)$ (notice that $F(0)=|E_{k_0}|\leq|\Omega|$), i.e. on $(N_*,\mathcal{B},r,\Lambda_{\mathbf{v}},p,\Lambda_L)$, such that $|E_{H+k_0}|=0$, that is to say $|u|\leq H+k_0$ a.e. on Ω. ∎

Proof of Proposition 1.3
The idea is identical to that of the preceding proof. We write $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{v}_1$ with $\mathbf{v}_0\in B(N_*,\chi)$ and $\mathbf{v}_1\in B(r,\Lambda)$.
Since $vS_k(v)\geq(S_k(v))^2$ and $\nabla v=\nabla(S_k(v))$ a.e. on the set $\{S_k(v)\neq 0\}$, using $S_k(v)$ as a test function in (1.4), we get

$$\begin{aligned}&(\mathcal{K}(2,\mathcal{B})-\chi C_S(\Omega,N_*))||S_k(v)||^2_{H^1(\Omega)}\\ \leq\;&\int_\Omega A^T\nabla v\cdot\nabla(S_k(v))+\int_\Omega S_k(v)\mathbf{v}_0\cdot\nabla v+\int_\Omega bvS_k(v)+\int_{\Gamma_f}\lambda vS_k(v)\,d\sigma\\ \leq\;&|\langle L,S_k(v)\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))',H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}|+\Lambda||S_k(v)||_{L^{\frac{2r}{r-2}}(\Omega)}||S_k(v)||_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}\tag{1.38}$$

Since $\frac{2r}{r-2}<\frac{2N}{N-2}$, there exists $q_r>\frac{2r}{r-2}$ only depending on r and N such that $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^{q_r}(\Omega)$; by denoting C_1 the norm of this injection (which only depends on r and Ω) and $E_k=\{x\in\Omega\mid|v(x)|\geq k\}$, we have then

$$||S_k(v)||_{L^{\frac{2r}{r-2}}(\Omega)}\leq C_1|E_k|^{\frac{r-2}{2r}-\frac{1}{q_r}}||S_k(v)||_{H^1(\Omega)}.$$

But, since $|\Omega|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\Lambda_L$ is an upper bound of $||L||_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))'}$, there exists, by Theorem 1.1, C_2 only depending on $(N_*,\mathcal{B},\chi,r,\Lambda,p,\Lambda_L)$ such that $||v||_{H^1(\Omega)}\leq C_2$, which implies $|E_k|\leq C_2^2/k^2$ for all $k\geq 0$. We can thus find $k_0>0$ only depending on $(N_*,\mathcal{B},\chi,r,\Lambda,p,\Lambda_L)$ such that, for all $k\geq k_0$, $C_1\Lambda|E_k|^{\frac{r-2}{2r}-\frac{1}{q_r}}\leq(\mathcal{K}(2,\mathcal{B})-\chi C_S(\Omega,N_*))/2$.
We have then, thanks to (1.38) and when $k\geq k_0$,

$$||S_k(v)||_{H^1(\Omega)}\leq\frac{2}{\mathcal{K}(2,\mathcal{B})-\chi C_S(\Omega,N_*)}\times\frac{|\langle L,S_k(v)\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))',H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}|}{||S_k(v)||_{H^1(\Omega)}}.$$

This inequality is similar to (1.35) (it is even simpler), and we can then conclude as in the proof of Proposition 1.2. ∎

1.3.2 Hölder continuity

To state the Hölder continuity results, we need (at least for technical reasons) stronger integrability hypotheses on b and λ; we replace thus (1.10) and (1.11) by

$$\begin{gathered}\exists\overline{r}>N\text{ such that }b\in L^{\frac{\overline{r}}{2}}(\Omega)\,,\ \lambda\in L^{\overline{r}-1}(\partial\Omega)\\ \text{and }b\geq 0\text{ a.e. on }\Omega,\ \lambda\geq 0\ \sigma\text{-a.e. on }\partial\Omega.\end{gathered}\tag{1.39}$$

We denote by Λ_b an upper bound of $||b||_{L^{\frac{\overline{r}}{2}}(\Omega)}$ and by Λ_λ an upper bound of $||\lambda||_{L^{\overline{r}-1}(\partial\Omega)}$.

We also need an hypothesis on Γ_d and Γ_f; these sets must be "well-distributed" on $\partial\Omega$. We introduce thus two kinds of mappings of $\partial\Omega$:

$$\begin{array}{c} O \text{ is an open subset of } \mathbb{R}^N, \\ h : O \to B := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < 1\} \text{ is a Lipschitz continuous} \\ \text{homeomorphism with a Lipschitz continuous inverse mapping,} \\ h(O \cap \Omega) = B_+ := \{x \in B \mid x_N > 0\}, \\ h(O \cap \partial\Omega) = \{x \in \partial B_+ \mid x_N = 0\}, \end{array} \tag{1.40}$$

$$\begin{array}{c} O \text{ is an open subset of } \mathbb{R}^N, \\ h : O \to B \text{ is a Lipschitz continuous homeomorphism} \\ \text{with Lipschitz continuous inverse mapping,} \\ h(O \cap \Omega) = B_{++} := \{x \in B \mid x_N > 0\,,\ x_{N-1} > 0\}, \\ h(O \cap \Gamma_f) = \{x \in \partial B_{++} \mid x_{N-1} = 0\}, \\ h(O \cap \Gamma_d) = \{x \in \partial B_{++} \mid x_N = 0\}, \end{array} \tag{1.41}$$

and we suppose that

$$\begin{array}{c} \text{There exists a finite number of } (O_i, h_i)_{i\in[1,m]} \text{ such that} \\ \partial\Omega \subset \cup_{i=1}^m O_i \text{ and, for all } i \in [1,m],\ (O_i, h_i) \text{ is of one of the following types:} \\ \left| \begin{array}{ll} (D) & O_i \cap \partial\Omega = O_i \cap \Gamma_d \text{ and } (O_i, h_i) \text{ satisfies (1.40)} \\ (F) & O_i \cap \partial\Omega = O_i \cap \Gamma_f \text{ and } (O_i, h_i) \text{ satisfies (1.40)} \\ (DF) & (O_i, h_i) \text{ satisfies (1.41).} \end{array} \right. \end{array} \tag{1.42}$$

Corollary 1.1 *Under Hypotheses (1.8), (1.9), (1.14), (1.33), (1.34), (1.39) and (1.42), the solution u to (1.3) is Hölder continuous on Ω. More precisely, if Λ_L is an upper bound of $||L||_{(W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))'}$, there exists $\kappa > 0$ only depending on $(\Omega, \alpha_A, \Lambda_A, \overline{r}, r, p)$ and C only depending on $(N_*, \mathcal{B}, \Lambda_A, \overline{r}, \Lambda_b, \Lambda_\lambda, r, \Lambda_{\mathbf{v}}, p, \Lambda_L)$ such that u satisfies $||u||_{\mathcal{C}^{0,\kappa}(\Omega)} \le C$.*

Remark 1.9 *$\mathcal{C}^{0,\kappa}(\Omega)$ denotes the space of κ-Hölder continuous functions, endowed with its usual norm.*

Remark 1.10 *Provided that the function g in (1.31) is in $L^r(\Omega)$ for a $r > N$, the results of Proposition 1.2 and Corollary 1.1 are also true for any solution of (1.32).*

Corollary 1.2 *Under Hypotheses (1.8), (1.9), (1.12), (1.14), (1.33), (1.39) and (1.42), the solution v to (1.4) is Hölder continuous on Ω. More precisely, if Λ_L is an upper bound of $||L||_{(W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))'}$, $r > N$ and $\Lambda \ge 0$, there exists $\eta > 0$ only depending on (N_*, Ω, α_A), $\kappa > 0$ only depending on $(N_*, \Omega, \alpha_A, \Lambda_A, \overline{r}, r, \Lambda, p)$ and C only depending on $(N_*, \mathcal{B}, \Lambda_A, \overline{r}, \Lambda_b, \Lambda_\lambda, r, \Lambda, p, \Lambda_L)$ such that, when $\mathbf{v} \in B(N_*, \eta) + B(r, \Lambda)$, v satisfies $||v||_{\mathcal{C}^{0,\kappa}(\Omega)} \le C$.*

Proof of Corollaries 1.1 and 1.2
Thanks to Proposition 1.2 (respectively 1.3), the solution u to (1.3) (respectively v to (1.4)) is essentially bounded on Ω, and we have an estimate on its L^∞ norm. Thus, thanks to (1.34) and (1.39) (respectively (1.39)), the terms $\varphi \to \int_\Omega u\varphi$, $\varphi \to \int u\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi$, $\varphi \to \int_\Omega bu\varphi$ and $\varphi \to \int_{\Gamma_f} \lambda u\varphi\, d\sigma$ (respectively $\varphi \to \int_\Omega bv\varphi$ and $\varphi \to \int_{\Gamma_f} \lambda v\varphi\, d\sigma$) are in $(W^{1,\inf(r,\overline{r})'}_{\Gamma_d}(\Omega))'$ (respectively $(W^{1,\overline{r}'}_{\Gamma_d}(\Omega))'$), and we have a bound on their norms in this space.
By putting these terms in the right-hand side, we notice then that u satisfies

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \displaystyle\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega u\varphi = \langle \widetilde{L}, \varphi \rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}\,,\ \forall \varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega), \end{array} \right. \tag{1.43}$$

with $\widetilde{L} \in (W^{1,l'}_{\Gamma_d}(\Omega))'$ for $l = \inf(\overline{r}, r, p) > N$. The results of [70] (in the pure Dirichlet case) or of [29] (for other boundary conditions) give then the Hölder continuity of u, as well as the estimates on the Hölder space to which u belongs and on its norm in this space.
For v, we get an equation of the kind

$$\left\{\begin{array}{l} v \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \displaystyle\int_\Omega A^T\nabla v \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega \varphi\mathbf{v}\cdot\nabla v = \langle \widetilde{L}, \varphi\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}\,,\ \forall \varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega), \end{array}\right. \tag{1.44}$$

with $\widetilde{L} \in (W^{1,l'}_{\Gamma_d}(\Omega))'$ for $l = \inf(\overline{r}, p) > N$. In the pure Dirichlet case, the results of [70] give then the Hölder continuity of v; for other boundary conditions, a slight modification of the methods in [29](3) gives the Hölder continuity (as well as the estimates) of v. ■

1.4 The Duality Method for Non Regular Right Hand Sides

As it is shown in [70], the regularity results of Corollaries 1.1 and 1.2 can be transformed into existence and uniqueness results for weaker right-hand sides.

We suppose here Hypotheses (1.8), (1.9), (1.12), (1.14), (1.39) and (1.42).
Define $\mathcal{T} : (H^1_{\Gamma_d}(\Omega))' \to H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ such that, for all $L \in (H^1_{\Gamma_d}(\Omega))'$, $\mathcal{T}L$ is the unique solution to (1.4). Thanks to Theorem 1.1, $\mathcal{T}$ is well defined, linear and continuous.
Let $p \in]N, \infty[$. Thanks to Corollary 1.2,

$$\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_{|(W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))'} : (W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))' \to H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$$

is well defined, linear and continuous(4). The adjoint operator of $\mathcal{T}_p$ is a linear continuous application $\mathcal{T}_p^* : (H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}))' \to W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega)$ (since $1 < p < \infty$, $W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega)$ is a reflexive space).

Let $\mathcal{M}(\overline{\Omega}) = (\mathcal{C}(\overline{\Omega}))'$ (identified, through the Riesz representation theorem, to the space of bounded measures on $\overline{\Omega}$). Since $H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ is continuously and densely embedded in $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ and in $H^1(\Omega)$, $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ and $(H^1(\Omega))'$ are continuously embedded in $(H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}))'$.
Thus, we can talk of $\mathcal{M}(\overline{\Omega}) + (H^1(\Omega))'$ as a subspace(5) of $(H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}))'$.

Let $\zeta \in \mathcal{M}(\overline{\Omega}) + (H^1(\Omega))'$. By definition, $f_p = \mathcal{T}_p^*\zeta$ is the unique solution to

$$\left\{\begin{array}{l} f_p \in W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \forall L \in (W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))'\,,\ \langle L, f_p\rangle_{(W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))', W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega)} = \langle \zeta, \mathcal{T}_p L\rangle_{(H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega}))', H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \langle \zeta, \mathcal{T}L\rangle_{(H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega}))', H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})}. \end{array}\right. \tag{1.45}$$

Take now $q \in]N, p[$ and f_q the solution of (1.45) when p is replaced by q. Let $L \in (W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))'$; since $W^{1,q'}_{\Gamma_d}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega)$, $f_q \in W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega)$ and $L_{|W^{1,q'}_{\Gamma_d}(\Omega)} \in (W^{1,q'}_{\Gamma_d}(\Omega))'$, so that, by definition of f_q,

$$\langle L, f_q\rangle_{(W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))', W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega)} = \langle L_{|W^{1,q'}_{\Gamma_d}(\Omega)}, f_q\rangle_{(W^{1,q'}_{\Gamma_d}(\Omega))', W^{1,q'}_{\Gamma_d}(\Omega)} = \langle \zeta, \mathcal{T}L\rangle_{(H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega}))', H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})}.$$

Thus, f_q is also a solution to (1.45) and we have then $f_q = f_p$ for all $q \in]N, p[$.

3 Voir Annexe A.
4 $H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ is endowed with the norm $||\cdot||_{H^1(\Omega)} + ||\cdot||_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}$.
5 Endowed with the norm $||\zeta|| = \inf\{||\mu||_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} + ||L||_{(H^1(\Omega))'}\,,\ (\mu, L) \in \mathcal{M}(\overline{\Omega}) \times (H^1(\Omega))'\,,\ \mu + L = \zeta\}$, this is a Banach space, and it is continuously embedded in $(H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega}))'$. In fact, one can show that $(H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega}))' = \mathcal{M}(\overline{\Omega}) + (H^1(\Omega))'$.

The solution to (1.45) belongs thus to $\cap_{q<N/(N-1)} W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega)$ and is in fact the unique solution to

$$\left\{\begin{array}{l} f \in \bigcap_{q<N/(N-1)} W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \forall q < \frac{N}{N-1}\,,\ \forall L \in (W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega))'\,,\ \langle L, f\rangle_{(W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega))', W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega)} = \langle \zeta, \mathcal{T}L\rangle_{(H^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}))', H^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})}. \end{array}\right. \tag{1.46}$$

The unique solution to (1.46) is called the duality solution of

$$\left\{\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(A\nabla f) - \mathrm{div}(\mathbf{v}f) + bf = \zeta & \text{in } \Omega, \\ f = 0 & \text{on } \Gamma_d, \\ A\nabla f \cdot \mathbf{n} + (\lambda + \mathbf{v}\cdot\mathbf{n})f = 0 & \text{on } \Gamma_f. \end{array}\right. \tag{1.47}$$

This gives a notion of solution to (1.1) when the right-hand side L is in $\mathcal{M}(\overline{\Omega}) + (H^1(\Omega))'$, for which we have thus existence and uniqueness (as well as estimates, since $\mathcal{T}_p^*$ is linear continuous — its norm is that of $\mathcal{T}_p$, which can be bounded thanks to the results of Theorem 1.1 and Corollary 1.2).
To understand why, by solving (1.46), we can say that, in a way, we have solved (1.47), we refer the reader to [29]. In particular, it is quite easy to see that, when $\zeta \in (H^1(\Omega))'$, the solution to (1.3) with $L = \zeta_{|H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}$ is the solution to (1.46); we can also state integral formulations (one equivalent to (1.46), the other weaker than (1.46)) satisfied by the solution of (1.46) that makes it easier to see why this solution is a solution to (1.47).

Under Hypothesis (1.34), one can do the same reasoning using the regularity results on the solution to (1.3). In this case, we obtain a duality solution to

$$\left\{\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(A^T\nabla f) + \mathbf{v}\cdot\nabla f + bf = \zeta & \text{in } \Omega, \\ f = 0 & \text{on } \Gamma_d, \\ A^T\nabla f \cdot \mathbf{n} + \lambda f = 0 & \text{on } \Gamma_f. \end{array}\right. \tag{1.48}$$

All the results on the duality solutions obtained in [29] do also apply here; in particular, we could state a stability result similar to the one of Theorem 4.1 in [29].

Acknowledgement The author whishes to thank Lucio Boccardo for his invaluable help.

1.5 Appendix: Technical Lemmas

Lemma 1.1 *Let $(p,q,r) \in [1,\infty]$ such that $q < \infty$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. If $g \in L^q(\Omega)$ and $(f_n)_{n\geq 1}$ is a bounded sequence of $L^p(\Omega)$ which converges a.e. on Ω to f, then $f_n g \to fg$ in $L^r(\Omega)$.*

Remark 1.11 *This results is also true when Ω is replaced by any measured space $(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

Proof of Lemma 1.1
We have $f_n g \to fg$ a.e. on Ω. Since $r < \infty$ (because $q < \infty$) and Ω is of finite measure, thanks to the Vitali Theorem, we just have to prove the r-equi-integrability of $(f_n g)_{n\geq 1}$ to get the convergence in $L^r(\Omega)$ of this sequence.
Denote by M an upper bound of $(||f_n||_{L^p(\Omega)})_{n\geq 1}$. Let E be a measurable subset of Ω; by the Hölder inequality, we have

$$||f_n g||_{L^r(E)} \leq ||f_n||_{L^p(E)}||g||_{L^q(E)} \leq M||g||_{L^q(E)}.$$

Since $q < \infty$, we have $||g||_{L^q(E)} \to 0$ as $|E| \to 0$; this gives the r-equi-integrability of $(f_n g)_{n\geq 1}$ and concludes the proof of this lemma. ∎

Lemma 1.2 *Let $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ be a non-increasing function. If there exist $\beta > 0$, $\gamma > 1$ and $C > 0$ such that*

$$\forall h > k \geq 0\,,\ F(h) \leq \frac{C^\beta (1+k)^\beta}{(h-k)^\beta} F(k)^\gamma$$

and if

$$H = \exp\left(\sum_{n \geq 0} \frac{2^{\frac{1}{\beta}} C F(0)^{\frac{\gamma-1}{\beta}}}{\left(2^{\frac{\gamma-1}{\beta}}\right)^n} \right) < +\infty,$$

then $F(H) = 0$.

For the proof of this variant of Lemma 4.1, i) in [70], we refer the reader to [29].

Chapitre 2

Quelques résultats supplémentaires

2.1 Cas non-linéaire

L'outil que nous avons employé pour prouver l'existence d'une solution variationnelle à (1.3), le degré topologique, est non-linéaire et nous permet donc de traiter, comme nous l'avons vu dans la sous-section 1.2.2, des termes convectifs non-linéaires. Cependant, nous avons fortement utilisé le fait que la partie non-convective de (1.3) était linéaire; c'était nécessaire pour pouvoir définir l'application $\mathcal{F}$ dans l'étape 1 de la preuve du théorème 1.1 (il fallait que la solution de (1.16) soit unique).
Il existe des résultats (cf [11]) qui donnent l'unicité de la solution à certains problèmes de la forme

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) + b|u|^{p-2}u = L & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $-\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u))$ est un opérateur de Leray-Lions agissant sur $W^{1,p}(\Omega)$. On pourrait donc adapter la méthode précédente à ces cas-là et prouver ainsi des résultats d'existence, dans un cadre "variationnel", pour des problèmes elliptiques non-linéaires de la forme

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) - \mathrm{div}(\Phi(x,u)) + b|u|^{p-2}u = L & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Il faudrait cependant, pour faire ceci, ajouter des hypothèses sur a qui entrainent l'unicité de la solution variationnelle de (2.1); la méthode employée précédemment dans le cas linéaire n'est donc pas très adaptée, malgrè l'emploi du degré topologique, au cas non-linéaire.

Nous nous proposons ici de voir que des estimations similaires à celles du cas linéaire, associées à une technique d'approximation (déjà employée dans [8]), permettent néanmoins d'obtenir un résultat d'existence de solution variationnelle dans un cas non-linéaire non-coercitif.
La technique d'approximation que nous allons utiliser a aussi été employée dans [43] pour prouver l'existence, lorsque $L \in L^1(\Omega)$, d'une solution renormalisée à (2.2); cependant, que ce soit dans le cadre des solutions renormalisées de [43] ou dans le cadre des solutions entropiques de [8], on ne cherche des estimations dans l'espace d'énergie associé à l'opérateur que sur les tronquées des solutions (en particulier, on n'estime pas $u - T_k(u)$ dans cet espace). Les estimations que nous présentons ici dans le cas variationnel sont donc originales vis-a-vis des travaux précédents.

2.1.1 Hypothèses

Ω est un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ à frontière lipschitzienne; Γ_d est une partie mesurable de $\partial\Omega$ et $\Gamma_f = \partial\Omega \backslash \Gamma_d$. σ représente la mesure sur $\partial\Omega$.

Soit $p \in]1,\infty[$. Si $p \leq N$, on prend $\overline{p} \in]\frac{Np}{N-1}, \frac{Np}{N-p}[$; si $p > N$, on pose $\overline{p} = +\infty$. Avec un tel choix de $\overline{p}$, $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^{\overline{p}}(\Omega)$ et $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ (l'espace des traces sur $\partial\Omega$ de fonctions dans $W^{1,p}(\Omega)$) s'injecte compactement dans $L^{\frac{N-1}{N}\overline{p}}(\partial\Omega)$.
On note $W^{1,p}_{\Gamma_d}(\Omega)$ l'espace des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ dont la trace est nulle sur Γ_d.

Nous nous intéressons au problème

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) - \mathrm{div}(\Phi(x,u)) + b|u|^{p-2}u = \mathcal{L} & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_d, \\ a(x,u,\nabla u)\cdot \mathbf{n} + \Phi(x,u)\cdot\mathbf{n} + \lambda|u|^{p-2}u = \mathcal{U}_f & \text{sur } \Gamma_f. \end{cases} \tag{2.3}$$

Les hypothèses sur la partie dominante de (2.3) sont:

$$a : \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \text{ est une fonction de Carathéodory,} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered} \exists \alpha > 0 \text{ et } \Theta \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^+) \text{ tels que } a(x,s,\xi)\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^p - \Theta(x) \\ \text{pour presque-tout } x\in\Omega, \text{ pour tout } (s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered} \exists \beta > 0\,,\ h \in L^{p'}(\Omega) \text{ et } \theta\in[0,\overline{p}] \text{ si } \overline{p} < +\infty \text{ ou } \theta \in [0,+\infty[\text{ si } \overline{p} = +\infty \text{ tels que} \\ |a(x,s,\xi)| \leq h(x) + \beta|s|^{\theta/p'} + \beta|\xi|^{p/p'} \text{ pour presque-tout } x\in\Omega, \text{ pour tout } (s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered} (a(x,s,\xi) - a(x,s,\eta))\cdot(\xi-\eta) > 0 \\ \text{pour presque-tout } x\in\Omega, \text{ pour tout } (s,\xi,\eta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \text{ tels que } \xi\neq\eta. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Les termes de plus bas degré satisfont:

$$b \in L^{\left(\frac{\overline{p}}{p}\right)'}(\Omega)\,,\ \lambda \in L^{\left(\frac{(N-1)\overline{p}}{Np}\right)'}(\partial\Omega). \tag{2.8}$$

Afin d'obtenir, comme dans le cas linéaire, la coercitivité de la partie non-convective de (2.3), on fait l'hypothèse suivante:

$$b \geq 0 \text{ presque partout sur } \Omega\,,\ \lambda\geq 0\ \sigma\text{-presque partout sur } \partial\Omega \text{ et } \begin{cases} \sigma(\Gamma_d) > 0\,, \\ \text{ ou} \\ b \neq 0\,, \\ \text{ ou} \\ \lambda\neq 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Sous les hypothèses (2.8) et (2.9), un raisonnement par l'absurde montre que, pour tout $q\in[1,p]$, il existe $K>0$ tel que, pour tout $u\in W^{1,p}_{\Gamma_d}(\Omega)$, on a

$$\alpha\int_\Omega |\nabla u|^p + \left(\int_\Omega b|u|^q\right)^{p/q} + \left(\int_{\Gamma_f}\lambda|u|^q\,d\sigma\right)^{p/q} \geq K||u||^p_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{2.10}$$

Remarque 2.1 *L'opérateur que nous considérons ici est un peu différent des opérateurs de Leray-Lions tels qu'on les étudie classiquement. Cependant, il n'est pas dur de voir (par les méthodes usuellement employées) que, sous les hypothèses (2.4)—(2.9), il existe une solution variationnelle à (2.3) lorsque* $\Phi\equiv 0$.

Enfin, la partie convective de (2.3) satisfait:

$$\begin{gathered} \Phi : \Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N \text{ est une fonction de Carathéodory telle qu'il existe } g\in L^r(\Omega), \\ \text{avec } r = \tfrac{N}{p-1} \text{ si } p<N \text{ et } r\in]\tfrac{p}{p-1},\infty[\text{ si } p\geq N, \text{ satisfaisant} \\ |\Phi(x,s)| \leq g(x)(1+|s|^{p-1}) \text{ pour presque-tout } x\in\Omega \text{ et pour tout } s\in\mathbb{R}. \end{gathered} \tag{2.11}$$

2.1.2 Théorème d'existence

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses (2.4)—(2.9) et (2.11), si $L \in (W^{1,p}(\Omega))'$, il existe une solution à*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W^{1,p}_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega \Phi(x,u)\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega b|u|^{p-2}u\varphi + \int_{\Gamma_f}\lambda|u|^{p-2}u\varphi\,d\sigma \\ \qquad = \langle L,\varphi\rangle_{(W^{1,p}(\Omega))',W^{1,p}(\Omega)}\,,\ \forall\varphi\in W^{1,p}_{\Gamma_d}(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.12}$$

Remarque 2.2 *Le problème (2.12) est une formulation faible de (2.3) (avec L qui prend en compte $\mathcal{L}$ et $\mathcal{U}_f$). On remarque aussi que, grâce aux injections de Sobolev et aux hypothèses d'intégrabilité des diverses données, tous les termes de l'équation de (2.12) ont un sens.*

Preuve du théorème 2.1
Comme signalé précédemment, nous allons prouver l'existence d'une solution à (2.12) au moyen d'une technique d'approximation.
En notant, comme d'habitude, $T_n(s) = \max(-n,\min(s,n))$ la troncature de niveau n, on pose $\Phi_n(x,s) = \Phi(x,T_n(s))$ et $a_n(x,s,\xi) = a(x,s,\xi) + \Phi_n(x,s)$. a_n est clairement une fonction de Carathéodory qui vérifie (2.7) (car Φ_n ne dépend pas de ξ); on a, pour presque tout $x\in\Omega$ et tout $(s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, par l'inégalité de Young,

$$\begin{array}{rcl} a_n(x,s,\xi)\cdot\xi & \geq & \alpha|\xi|^p - \Theta(x) - g(x)(1+n^{p-1})|\xi| \\ & \geq & \alpha|\xi|^p - \Theta(x) - Cg(x)^{p'}(1+n^{p-1})^{p'} - \dfrac{\alpha}{2}|\xi|^p \\ & = & \dfrac{\alpha}{2}|\xi|^p - \widetilde{\Theta}(x) \end{array}$$

où C ne dépend que de (p,α) et $\widetilde{\Theta} = \Theta + Cg^{p'}(1+n^{p-1})^{p'} \in L^1(\Omega)$ (par hypothèse sur g on a $g\in L^{p'}(\Omega)$).
Enfin, pour presque-tout $x\in\Omega$ et tout $(s,\xi)\in\mathbb{R}^N$, on a

$$|a_n(x,s,\xi)| \leq h(x) + g(x)(1+n^{p-1}) + \beta|s|^{\theta/p'} + \beta|\xi|^{p/p'}$$

avec $h + g(1+n^{p-1}) \in L^{p'}(\Omega)$.
a_n vérifie donc les hypothèses (2.4)—(2.7) et il existe (cf remarque 2.1) une solution([1]) à

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \in W^{1,p}_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega \Phi(x,T_n(u_n))\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega b|u_n|^{p-2}u_n\varphi + \int_{\Gamma_f}\lambda|u_n|^{p-2}u_n\varphi\,d\sigma \\ \qquad = \langle L,\varphi\rangle_{(W^{1,p}(\Omega))',W^{1,p}(\Omega)}\,,\ \forall\varphi\in W^{1,p}_{\Gamma_d}(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.13}$$

Nous allons maintenant obtenir, de la même manière que dans le cas linéaire, des estimations sur $(u_n)_{n\geq1}$.
Dans toute la preuve qui suit, les différentes constantes C_i intervenant ne dépendent pas de n.

Etape 1: estimation sur $\ln(1+|u_n|)$.
Soit $\varphi(s) = \int_0^s \frac{dt}{(1+|t|)^p}$. En utilisant $\varphi(u_n)$ comme fonction test dans (2.13), on a

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\frac{\nabla u_n}{(1+|u_n|)^p} + \int_\Omega b|u_n|^{p-2}u_n\varphi(u_n) + \int_{\Gamma_f}\lambda|u_n|^{p-2}u_n\varphi(u_n)\,d\sigma \\ \displaystyle\qquad \leq \int_\Omega g(x)(1+|u_n|^{p-1})\frac{|\nabla u_n|}{(1+|u_n|)^p} + ||L||_{(W^{1,p}(\Omega))'}||\varphi(u_n)||_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{array} \tag{2.14}$$

[1]En fait, contrairement à ce que nous avons pu laissé penser au début de cette section, le degré topologique (ou le théorème de point fixe de Schauder) intervient aussi dans cette preuve: son utilisation est cachée dans l'application du théorème d'existence de Leray-Lions.

Or

$$a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\frac{\nabla u_n}{(1+|u_n|)^p}\geq\alpha\frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^p}-\frac{\Theta(x)}{(1+|u_n|)^p}\geq\alpha|\nabla(\ln(1+|u_n|))|^p-\Theta(x). \tag{2.15}$$

φ étant impaire, croissante et ayant le même signe que s, on a, lorsque $|s|\geq 1$, $|s|^{p-2}s\varphi(s)\geq\varphi(1)|s|^{p-1}$. Ainsi, puisque $p>1$, la fonction continue $s\to|s|^{p-2}s\varphi(s)-\ln(1+|s|)$ tend vers l'infini lorsque $|s|\to\infty$. Il existe donc C_1 tel que, pour tout $s\in\mathbb{R}$, $|s|^{p-2}s\varphi(s)\geq\ln(1+|s|)-C_1$. b et λ étant positives, on en déduit

$$\begin{aligned}&\int_\Omega b|u_n|^{p-2}u_n\varphi(u_n)+\int_{\Gamma_f}\lambda|u_n|^{p-2}u_n\varphi(u_n)\,d\sigma\\ &\quad\geq\int_\Omega b\ln(1+|u_n|)+\int_{\Gamma_f}\lambda\ln(1+|u_n|)\,d\sigma-C_1||b||_{L^1(\Omega)}-C_1||\lambda||_{L^1(\partial\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

On a $1+|s|^{p-1}\leq 2(1+|s|)^{p-1}$ pour tout $s\in\mathbb{R}$, donc

$$\int_\Omega g(x)(1+|u_n|^{p-1})\frac{|\nabla u_n|}{(1+|u_n|)^p}\leq 2\int_\Omega g(x)\frac{|\nabla u_n|}{(1+|u_n|)}\leq 2||g||_{L^{p'}(\Omega)}||\,|\nabla(\ln(1+|u_n|)|\,||_{L^p(\Omega)}. \tag{2.17}$$

Enfin, puisque φ est bornée et $(1+|u_n|)^p\geq 1+|u_n|$, on a

$$\begin{aligned}||\varphi(u_n)||_{W^{1,p}(\Omega)}&\leq C_2+\left(\int_\Omega\left(\frac{|\nabla u_n|}{(1+|u_n|)^p}\right)^p\right)^{1/p}\\ &\leq C_2+\left(\int_\Omega\frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^p}\right)^{1/p}\\ &\leq C_2+||\,|\nabla(\ln(1+|u_n|)|\,||_{L^p(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

En injectant (2.15)—(2.18) dans (2.14) et par l'inégalité de Young, on en déduit

$$\begin{aligned}\alpha||\,|\nabla(\ln(1+|u_n|)|\,||^p_{L^p(\Omega)}+\int_\Omega b\ln(1+|u_n|)+\int_{\Gamma_f}\lambda\ln(1+|u_n|)\,d\sigma\\ \leq C_3+\frac{\alpha}{2}||\,|\nabla(\ln(1+|u_n|)|\,||^p_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Ainsi, $(||\,|\nabla(\ln(1+|u_n|)|\,||_{L^p(\Omega)})_{n\geq1}$, $(\int_\Omega b\ln(1+|u_n|))_{n\geq1}$ et $(\int_{\Gamma_f}\lambda\ln(1+|u_n|)\,d\sigma)_{n\geq1}$ sont des suites bornées; par (2.10) (appliqué à $q=1$), on en déduit que $(\ln(1+|u_n|))_{n\geq1}$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Etape 2: estimation sur $S_k(u_n)=u_n-T_k(u_n)$.
Soit $k>0$. En utilisant $S_k(u_n)$ comme fonction test dans (2.13), on a, puisque $\nabla S_k(u_n)=\mathbf{1}_{\{|u_n|\geq k\}}\nabla u_n$, $|u_n|^{p-2}u_nS_k(u_n)\geq|S_k(u_n)|^p$ et $|u_n|\leq k+|S_k(u_n)|$,

$$\begin{aligned}&\alpha\int_\Omega|\nabla S_k(u_n)|^p+\int_\Omega b|S_k(u_n)|^p+\int_{\Gamma_f}\lambda|S_k(u_n)|^p\,d\sigma\\ &\leq\int_\Omega g(x)(1+|u_n|^{p-1})|\nabla(S_k(u_n))|+||L||_{(W^{1,p}(\Omega))'}||S_k(u_n)||_{W^{1,p}(\Omega)}+||\Theta||_{L^1(\Omega)}\\ &\leq\int_\Omega g(x)(1+(2k)^{p-1}+2^{p-1}|S_k(u_n)|^{p-1})|\nabla(S_k(u_n))|+||L||_{(W^{1,p}(\Omega))'}||S_k(u_n)||_{W^{1,p}(\Omega)}+||\Theta||_{L^1(\Omega)}\\ &\leq 2^{p-1}\int_\Omega g(x)|S_k(u_n)|^{p-1}|\nabla(S_k(u_n))|+\Big((1+(2k)^{p-1})||g||_{L^{p'}(\Omega)}+||L||_{(W^{1,p}(\Omega))'}\Big)||S_k(u_n)||_{W^{1,p}(\Omega)}\\ &\quad+||\Theta||_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ (que l'on fixera plus tard). On écrit $g = g_1 + g_2$ avec $g_1 \in L^r(\Omega)$ tel que $||g_1||_{L^r(\Omega)} \leq \varepsilon$ et $g_2 \in L^\infty(\Omega)$ (une telle écriture est toujours possible). Par les inégalités de Hölder et (2.10), on a donc

$$\begin{aligned}
K||S_k(u_n)||^p_{W^{1,p}(\Omega)} &\leq 2^{p-1}||g_1||_{L^r(\Omega)}||\,|S_k(u_n)|^{p-1}||_{L^q(\Omega)}||S_k(u_n)||_{W^{1,p}(\Omega)} \\
&\quad +2^{p-1}||g_2||_{L^\infty(\Omega)}||\,|S_k(u_n)|^{p-1}||_{L^{p'}(\Omega)}||S_k(u_n)||_{W^{1,p}(\Omega)} \\
&\quad +C_4(1+k^{p-1})||S_k(u_n)||_{W^{1,p}(\Omega)} + ||\Theta||_{L^1(\Omega)} \\
&\leq 2^{p-1}\varepsilon||S_k(u_n)||^{p-1}_{L^{q(p-1)}(\Omega)}||S_k(u_n)||_{W^{1,p}(\Omega)} + C_5||S_k(u_n)||^{p-1}_{L^p(\Omega)}||S_k(u_n)||_{W^{1,p}(\Omega)} \\
&\quad +C_4(1+k^{p-1})||S_k(u_n)||_{W^{1,p}(\Omega)} + ||\Theta||_{L^1(\Omega)} \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

où $q \in [p', \infty[$ est tel que $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p'}$ (comme $r > p'$, un tel q existe bien).
Si $p < N$, on a $r = N/(p-1)$ donc $q(p-1) = \frac{Np}{N-p}$; si $p \geq N$, on a $r > p/(p-1)$, donc $p \leq q(p-1) < \infty$. Dans les deux cas, il existe donc, par les injections de Sobolev, C_6 tel que $||S_k(u_n)||_{L^{q(p-1)}(\Omega)} \leq C_6||S_k(u_n)||_{W^{1,p}(\Omega)}$. De plus, par Hölder et l'injection de Sobolev $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\overline{p}}(\Omega)$, et puisque $S_k(u_n) = 0$ hors de $E_k^n = \{|u_n| \geq k\}$, il existe C_7 tel que

$$||S_k(u_n)||_{L^p(\Omega)} \leq |E_k^n|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\overline{p}}}||S_k(u_n)||_{L^{\overline{p}}(\Omega)} \leq C_7|E_k^n|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\overline{p}}}||S_k(u_n)||_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

En revenant dans (2.19), on obtient donc

$$\begin{aligned}
K||S_k(u_n)||^p_{W^{1,p}(\Omega)} &\leq C_8\varepsilon||S_k(u_n)||^p_{W^{1,p}(\Omega)} + C_8\left(|E_k^n|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\overline{p}}}\right)^{p-1}||S_k(u_n)||^p_{W^{1,p}(\Omega)} \\
&\quad +C_8(1+k^{p-1})||S_k(u_n)||_{W^{1,p}(\Omega)} + ||\Theta||_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Nous fixons maintenant $\varepsilon = K/(4C_8)$. Comme, par Tchebycheff, $|E_k^n| \leq \frac{||\ln(1+|u_n|)||^p_{L^p(\Omega)}}{(\ln(1+k))^p}$ et, par l'étape 1, $(\ln(1+|u_n|))_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^p(\Omega)$, on peut fixer $k > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$, $C_8\left(|E_k^n|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\overline{p}}}\right)^{p-1} \leq K/4$. On en déduit alors, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{K}{2}||S_k(u_n)||^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_8(1+k^{p-1})||S_k(u_n)||_{W^{1,p}(\Omega)} + ||\Theta||_{L^1(\Omega)}.$$

Ainsi, pour ce k, $(S_k(u_n))_{n\geq 1}$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Etape 3: estimation sur u_n.
En mettant, pour le k fixé dans l'étape 2, $T_k(u_n)$ comme fonction test dans (2.13), on a, puisque $|u_n|^{p-2}u_nT_k(u_n) \geq |T_k(u_n)|^p$ et $\nabla(T_k(u_n)) = 0$ là où $|u_n| \geq k$,

$$\begin{aligned}
&\alpha\int_\Omega |\nabla(T_k(u_n))|^p + \int_\Omega b|T_k(u_n)|^p + \int_{\Gamma_f} \lambda|T_k(u_n)|^p \\
&\leq ||L||_{(W^{1,p}(\Omega))'}||T_k(u_n)||_{W^{1,p}(\Omega)} + \int_\Omega |g|(1+k^{p-1})|\nabla(T_k(u_n))| + ||\Theta||_{L^1(\Omega)} \\
&\leq (||L||_{(W^{1,p}(\Omega))'} + (1+k^{p-1})||g||_{L^{p'}(\Omega)})||T_k(u_n)||_{W^{1,p}(\Omega)} + ||\Theta||_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Par (2.10), $(T_k(u_n))_{n\geq 1}$ est donc bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on en déduit, grâce à l'étape 2, que $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Etape 4: passage à la limite.
Quitte à extraire une suite, on peut donc supposer qu'il existe $u \in W^{1,p}_{\Gamma_d}(\Omega)$ tel que $u_n \to u$ faiblement dans $W^{1,p}_{\Gamma_d}(\Omega)$, fortement dans $L^{\overline{p}}(\Omega)$ et presque partout sur Ω. On peut aussi supposer (la trace $W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ étant compacte — car $p > 1$) que les traces de $(u_n)_{n\geq 1}$ convergent σ-presque partout sur $\partial\Omega$ vers la trace de u.

Nous allons maintenant montrer que, à une sous-suite près, $\nabla u_n \to \nabla u$ presque partout sur Ω, en utilisant la même méthode que dans le cas variationnel coercitif (Leray-Lions).

On considère donc la fonction intégrable positive $f_n(x) = (a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u_n,\nabla u)) \cdot (\nabla u_n - \nabla u)$. Grâce à l'équation satisfaite par u_n, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_n &= \langle L, u_n - u\rangle_{(W^{1,p}(\Omega))',W^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega \Phi(x,T_n(u_n))\cdot(\nabla u_n - \nabla u) - \int_\Omega b|u_n|^{p-2}u_n(u_n-u) \\ &\quad - \int_\Omega \lambda |u_n|^{p-2}u_n(u_n-u)\,d\sigma - \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u)\cdot(\nabla u_n - \nabla u). \qquad (2.20)\end{aligned}$$

Comme $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ faible, on a $\langle L, u_n - u\rangle_{(W^{1,p}(\Omega))',W^{1,p}(\Omega)} \to 0$.
Puisque $0 \le \theta \le \overline{p}$ on a, par Hölder (avec l'exposant $\overline{p}/\theta \in [1,\infty]$) et pour tout $E \subset \Omega$ mesurable,

$$\int_E |u_n|^\theta \le ||u_n||^\theta_{L^{\overline{p}}(E)} |E|^{1-\frac{\theta}{\overline{p}}}.$$

Si $\overline{p} < \infty$, $(u_n)_{n\ge1}$, qui converge dans $L^{\overline{p}}(\Omega)$, est $\overline{p}$-équi-intégrable et l'inégalité précédente nous montre alors que $(|u_n|^\theta)_{n\ge1}$ est 1-équi-intégrable; si $\overline{p} = \infty$, $1 - \frac{\theta}{\overline{p}} = 1$ et $(u_n)_{n\ge1}$ est bornée dans $L^{\overline{p}}(\Omega)$, donc la même inégalité nous montre encore que $(|u_n|^\theta)_{n\ge1}$ est 1-équi-intégrable. Ainsi, dans les deux cas, $(|u_n|^{\theta/p'})_{n\ge1}$ est p'-équi-intégrable et, par (2.6), $(a(x,u_n,\nabla u))_{n\ge1}$ est p'-équi-intégrable. Cette suite de fonctions convergeant presque partout vers $a(x,u,\nabla u)$, on en déduit que $a(x,u_n,\nabla u) \to a(x,u,\nabla u)$ dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ et, puisque $u_n \to u$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$, que $\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u)\cdot(\nabla u_n - \nabla u) \to 0$.
$(u_n)_{n\ge1}$ étant bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$, elle est aussi bornée dans $L^{\overline{p}}(\Omega)$; $(|u_n|^{p-2}u_n(u_n-u))_{n\ge1}$ est donc une suite bornée dans $L^{\overline{p}/p}(\Omega)$ qui converge presque partout sur Ω vers 0. Puisque $b \in L^{(\overline{p}/p)'}(\Omega)$, avec $(\overline{p}/p)' < \infty$, le lemme 1.1 nous dit que $b|u_n|^{p-2}u_n(u_n-u) \to 0$ dans $L^1(\Omega)$.
De même, les traces de $(u_n)_{n\ge1}$ sont bornées dans $L^{(N-1)\overline{p}/N}(\partial\Omega)$ donc $((|u_n|^{p-2}u_n(u_n-u))_{|\partial\Omega})_{n\ge1}$ est une suite bornée dans $L^{(N-1)\overline{p}/Np}(\partial\Omega)$ qui converge σ-presque partout sur $\partial\Omega$ vers 0. Puisque $\lambda \in L^{((N-1)\overline{p}/Np)'}(\partial\Omega)$ avec $((N-1)\overline{p}/Np)' < \infty$, le lemme 1.1 (associé à la remarque 1.11) nous dit que $\lambda|u_n|^{p-2}u_n(u_n-u) \to 0$ dans $L^1(\partial\Omega)$.
Il reste à voir la convergence du terme $\int_\Omega \Phi(x,T_n(u_n))\cdot(\nabla u_n - \nabla u)$. La suite $(1+|u_n|^{p-1})_{n\ge1}$ converge presque partout sur Ω et est bornée dans $L^q(\Omega)$ avec $q = \frac{Np}{(N-p)(p-1)}$ si $p < N$ et $q < \infty$ si $p \ge N$[2]. g étant dans $L^r(\Omega)$, le lemme 1.1 nous dit que $(g(1+|u_n|^{p-1}))_{n\ge1}$ converge dans $L^l(\Omega)$ avec $l \in [1,\infty[$ tel que $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{l}$. Si $p < N$, on a $l = p'$; si $p \ge N$, puisque $r > p'$, on peut trouver $q < \infty$ tel que $l = p'$. Dans les deux cas, on constate donc que $(g(1+|u_n|^{p-1}))_{n\ge1}$ converge dans $L^{p'}(\Omega)$ et est donc p'-équi-intégrable sur Ω. Comme $|\Phi(x,T_n(u_n))| \le g(1+|u_n|^{p-1})$, on en déduit que $(\Phi(x,T_n(u_n)))_{n\ge1}$ est aussi p'-équi-intégrable sur Ω; cette suite de fonction convergeant presque partout sur Ω vers $\Phi(x,u)$, on a donc $\Phi(x,T_n(u_n)) \to \Phi(x,u)$ dans $(L^{p'}(\Omega))^N$. Puisque $u_n \to u$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$, cela nous donne donc $\int_\Omega \Phi(x,T_n(u_n))\cdot(\nabla u_n - \nabla u) \to 0$.
En rassemblant toutes ces convergences dans (2.20), on en déduit que $\int_\Omega f_n \to 0$, soit, puisque $f_n \ge 0$, que $f_n \to 0$ dans $L^1(\Omega)$ et, quitte à extraire une suite, presque partout sur Ω.
L'argument classique de [53] nous permet alors de voir que $\nabla u_n \to \nabla u$ presque partout sur Ω. En effet, en prenant $x \in \Omega$ tel que $a(x,\cdot,\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, $\Theta(x) < \infty$, $h(x) < \infty$, $\nabla u(x) \in \mathbb{R}^N$, $f_n(x) \to 0$, $u_n(x) \to u(x)$ et (2.5)-(2.7) soient valides, soit $(\nabla u_n(x))_{n\ge1}$ est non bornée dans $\mathbb{R}^N$, soit $(\nabla u_n(x))_{n\ge1}$ est bornée dans $\mathbb{R}^N$. Dans le premier cas, cela signifie qu'on peut extraire une suite, encore notée $(\nabla u_n(x))_{n\ge1}$, dont la norme tend vers l'infini; mais alors, par (2.5) et (2.6), on a

$$\begin{aligned}f_n(x) &\ge \alpha|\nabla u_n(x)|^p - \Theta(x) - h(x)|\nabla u(x)| - \beta|u_n(x)|^{\theta/p'}|\nabla u(x)| - \beta|\nabla u_n(x)|^{p/p'}|\nabla u(x)| \\ &\quad -|a(x,u_n(x),\nabla u(x))|(|\nabla u_n(x)| + |\nabla u(x)|) \to \infty\end{aligned}$$

[2]En fait, elle est aussi bornée dans $L^\infty(\Omega)$ si $p > N$.

(puisque $p > p/p'$ et $p > 1$), ce qui est une contradiction et montre que $(\nabla u_n(x))_{n\geq 1}$ est forcément bornée dans $\mathbb{R}^N$. Quitte à extraire une suite, encore notée $(\nabla u_n(x))_{n\geq 1}$, on peut donc supposer que $\nabla u_n(x) \to \xi$ dans $\mathbb{R}^N$; on a alors

$$f_n(x) \to 0 = (a(x,u(x),\xi) - a(x,u(x),\nabla u(x))) \cdot (\xi - \nabla u(x))$$

ce qui, par (2.7), implique $\xi = \nabla u(x)$; la seule limite des suites extraites de $(\nabla u_n(x))_{n\geq 1}$ étant $\nabla u(x)$, cela prouve bien que la suite bornée $(\nabla u_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers $\nabla u(x)$.

On a donc trouvé une fonction $u \in W^{1,p}_{\Gamma_d}(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$, presque partout sur Ω, $\nabla u_n \to \nabla u$ presque partout sur Ω et $u_{n|\partial\Omega} \to u_{|\partial\Omega}$ σ-presque partout sur $\partial\Omega$.
Comme $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$, $(a(x,u_n,\nabla u_n))_{n\geq 1}$ est bornée dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ et converge donc, à une sous-suite près, faiblement dans cet espace; mais $a(x,u_n,\nabla u_n) \to a(x,u,\nabla u)$ presque partout sur Ω donc, par le théorème de compacité $L^p - L^q$, $a(x,u_n,\nabla u_n) \to a(x,u,\nabla u)$ fortement dans $(L^q(\Omega))^N$ dès que $q < p'$. La limite faible dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ de $(a(x,u_n,\nabla u_n))_{n\geq 1}$ est donc $a(x,u,\nabla u)$. Ainsi, pour tout $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n) \cdot \nabla\varphi \to \int_\Omega a(x,u,\nabla u) \cdot \nabla\varphi. \tag{2.21}$$

$|u_n|^{p-2}u_n \to |u|^{p-2}u$ presque partout sur Ω en étant bornée dans $L^{\overline{p}/(p-1)}(\Omega)$ donc, par le lemme 1.1, $b|u_n|^{p-2}u_n \to b|u|^{p-2}u$ dans $L^{\overline{p}'}(\Omega)$; ainsi, pour tout $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega b|u_n|^{p-2}u_n\varphi \to \int_\Omega b|u|^{p-2}u\varphi. \tag{2.22}$$

$|u_n|^{p-2}u_n \to |u|^{p-2}u$ σ-presque partout sur $\partial\Omega$ en étant bornée dans $L^{(N-1)\overline{p}/(N(p-1))}(\partial\Omega)$ donc, par le lemme 1.1 et la remarque 1.11, $\lambda|u_n|^{p-2}u_n \to \lambda|u|^{p-2}u$ dans $L^{((N-1)\overline{p}/N)'}(\partial\Omega)$; ainsi, pour tout $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_{\Gamma_f} \lambda|u_n|^{p-2}u_n\varphi\, d\sigma \to \int_{\Gamma_f} \lambda|u|^{p-2}u\varphi\, d\sigma. \tag{2.23}$$

On a déjà vu que $\Phi(x,T_n(u_n)) \to \Phi(x,u)$ dans $(L^{p'}(\Omega))^N$, donc, pour tout $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \Phi(x,T_n(u_n)) \cdot \nabla\varphi \to \int_\Omega \Phi(x,u) \cdot \nabla\varphi. \tag{2.24}$$

(2.21)—(2.24) permettent donc de passer à la limite dans l'équation satisfaite par u_n et de constater que u est bien une solution de (2.12). ■

2.1.3 Théorème d'unicité

Le résultat d'unicité de [11], qui n'utilise pas l'hypothèse de coercitivité de l'opérateur, peut s'appliquer directement dans le cas non-coercitif étudié ici, lorsque l'on considère des conditions au bord de type Dirichlet; l'adaptation aux conditions au bord mixtes est assez triviale, mais traiter les conditions au bord de type Fourier demande une petite astuce ([3]).
Dans la preuve qui suit, la nouveauté par rapport à [11] réside donc essentiellement dans l'étape 1.

Théorème 2.2 *Sous les hypothèses (2.4)—(2.9), (2.11) et les deux suivantes:*

$$\begin{gathered} \exists \delta > 0,\ H \in L^{p'}(\Omega)\ \textit{et } \varepsilon_0 > 0 \textit{ tels que} \\ |a(x,s,\xi) + \Phi(x,s) - a(x,t,\xi) - \Phi(x,t)| \leq \delta|s-t|(H(x) + |\xi|^{p-1} + |s|^{p^*/p'} + |t|^{p^*/p'}) \\ \textit{pour presque-tout } x \in \Omega, \textit{ pour tout } (s,t,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \textit{ satisfaisant } |s-t| < \varepsilon_0 \end{gathered} \tag{2.25}$$

[3] A savoir: prouver que, si u et v sont des solutions de (2.12), alors $u = v$ presque partout sur $\{x \in \Omega \mid b(x) > 0\}$ et σ-presque partout sur $\{x \in \partial\Omega \mid \lambda(x) > 0\}$.

(où $p^* \in [1,\infty[$ est un exposant tel que $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte dans $L^{p^*}(\Omega)$ — i.e. $p^* \in [1, \frac{Np}{N-p}]$ si $p < N$ et $p^* \in [1,\infty[$ si $p \geq N$),

$$\begin{array}{c} 1 < p \leq 2 \text{ et } \exists \gamma > 0 \text{ tel que } (a(x,s,\xi) - a(x,s,\eta)) \cdot (\xi - \eta) \geq \gamma(|\xi|^{p-2} + |\eta|^{p-2})|\xi - \eta|^2 \\ \text{pour presque-tout } x \in \Omega, \text{ pour tout } (s,\xi,\eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ \text{ou} \\ b > 0 \text{ presque partout sur } \Omega, \end{array} \tag{2.26}$$

la solution de (2.12) est unique.

Preuve du théorème 2.2
Supposons qu'il existe deux solutions u et v à (2.12). En faisant la différence des équations satisfaites par u et v et en utilisant la fonction test $\varphi = T_\varepsilon(w)$, où $w = u - v$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, on a, par (2.25),

$$\int_\Omega (a(x,u,\nabla u) - a(x,u,\nabla v)) \cdot \nabla(T_\varepsilon(w)) \tag{2.27}$$

$$+ \int_\Omega b(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v)T_\varepsilon(w) + \int_{\Gamma_f} \lambda(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v)T_\varepsilon(w)\, d\sigma \tag{2.28}$$

$$= \int_\Omega (a(x,v,\nabla v) + \Phi(x,v) - a(x,u,\nabla v) - \Phi(x,u)) \cdot \nabla(T_\varepsilon(w))$$

$$\leq \delta \int_{A_\varepsilon} |w|(H + |\nabla v|^{p-1} + |u|^{p^*/p'} + |v|^{p^*/p'})|\nabla w| \tag{2.29}$$

où $A_\varepsilon = \{0 < |w| < \varepsilon\}$. On commence par traiter les termes de plus bas degré (2.28) puis on sépare les cas $p > 2$ et $p \leq 2$.

Etape 1: termes (2.28).
On remarque que le terme (2.27) est positif, que $T_\varepsilon(w)$ a le même signe que $|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v$ et que

$$|T_\varepsilon(w)| \geq \varepsilon \mathbf{1}_{B_\varepsilon}, \quad |T_\varepsilon(w)_{|\partial\Omega}| \geq \varepsilon \mathbf{1}_{C_\varepsilon},$$

où $B_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid |w(x)| \geq \varepsilon\}$ et $C_\varepsilon = \{x \in \partial\Omega \mid |w(x)| \geq \varepsilon\}$.
Ainsi, par positivité de b et λ, (2.29) donne

$$\varepsilon \int_\Omega b\left||u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right| \mathbf{1}_{B_\varepsilon} + \varepsilon \int_{\Gamma_f} \lambda \left||u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right| \mathbf{1}_{C_\varepsilon}\, d\sigma \leq \varepsilon \int_{A_\varepsilon} \phi \tag{2.30}$$

où $\phi = \delta(H + |\nabla v|^{p-1} + |u|^{p^*/p'} + |v|^{p^*/p'})|\nabla w| \in L^1(\Omega)$ (car $(H, |\nabla v|^{p-1}, |u|^{p^*/p'}, |v|^{p^*/p'}) \in L^{p'}(\Omega)$ et $|\nabla w| \in L^p(\Omega)$). Par convergence dominée, puisque $\mathbf{1}_{A_\varepsilon} \to 0$ sur Ω, on a $\int_{A_\varepsilon} \phi \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. En divisant par ε dans (2.30), le lemme de Fatou donne, puisque $\mathbf{1}_{B_\varepsilon} \to \mathbf{1}_{\{x\in\Omega \mid w(x)\neq 0\}}$ sur Ω et $\mathbf{1}_{C_\varepsilon} \to \mathbf{1}_{\{x\in\partial\Omega \mid w(x)\neq 0\}}$ sur $\partial\Omega$ lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$\int_{\{x\in\Omega \mid w(x)\neq 0\}} b\left||u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right| = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\{x\in\partial\Omega \mid w(x)\neq 0\}} \lambda\left||u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right|\, d\sigma = 0.$$

On en déduit donc que $u = v$ presque partout sur $\{x \in \Omega \mid b(x) > 0\}$ et que $u = v$ σ-presque partout sur $\{x \in \partial\Omega \mid \lambda(x) > 0\}$.

Etape 2: si $p > 2$.
On a alors, à un ensemble de mesure nulle près, par (2.26), $\{x \in \Omega \mid b(x) > 0\} = \Omega$, donc $u = v$ presque partout sur Ω par l'étape précédente.

Etape 3: si $1 < p \leq 2$.

Par (2.26) et (2.29), puisque les termes (2.28) sont positifs, on a

$$\gamma \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla v|^{p-2})|\nabla(T_\varepsilon(w))|^2 \leq \delta \int_{A_\varepsilon} |w|(H + |\nabla v|^{p-1} + |u|^{p^*/p'} + |v|^{p^*/p'})|\nabla w|.$$

Mais, par Young, si $\varphi = u$ ou v,

$$\begin{array}{rcl} \delta|w|H|\nabla w| & \leq & \frac{\gamma}{5}|\nabla u|^{p-2}|\nabla w|^2 + C|w|^2 H^2 |\nabla u|^{2-p}\,, \\ \delta|w|\,|\nabla v|^{p-1}|\nabla w| = \delta|w|\,|\nabla v|^{\frac{p}{2}}|\nabla v|^{\frac{p}{2}-1}|\nabla w| & \leq & \frac{\gamma}{5}|\nabla v|^{p-2}|\nabla w|^2 + C|w|^2|\nabla v|^p\,, \\ \delta|w|\,|\varphi|^{p^*/p'}|\nabla w| & \leq & \frac{\gamma}{5}|\nabla u|^{p-2}|\nabla w|^2 + C|w|^2|\varphi|^{2p^*/p'}|\nabla u|^{2-p}\,, \end{array}$$

de sorte que

$$\begin{array}{l} \frac{\gamma}{5}\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla v|^{p-2})|\nabla(T_\varepsilon(w))|^2 \\ \leq \quad C\int_{A_\varepsilon} |w|^2(H^2|\nabla u|^{2-p} + |\nabla v|^p + (|u|^{2p^*/p'} + |v|^{2p^*/p'})|\nabla u|^{2-p}) \leq \varepsilon^2 \int_{A_\varepsilon} \psi_1 \end{array} \tag{2.31}$$

où $\psi_1 = C((H^2 + |u|^{2p^*/p'} + |v|^{2p^*/p'})|\nabla u|^{2-p} + |\nabla v|^p)$. Mais $H^2 + |u|^{2p^*/p'} + |v|^{2p^*/p'} \in L^{p'/2}(\Omega)$ (on a bien $p' \geq 2$ puisque $p \leq 2$), $|\nabla u|^{2-p} \in L^{p/(2-p)}(\Omega)$ ($p/(2-p) \in [1,\infty]$ car $2p \geq 2$) et $\frac{2}{p'} + \frac{2-p}{p} = 1$, donc $\psi_1 \in L^1(\Omega)$.
Par Cauchy-Schwarz, on déduit de (2.31) que

$$\int_\Omega |\nabla(T_\varepsilon(w))| \leq C_0 \left(\varepsilon^2 \int_{A_\varepsilon} \psi_1\right)^{1/2} \left(\int_{A_\varepsilon} \psi_2\right)^{1/2}$$

où $\psi_2 = (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla v|^{p-2})^{-1}$. Or, pour tous réels (x,y) positifs, on a $(x+y)^{-1} \leq x^{-1} + y^{-1}$, donc $\psi_2 \leq |\nabla u|^{2-p} + |\nabla v|^{2-p} \in L^1(\Omega)$ (car $0 \leq 2-p \leq p$). Ainsi, puisque $\mathbf{1}_{A_\varepsilon} \to 0$ sur Ω, on a, pour $i \in \{1,2\}$, $\int_{A_\varepsilon} \psi_i \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$.
On obtient finalement

$$\int_\Omega |\nabla(T_\varepsilon(w))| \leq \varepsilon\omega(\varepsilon) \tag{2.32}$$

où $\omega(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Comme u et v sont dans $W^{1,p}_{\Gamma_d}(\Omega)$ et $u - v = 0$ σ-presque partout sur $\partial\Omega$ là où $\lambda > 0$ (cf étape 1), en notant $\Gamma_0 = \Gamma_d \cup \{x \in \partial\Omega \mid \lambda(x) > 0\}$, on a $w = u - v \in W^{1,p}_{\Gamma_0}(\Omega)$, donc $T_\varepsilon(w) \in W^{1,1}_{\Gamma_0}(\Omega)$. On sait aussi, toujours par l'étape 1, que $w = u - v = 0$ presque partout sur Ω là où $b > 0$.
Par (2.9), on a soit $\sigma(\Gamma_d) > 0$, soit $\sigma(\{x \in \partial\Omega \mid \lambda(x) > 0\}) > 0$, soit $|\{x \in \Omega \mid b(x) > 0\}| > 0$. Dans n'importe lequel des deux premiers cas, $\sigma(\Gamma_0) > 0$ et l'inégalité de Poincaré nous donne donc C' tel que, pour tout $\varphi \in W^{1,1}_{\Gamma_0}(\Omega)$,

$$||\varphi||_{L^1(\Omega)} \leq C'||\,|\nabla\varphi|\,||_{L^1(\Omega)}. \tag{2.33}$$

Dans le deuxième cas, puisque $E = \{x \in \Omega \mid b(x) > 0\}$ est de mesure non-nulle, il est assez aisé de voir par l'absurde qu'il existe C' tel que, pour tout $\varphi \in W^{1,1}(\Omega)$ nulle sur E, on a encore (2.33).
Puisque $T_\varepsilon(w) \in W^{1,1}_{\Gamma_0}(\Omega)$ est nulle presque partout sur E, on peut donc lui appliquer (2.33) qui donne, associé à (2.32),

$$\int_\Omega |T_\varepsilon(w)| \leq C'\varepsilon\omega(\varepsilon).$$

Soit $\delta \in]0,\varepsilon_0[$; si $0 < \varepsilon < \delta$, on a $|T_\varepsilon(w)| \geq \varepsilon$ sur $B_\delta = \{x \in \Omega \mid |w(x)| \geq \delta\}$, donc par l'inégalité précédente, $|B_\delta| \leq C'\omega(\varepsilon)$. En faisant $\varepsilon \to 0$, on en déduit que B_δ est de mesure nulle pour tout $\delta \in]0,\varepsilon_0[$, c'est à dire que $w = 0$ presque partout sur Ω. ■

2.2 Contre-exemple à la régularité höldérienne

Considérons le problème mixte élémentaire suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = L & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_d, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_f. \end{cases} \tag{2.34}$$

Lorsque L est régulier (par exemple dans $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, mais on a vu que l'on a besoin de beaucoup moins que cela), on a pu prouver la continuité sur $\overline{\Omega}$ de la solution variationnelle u de (2.34) *à condition* de supposer une hypothèse de "bonne répartition" de Γ_d sur $\partial\Omega$ (hypothèse (1.42)); cette hypothèse est bien sûr inutile lorsque l'on veut prouver la continuité de u à l'intérieur de Ω mais elle est cruciale lorsque l'on cherche à obtenir la continuité de u jusqu'au bord de Ω.
C'est ce que nous nous proposons de voir ici.

2.2.1 Construction d'un Γ_d singulier

Nous allons exhiber un borélien Γ_d de $\partial\Omega$ pour lequel la solution de (2.34) n'est pas continue sur $\overline{\Omega}$ (pour une très large classe de seconds membres réguliers L). L'idée est de trouver Γ_d suffisament "gros" pour que toute fonction continue nulle sur Γ_d soit nulle sur $\partial\Omega$, mais de sorte qu'il existe des fonctions de $H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ qui ne sont pas nulles sur $\partial\Omega$ tout entier.

On suppose $N = 3$ ([4]) et on prend donc Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ à frontière lipschitzienne.

Pour $x \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in]0,1[$, on note

$$f_{x,\alpha}(y) = \left(1 - \frac{|y-x|}{\alpha}\right)^+.$$

$f_{x,\alpha}$ est une fonction de $H^1(\mathbb{R}^3)$ qui prend ses valeurs dans $[0,1]$ et dont le gradient $-\frac{1}{\alpha}\mathbf{1}_{B(x,\alpha)}\frac{\cdot - x}{|\cdot - x|}$ vérifie $|\nabla f_{x,\alpha}| = \frac{1}{\alpha}\mathbf{1}_{B(x,\alpha)}$ ($B(x,\alpha)$ désigne la boule euclidienne de centre x et de rayon α). On a donc $||\,|\nabla f_{x,\alpha}|\,||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \frac{1}{\alpha^2}|B(x,\alpha)| = C_0\alpha$, où $C_0 = |B(0,1)|$; comme $||f_{x,\alpha}||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le |B(x,\alpha)| = C_0\alpha^3$, on en déduit

$$||f_{x,\alpha}||_{H^1(\mathbb{R}^3)} \le C_1\sqrt{\alpha}, \tag{2.35}$$

où C_1 ne dépend ni de x ni de α (rappelons que l'on a pris $\alpha \le 1$). Enfin, on a

$$\int_{\partial\Omega} |f_{x,\alpha}|\, d\sigma \le \sigma(\partial\Omega \cap B(x,\alpha)) \le C_2\alpha^2, \tag{2.36}$$

où C_2 ne dépend que de Ω ([5]).

Prenons $\alpha_n = \frac{\varepsilon}{2^n}$ ($\varepsilon \in]0,1[$ sera fixé plus tard) et $(x_n)_{n\ge1}$ une suite dense dans $\partial\Omega$. On pose

$$\Gamma_d = \bigcup_{n\ge1}\left(\partial\Omega \cap B\left(x_n, \frac{\alpha_n}{2}\right)\right).$$

Notons que Γ_d est un ouvert dense de $\partial\Omega$.
Vu le choix de $(\alpha_n)_{n\ge1}$ et la propriété (2.35), la série des $(f_{x_n,\alpha_n})_{n\ge1}$ est absolument convergente dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ et

$$f = \sum_{n\ge1} f_{x_n,\alpha_n}$$

[4] Le raisonnement qui suit pourrait être effectué avec n'importe quel $N \ge 3$. Il n'est cependant pas clair que le résultat que nous prouvons dans cette section 2.2 soit vrai en dimension $N = 2$.

[5] C'est une propriété générale: la mesure $(N-1)$-dimensionnelle de l'intersection d'un bord d'ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ avec un ensemble de diamètre de l'ordre de α est un $\mathcal{O}(\alpha^{N-1})$.

est donc bien défini dans $H^1(\mathbb{R}^3)$. On a aussi, au sens des traces, $f = \sum_{n\geq 1} f_{x_n,\alpha_n}$ dans $L^2(\partial\Omega)$.
Pour tout $n \geq 1$, comme $f_{x_n,\alpha_n} \geq 1/2$ sur $\partial\Omega \cap B(x_n, \alpha_n/2)$ (cette fonction étant continue, sa trace sur $\partial\Omega$ est égale à sa restriction) et $f \geq f_{x_n,\alpha_n}$ sur $\partial\Omega$ (toutes les fonctions $(f_{x_m,\alpha_m})_{m\geq 1}$ sont positives), on a $f \geq 1/2$ sur $\partial\Omega \cap B(x_n, \alpha_n/2)$. Ainsi, $f \geq 1/2$ sur Γ_d.
La fonction $1 - 2T_{1/2}(f) \in H^1(\mathbb{R}^3)$ est nulle sur Γ_d ($T_{1/2}(f) = 1/2$ sur Γ_d, puisque $f \geq 1/2$ sur Γ_d) et sa restriction φ_0 à Ω vérifie donc $\varphi_0 \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$. Nous allons maintenant choisir $\varepsilon \in]0,1[$ pour nous assurer que $\int_{\partial\Omega} \varphi_0\, d\sigma > 0$ (et que donc $\varphi_0 \not\equiv 0$ sur $\partial\Omega$).
Puisque la série définissant f converge au sens des traces dans $L^2(\partial\Omega) \hookrightarrow L^1(\partial\Omega)$, on a, par (2.36),

$$\int_{\partial\Omega} |2T_{1/2}(f)|\, d\sigma \leq 2\int_{\partial\Omega} f\, d\sigma = 2\sum_{n\geq 1}\int_{\partial\Omega} f_{x_n,\alpha_n}\, d\sigma \leq 2C_2\varepsilon^2 \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2^n)^2} = C_3\varepsilon^2$$

où C_3 ne dépend pas de ε. On prend alors $\varepsilon \in]0,1[$ tel que $C_3\varepsilon^2 \leq \sigma(\partial\Omega)/2$; avec ce choix, on a

$$\int_{\partial\Omega} \varphi_0\, d\sigma = \sigma(\partial\Omega) - \int_{\partial\Omega} 2T_{1/2}(f)\, d\sigma \geq \frac{\sigma(\partial\Omega)}{2} > 0,$$

ce que l'on souhaitait.

Pour résumer, on a donc construit un ouvert dense Γ_d de $\partial\Omega$ tel qu'il existe $\varphi_0 \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ vérifiant $\int_{\partial\Omega} \varphi_0\, d\sigma > 0$.

2.2.2 Non-continuité sur $\partial\Omega$ de la solution de (2.34)

Nous allons maintenant prouver le résultat suivant.

Théorème 2.3 *Avec le Γ_d construit dans la sous-section 2.2.1, pour tout $L \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ positive non-nulle, la solution de (2.34) n'est pas continue sur $\overline{\Omega}$.*

En fait, nous allons prouver que la trace de la solution u de (2.34) n'est pas continue sur $\partial\Omega$, ce qui implique en particulier que u n'est pas continue sur $\overline{\Omega}$ (mais u est continue sur Ω).

Preuve du théorème 2.3
Prenons $L \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ positive non nulle et raisonnons par l'absurde: on suppose que la trace de la solution $u \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ de (2.34) est continue sur $\partial\Omega$; étant nulle σ-presque partout sur Γ_d (car $u \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$) et Γ_d étant un ouvert de $\partial\Omega$, cette trace est donc nulle partout sur Γ_d; puisque Γ_d est dense dans $\partial\Omega$, cette trace est finalement nulle sur $\partial\Omega$ en entier.
Soit ψ la solution variationnelle de

$$\left\{\begin{array}{lll} -\Delta\psi = 0 & \text{dans} & \Omega, \\ \psi = 0 & \text{sur} & \Gamma_d, \\ \nabla\psi\cdot\mathbf{n} = 1 & \text{sur} & \Gamma_f, \end{array}\right. \tag{2.37}$$

c'est à dire $\psi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ vérifiant

$$\int_\Omega \nabla\psi\cdot\nabla\varphi = \int_{\Gamma_f} \varphi\, d\sigma\,,\ \forall\varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega).$$

En mettant u comme fonction test dans l'équation satisfaite par ψ et ψ comme fonction test dans l'équation satisfaite par u, on trouve, puisque u est nulle sur $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega L\psi = \int_{\Gamma_f} u\, d\sigma = 0. \tag{2.38}$$

Nous allons voir, en étudiant ψ, que c'est impossible.

On commence par constater que ψ n'est pas constante sur Ω. En effet, si ψ était constante, en prenant $\varphi_0 \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ (construite dans la sous-section 2.2.1) comme fonction test dans l'équation satisfaite par ψ, on aurait

$$0 = \int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla\varphi_0 = \int_{\Gamma_f} \varphi_0 \, d\sigma \neq 0$$

(car $\int_{\Gamma_f} \varphi_0 \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \varphi_0 \, d\sigma$ puisque φ_0 est nulle sur Γ_d), ce qui est une contradiction.
En utilisant ψ^- comme fonction test dans l'équation satisfaite par ψ, on a

$$-\int_\Omega |\nabla(\psi^-)|^2 = \int_{\Gamma_f} \psi^- \, d\sigma \geq 0,$$

donc $\nabla(\psi^-) = 0$ sur Ω, c'est à dire ψ^- constante sur Ω (on prend, pour simplifier, Ω connexe; dans le cas contraire, il faut raisonner sur chaque composante connexe de Ω). Mais ψ^- est nulle σ-presque partout sur Γ_d, qui n'est pas de σ-mesure nulle, donc ψ^- est en fait nulle presque partout sur Ω: $\psi \geq 0$ presque partout sur Ω.
Comme $\Delta\psi = 0$ dans Ω, ψ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et, n'étant pas constante, elle ne peut avoir de minimum dans Ω (cf [56]). Puisque ψ est positive sur Ω, on en déduit que $\psi > 0$ sur Ω. Mais on avait choisi $L \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ positive, donc $L\psi \geq 0$ sur Ω et (2.38) nous donne donc $L\psi = 0$ sur Ω; ψ étant strictement positive sur Ω, on en déduit que $L = 0$ sur Ω, ce qui est une contradiction avec notre choix de L. ■

En conclusion, une hypothèse de "bonne répartition" de Γ_d (du genre (1.42)) est essentielle à l'extension du résultat de régularité höldérienne de Stampacchia au cas des conditions aux limites mixtes.

2.3 Différentes formulations pour les solutions par dualité

Nous étudions ici un peu plus précisément les solutions par dualité de (1.47) introduites brièvement dans la section 1.4.
Dans toute cette section, nous supposons donc les hypothèses (1.8), (1.9), (1.12), (1.14), (1.39) et (1.42).

2.3.1 Lien avec le cadre variationnel

Lorsque $\zeta \in (H^1(\Omega))'$, il existe une unique solution à (1.47) au sens variationnel: c'est la solution de (1.3) lorsque $L = \zeta_{|H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}$, dont l'existence et l'unicité est assurée par le théorème 1.1.
Pour que la solution de (1.46) soit effectivement une solution, en un certain sens, de (1.47), il est naturel d'attendre que (1.46) redonne la solution variationnelle de (1.47) lorsque $\zeta \in (H^1(\Omega))'$. C'est effectivement le cas.

Pour voir cela, nous allons prouver que la solution variationnelle $u \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ de (1.47) est aussi la solution de (1.46).
On constate tout d'abord que l'on a effectivement $u \in \bigcap_{q<N/(N-1)} W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega)$. Prenons ensuite $q < N/(N-1)$ et $L \in (W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega))'$; par définition de u solution de (1.3) avec $\zeta_{|H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}$ comme second membre, de $\mathcal{T}(L_{|H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}) \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, et puisque $\zeta \in (H^1(\Omega))'$, on a

$$\begin{aligned}
&\langle \zeta, \mathcal{T}(L_{|H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}) \rangle_{(H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega}))', H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \\
&= \langle \zeta, \mathcal{T}(L_{|H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}) \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} \\
&= \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla(\mathcal{T}(L_{|H^1_{\Gamma_d}(\Omega)})) + \int_\Omega u\mathbf{v} \cdot \nabla\mathcal{T}(L_{|H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}) + \int_\Omega bu\mathcal{T}(L_{|H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}) + \int_{\Gamma_f} \lambda u \mathcal{T}(L_{|H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}) \, d\sigma \\
&= \int_\Omega A^T\nabla(\mathcal{T}(L_{|H^1_{\Gamma_d}(\Omega)})) \cdot \nabla u + \int_\Omega u\mathbf{v} \cdot \nabla\mathcal{T}(L_{|H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}) + \int_\Omega b\mathcal{T}(L_{|H^1_{\Gamma_d}(\Omega)})u + \int_{\Gamma_f} \lambda\mathcal{T}(L_{|H^1_{\Gamma_d}(\Omega)})u \, d\sigma
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle L_{|H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}, u\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)} \\
&= \langle L, u\rangle_{(W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega))', W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

et u satisfait donc bien l'équation de (1.46).

2.3.2 Formulation intégrale forte de (1.46)

Il peut être plus facile de comprendre pourquoi (1.46) résout (1.47) une fois que l'on a transformé (1.46) en une formulation équivalente faisant intervenir, comme les formulations variationnelles usuelles, des intégrales. Nous avons cependant besoin, pour faire cela, de quelques préliminaires.

Soit $s \in]1,\infty[$. L'application

$$
\left\{ \begin{array}{r} \mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \longrightarrow (W^{1,s}_{\Gamma_d}(\Omega))' \\ \varphi \longrightarrow (\phi \to \int_\Omega \varphi\phi) \end{array} \right.
$$

est une injection dense de $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ dans $(W^{1,s}_{\Gamma_d}(\Omega))'$ (la densité vient de la représentation de tout élément de $(W^{1,s}_{\Gamma_d}(\Omega))'$ comme somme d'un élément de $L^{s'}(\Omega)$ et de la divergence — en un certain sens — d'un élément de $(L^{s'}(\Omega))^N$). Cette injection nous permet de considérer $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ comme un sous-espace de $(W^{1,s}_{\Gamma_d}(\Omega))'$ (et cette identification est cohérente avec l'injection naturelle de ces espaces dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ lorsque $\Gamma_d = \partial\Omega$).
Définissons $\Theta : H^1_{\Gamma_d}(\Omega) \to (H^1_{\Gamma_d}(\Omega))'$ par: pour tout $(\varphi,\psi) \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$,

$$
\langle \Theta(\varphi), \psi\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)} = \int_\Omega A^T\nabla\varphi\cdot\nabla\psi + \int_\Omega \psi\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega b\varphi\psi + \int_{\Gamma_f} \lambda\varphi\psi\, d\sigma.
$$

Notons deux propriétés de Θ, qui nous seront utiles par la suite.

i) Pour tout $\varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$, $\Theta(\varphi)_{|\mathcal{D}(\Omega)} = -\mathrm{div}(A^T\nabla\varphi) + \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + b\varphi$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$,

ii) $\Theta \circ \mathcal{T} = Id_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))'}$ et $\mathcal{T} \circ \Theta = Id_{H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}$.

Remarque 2.3 *Dans le cas Dirichlet pur, $\Gamma_d = \partial\Omega$ et on sait alors que $\Theta(\varphi) \in (H^1_0(\Omega))'$ est entièrement déterminé par ses valeurs sur $\mathcal{D}(\Omega)$; la propriété i) n'est alors plus uniquement valable en restriction à $\mathcal{D}(\Omega)$, mais dans $(H^1_0(\Omega))'$ en entier.*

Preuve des propriétés i) et ii)
La propriété i) étant complètement triviale, nous passons directement à la preuve de ii). Pour tout $L \in (H^1_{\Gamma_d}(\Omega))'$, par définition de $\mathcal{T}$ on a, lorsque $\psi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$,

$$
\begin{aligned}
\langle L, \psi\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)} &= \int_\Omega A^T\nabla(\mathcal{T}L)\cdot\nabla\psi + \int_\Omega \psi\mathbf{v}\cdot\nabla(\mathcal{T}L) + \int_\Omega b(\mathcal{T}L)\psi + \int_{\Gamma_f} \lambda(\mathcal{T}L)\psi\, d\sigma \\
&= \langle \Theta(\mathcal{T}L), \psi\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)},
\end{aligned}
$$

ce qui signifie que $L = \Theta \circ \mathcal{T}(L)$ et prouve la première partie de ii).
Soit maintenant $\varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$. On a, par définition de Θ,

$$
\left\{ \begin{array}{l} \varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \displaystyle\int_\Omega A^T\nabla\varphi\cdot\nabla\psi + \int_\Omega \psi\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega b\varphi\psi + \int_{\Gamma_f} \lambda\varphi\psi\, d\sigma = \langle \Theta(\varphi), \psi\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))', H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}\,, \\ \qquad \forall \psi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega). \end{array} \right.
$$

Mais l'unique solution à ce problème (cf théorème 1.1) est $\mathcal{T}(\Theta(\varphi))$, donc $\varphi = \mathcal{T}(\Theta(\varphi))$ et la deuxième partie de la propriété ii) est prouvée. ∎

On peut maintenant établir une formulation intégrale équivalente à (1.46).
Soit $p \in]N, \infty[$. Puisque $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est densément injecté dans $(W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))'$, (1.45) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} f_p \in W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \forall L \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\,,\ \langle L, f_p\rangle_{(W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))', W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega)} = \int_\Omega L f_p = \langle \zeta, \mathcal{T}L\rangle_{(H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega}))', H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})}. \end{array}\right. \tag{2.39}$$

Mais par le raisonnement ci-dessus, il y a une bijection

$$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \longleftrightarrow \{\varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\,,\ \Theta(\varphi) \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\},$$

qui à $L \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ associe $\varphi = \mathcal{T}L \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ (on a bien, alors, $\Theta(\mathcal{T}L) = L \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$) et qui, à $\varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ telle que $\Theta(\varphi) \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, associe $L = \Theta(\varphi)$. Notons aussi que, si $\varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ vérifie $\Theta(\varphi) \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \subset (W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega))'$, alors par le corollaire 1.2, $\varphi \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.
(1.45) est donc équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} f_p \in W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \forall \varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega) \text{ tel que } \Theta(\varphi) \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\,,\ \displaystyle\int_\Omega \Theta(\varphi) f_p = \langle \zeta, \varphi\rangle_{(H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega}))', H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})}. \end{array}\right. \tag{2.40}$$

Mais, par le lemme fondamental des distributions, lorsque l'élément $\Theta(\varphi)$ de $(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))'$ est dans $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, il est entièrement connu par ses valeurs sur $\mathcal{D}(\Omega)$; par la propriété i) de Θ, lorsque $\Theta(\varphi) \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on a donc $\Theta(\varphi) = -\mathrm{div}(A^T\nabla\varphi) + \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + b\varphi$.
Ainsi, (1.45) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} f_p \in W^{1,p'}_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \forall \varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega) \text{ tel que } \Theta(\varphi) \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\,, \\ \qquad \displaystyle\int_\Omega f_p(-\mathrm{div}(A^T\nabla\varphi) + \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + b\varphi) = \langle \zeta, \varphi\rangle_{(H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega}))', H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})}. \end{array}\right. \tag{2.41}$$

Nous avons vu que la solution de (1.45) est aussi la solution de (1.46) (et, en particulier, appartient à $W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega)$ pour tout $q < N/(N-1)$). On en déduit donc une forme équivalente de (1.46):

$$\left\{\begin{array}{l} f \in \displaystyle\bigcap_{q<N/(N-1)} W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \forall \varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega) \text{ tel que } \Theta(\varphi) \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\,, \\ \qquad \displaystyle\int_\Omega f(-\mathrm{div}(A^T\nabla\varphi) + \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + b\varphi) = \langle \zeta, \varphi\rangle_{(H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega}))', H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})}. \end{array}\right. \tag{2.42}$$

Cette formulation est en fait une formulation faible usuelle de (1.47) dans laquelle on a fait passer toutes les dérivées sur les fonctions tests (les termes de bord sont absorbés par la condition "$\Theta(\varphi) \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$").

Remarque 2.4 *Dans le cas purement Dirichlet, grâce à la remarque 2.3, la condition "$\Theta(\varphi) \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$" est équivalente à "$-\mathrm{div}(A^T\nabla\varphi) + \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + b\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$".*

2.3.3 Formulation intégrale faible de (1.47)

Nous avons vu, dans la partie précédente, qu'on peut obtenir une formulation intégrale équivalente à (1.46) en faisant passer toutes les dérivées sur les fonctions tests. Mais les formulations variationnelles usuelles ne font passer qu'une dérivée sur les fonctions tests; on peut donc chercher à obtenir une formulation faible de (1.47) en ne faisant passer qu'une dérivée sur les fonctions tests et tenter de voir les liens entre cette formulation et (1.46).

Soit $p \in]N,\infty[$ et $\varphi \in W^{1,p}_{\Gamma_d}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. On a, lorsque $q < N/(N-1)$, $W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Nq}{N-q}}(\Omega)$ et $W^{1-1/q,q}(\partial\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{(N-1)q}{N-q}}(\partial\Omega)$; comme $\frac{Nq}{N-q} \to \frac{N}{N-2}$ et $\frac{(N-1)q}{N-q} \to \frac{N-1}{N-2}$ lorsque $q \to \frac{N}{N-1}$, et puisque $\mathbf{v} \in (L^{N_*}(\Omega))^N$, $b \in L^{\frac{\overline{r}}{2}}(\Omega)$ et $\lambda \in L^{\overline{r}-1}(\partial\Omega)$ pour un $\overline{r} > N$, il existe $q < \frac{N}{N-1}$ tel que l'application

$$L_\varphi : \psi \in W^{1,q}(\Omega) \to \int_\Omega A^T\nabla\varphi\cdot\nabla\psi + \int_\Omega \psi\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega b\varphi\psi + \int_{\Gamma_f} \lambda\varphi\psi\, d\sigma$$

est bien définie et dans $(W^{1,q}(\Omega))'$. On constate aussi que $\mathcal{T}L_\varphi = \varphi$, puisque $\mathcal{T}L_\varphi$ et φ sont deux solutions du problème

$$\left\{\begin{array}{l} w \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \displaystyle\int_\Omega A^T\nabla w\cdot\nabla\psi + \int_\Omega \psi\mathbf{v}\cdot\nabla w + \int_\Omega bw\psi + \int_{\Gamma_f}\lambda w\psi\, d\sigma \\ \qquad\qquad = \langle (L_\varphi)_{|H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}, \psi\rangle_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega))',H^1_{\Gamma_d}(\Omega)}\,,\ \forall\psi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega) \end{array}\right. \tag{2.43}$$

qui admet une unique solution.
On a donc, si f est la solution de (1.46), $\langle L_\varphi, f\rangle_{(W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega))',W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega)} = \langle \zeta,\varphi\rangle_{(H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega}))',H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})}$. Ainsi, la solution de (1.46) vérifie

$$\left\{\begin{array}{l} f \in \displaystyle\bigcap_{q<N/(N-1)} W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega)\,, \\ \displaystyle\int_\Omega A\nabla f\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega f\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega bf\varphi + \int_{\Gamma_f}\lambda f\varphi\, d\sigma = \langle\zeta,\varphi\rangle_{(H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega}))',H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})}\,, \\ \qquad \forall\varphi \in \displaystyle\bigcup_{p>N} W^{1,p}_{\Gamma_d}(\Omega). \end{array}\right. \tag{2.44}$$

Cette formulation est la formulation variationnelle naturelle de (1.47) (celle, en particulier, obtenue dans [10]). Elle n'est cependant pas équivalente à (1.46), car la solution de (2.44) n'est en général pas unique (voir [65]).

2.4 Théorèmes de stabilité pour les solutions par dualité

Nous prouvons ici des théorèmes de stabilité pour les solutions par dualité de (1.47) et (1.48).
Pour établir ces résultats, nous utilisons de manière cruciale le fait que les estimations de continuité que l'on a sur les solutions de (1.3) et (1.4) sont dans des espaces de Hölder, et donnent donc des résultats de compacité dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ sur ces solutions; ceci permet de prouver les convergences faibles dans les espaces $W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega)$ des solutions par dualité de (1.47) et (1.48). La convergence forte des gradients de ces solutions est prouvée au travers de leur convergence en mesure, pour laquelle nous utilisons une idée introduite dans [38].

2.4.1 Résultat de stabilité pour la solution de (1.46)

On fait les hypothèses suivantes:

$$\begin{array}{c} \forall m\geq 0\,,\ A_m : \Omega \to M_N(\mathbb{R}) \text{ est une fonction mesurable,} \\ \exists\alpha_A > 0 \text{ tel que } A_m(x)\xi\cdot\xi \geq \alpha_A|\xi|^2 \text{ pour tout } m \geq 0, \text{ pour presque tout } x\in\Omega \\ \text{et pour tout } \xi\in\mathbb{R}^N, \\ \exists\Lambda_A \geq 0 \text{ tel que } ||A_m(x)|| \leq \Lambda_A \text{ pour tout } m\geq 0 \text{ et pour presque tout } x \in \Omega, \\ A_m \longrightarrow A_\infty \text{ presque partout sur } \Omega. \end{array} \tag{2.45}$$

$$\begin{array}{c} \forall m \geq 0\,,\ \mathbf{v}_m \in (L^{N_*}(\Omega))^N\,, \\ \mathbf{v}_m \longrightarrow \mathbf{v}_\infty \text{ dans } (L^{N_*}(\Omega))^N. \end{array} \tag{2.46}$$

Il existe $\overline{r} > N$ tel que

$$\begin{array}{c}\forall m \geq 0\,,\ b_m \in L^{\frac{\overline{r}}{2}}(\Omega) \text{ et } b_m \geq 0 \text{ presque partout sur } \Omega\,,\\ b_m \to b_\infty \text{ faiblement dans } L^{\frac{\overline{r}}{2}}(\Omega)\end{array} \tag{2.47}$$

et

$$\begin{array}{c}\forall m \geq 0\,, \lambda_m \in L^{\overline{r}-1}(\partial\Omega) \text{ et } \lambda_m \geq 0 \ \sigma\text{-presque partout sur } \partial\Omega\,,\\ \lambda_m \to \lambda_\infty \text{ faiblement dans } L^{\overline{r}-1}(\partial\Omega).\end{array} \tag{2.48}$$

$$\begin{array}{c}\forall m \geq 0\,,\ \zeta_m = \mu_m + L_m \text{ avec } \mu_m \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})\,,\ L_m \in (H^1(\Omega))' \text{ et}\\ \mu_m \to \mu_\infty \text{ dans } \mathcal{M}(\overline{\Omega}) \text{ faible-}*\,,\ L_m \to L_\infty \text{ fortement dans } (H^1(\Omega))'.\end{array} \tag{2.49}$$

On notera $\zeta_\infty = \mu_\infty + L_\infty \in \mathcal{M}(\overline{\Omega}) + (H^1(\Omega))'$.

On suppose aussi que les problèmes sont uniformément bien posés, c'est à dire

$$\begin{array}{c}\exists b_0 > 0\,,\ \exists E \subset \Omega \text{ tel que, pour tout } m \geq 0,\ b_m \geq b_0 \text{ sur } E,\\ \exists \lambda_0 > 0\,,\ \exists S \subset \Gamma_f \text{ tel que, pour tout } m \geq 0,\ \lambda_m \geq \lambda_0 \text{ sur } S\\ \text{et soit } \sigma(\Gamma_d) > 0\,,\ \text{soit } |E| > 0\,,\ \text{soit } \sigma(S) > 0.\end{array} \tag{2.50}$$

Théorème 2.4 *Sous les hypothèses (1.8), (2.45)—(2.50) et (1.42), si f_m est la solution de (1.46) avec $(A_m, \mathbf{v}_m, b_m, \lambda_m, \zeta_m)$ à la place de $(A, \mathbf{v}, b, \lambda, \zeta)$ et f_∞ est la solution de (1.46) avec $(A_\infty, \mathbf{v}_\infty, b_\infty, \lambda_\infty, \zeta_\infty)$ à la place de $(A, \mathbf{v}, b, \lambda, \zeta)$, alors*

$$f_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} f_\infty \text{ fortement dans } W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega) \text{ pour tout } q < \tfrac{N}{N-1}.$$

Remarque 2.5 *Nous verrons aussi (lemme 2.4) que si dans l'hypothèse (2.49) on suppose seulement "$L_m \to L_\infty$ dans $(H^1(\Omega))'$ faible-$*$", alors on a $f_m \to f$ faiblement dans $W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega)$ pour tout $q < N/(N-1)$. Cependant, sous la seule convergence faible-$*$ de $(L_m)_{m\geq 0}$, alors il est faux en général que $f_m \to f$ fortement dans $W^{1,1}(\Omega)$ (c'est déjà le cas pour les problèmes variationnels).*

2.4.2 Lemmes techniques

Les lemmes de cette partie sont relativement simples et classiques.

Lemme 2.1 *Si $l \in (H^1(\Omega))' \cap \mathcal{M}(\overline{\Omega})$, alors pour tout $\varphi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, on a $|\langle l, \varphi\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)}| \leq ||l||_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} ||\varphi||_{L^\infty(\Omega)}$.*

Preuve du lemme 2.1
Par définition, dire que $l \in (H^1(\Omega))' \cap \mathcal{M}(\overline{\Omega})$, c'est dire que l est un élément de $(H^1(\Omega))'$ qui vérifie: il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\varphi \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $|\langle l, \varphi\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)}| \leq C||\varphi||_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}$; comme $H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ ($\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$), on peut alors étendre $l_{|H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})}$ en une unique application de $(\mathcal{C}(\overline{\Omega}))' = \mathcal{M}(\overline{\Omega})$; on identifie alors l et cette unique extension.
Soit $\varphi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$; on note $M = ||\varphi||_{L^\infty(\Omega)}$. Soit $\varphi_n \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ telles que $\varphi_n \to \varphi$ dans $H^1(\Omega)$; on sait alors que $T_M(\varphi_n) \to T_M(\varphi) = \varphi$ dans $H^1(\Omega)$.
Comme $T_M(\varphi_n) \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, on a $|\langle l, T_M(\varphi_n)\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)}| \leq ||l||_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} ||T_M(\varphi_n)||_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \leq M||l||_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})}$.
En passant à la limite $n \to \infty$, on en déduit le résultat souhaité. ∎

Lemme 2.2 *Soit $A : \Omega \to M_N(\mathbb{R})$ mesurable essentiellement bornée et vérifiant, pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, $A(x)\xi \cdot \xi \geq 0$. Si $(a_m)_{m\geq 0} \in H^1(\Omega)$ converge faiblement vers a dans $H^1(\Omega)$, alors*

$$\int_\Omega A\nabla a \cdot \nabla a \leq \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega A\nabla a_m \cdot \nabla a_m.$$

Preuve du lemme 2.2

Soit B la forme bilinéaire symétrique définie sur $H^1(\Omega)$ par $(A^T + A)/2$, c'est à dire

$$\forall (w, \widetilde{w}) \in H^1(\Omega)\,,\ B(w, \widetilde{w}) = \int_\Omega \frac{A^T + A}{2} \nabla w \cdot \nabla \widetilde{w}$$

L'hypothèse sur A nous permet de voir que, pour tout $w \in H^1(\Omega)$,

$$B(w, w) = \int_\Omega A\nabla w \cdot \nabla w \geq 0.$$

Ainsi, B étant une forme bilinéaire symétrique positive, on peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et obtenir, pour tout $m \geq 0$,

$$B(a, a_m)^2 \leq B(a_m, a_m)B(a, a). \tag{2.51}$$

Puisque $a_m \to a$ faiblement dans $H^1(\Omega)$, on a

$$B(a, a_m) = \int_\Omega \frac{1}{2}(A^T + A)\nabla a \cdot \nabla a_m \to \int_\Omega \frac{1}{2}(A^T + A)\nabla a \cdot \nabla a = \int_\Omega A\nabla a \cdot \nabla a.$$

En prenant la $\liminf$ lorsque $m \to \infty$ dans (2.51), on obtient donc

$$\left(\int_\Omega A\nabla a \cdot \nabla a\right)^2 \leq \left(\liminf_{m\to\infty} \int_\Omega A\nabla a_m \cdot \nabla a_m\right) \int_\Omega A\nabla a \cdot \nabla a,$$

ce qui conclut la preuve de ce lemme. ■

Lemme 2.3 *Si $(\mathbf{v}_m)_{m\geq 0}$ est une suite convergeante dans $(L^{N_*}(\Omega))^N$, alors pour tout $\eta > 0$, il existe $\Lambda \geq 0$ tel que, pour tout $m \geq 0$, $\mathbf{v}_m \in B(N_*, \eta) + B(\infty, \Lambda)$.*

Remarque 2.6 *Prouver ce lemme consiste en fait à établir ce que nous avons dit en fin de remarque 1.5.*

Preuve du lemme 2.3

On va montrer en fait que, pour tout $\eta > 0$, il existe $n \geq 1$ tel que, pour tout $m \geq 0$, $||\,|T_n(\mathbf{v}_m) - \mathbf{v}_m|\,||_{L^{N_*}(\Omega)} < \eta$ (où, lorsque $X \in \mathbb{R}^N$, $T_n(X)$ représente le vecteur $(T_n(X_1), \dots, T_n(X_N))$); on aura alors, pour tout $m \geq 0$, $\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_m - T_n(\mathbf{v}_m) + T_n(\mathbf{v}_m)$ avec $\mathbf{v}_m - T_n(\mathbf{v}_m) \in B(N_*, \eta)$ et $T_n(\mathbf{v}_m) \in B(\infty, n\sqrt{N})$, ce qui concluera la preuve.

La démonstration se fait par l'absurde. Supposons donc qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$, il existe $m_n \geq 0$ vérifiant $||\,|T_n(\mathbf{v}_{m_n}) - \mathbf{v}_{m_n}|\,||_{L^{N_*}(\Omega)} > \eta$. $(\mathbf{v}_m)_{m\geq 0}$ étant convergeante dans $(L^{N_*}(\Omega))^N$, quitte à extraire une suite, on peut supposer que $\mathbf{v}_{m_n} \to \mathbf{v}$ dans $(L^{N_*}(\Omega))^N$ lorsque $n \to \infty$ (soit $(m_n)_{n\geq 1}$ est bornée, auquel cas il existe une suite extraite de $(m_n)_{n\geq 1}$ qui soit constante, soit $(m_n)_{n\geq 1}$ n'est pas bornée et on peut en extraire une suite qui tend vers l'infini). Puisque T_n est 1-lipschitzienne pour tout $n \geq 1$, on a alors $||\,|T_n(\mathbf{v}_{m_n}) - T_n(\mathbf{v})|\,||_{L^{N_*}(\Omega)} \leq ||\,|\mathbf{v}_{m_n} - \mathbf{v}|\,||_{L^{N_*}(\Omega)}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
&||\,|T_n(\mathbf{v}) - \mathbf{v}|\,||_{L^{N_*}(\Omega)} \\
&\quad\geq\ ||\,|T_n(\mathbf{v}_{m_n}) - \mathbf{v}_{m_n}|\,||_{L^{N_*}(\Omega)} - (||\,|T_n(\mathbf{v}) - T_n(\mathbf{v}_{m_n})|\,||_{L^{N_*}(\Omega)} + ||\,|\mathbf{v}_{m_n} - \mathbf{v}|\,||_{L^{N_*}(\Omega)}) \\
&\quad\geq\ \eta - 2||\,|\mathbf{v}_{m_n} - \mathbf{v}|\,||_{L^{N_*}(\Omega)} \to \eta > 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.
\end{aligned}$$

C'est une contradiction, car $T_n(\mathbf{v}) \to \mathbf{v}$ sur Ω en étant dominée par $|\mathbf{v}| \in L^{N_*}(\Omega)$, donc $T_n(\mathbf{v}) \to \mathbf{v}$ dans $(L^{N_*}(\Omega))^N$. ■

2.4.3 Convergence des solutions de (1.4)

Proposition 2.1 *Soit $q < N/(N-1)$ et $L \in (W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega))'$. Sous les hypothèses (1.8), (2.45), (2.46), (2.47), (2.48), (2.50) et (1.42), en notant v_m la solution de (1.4) avec $(A_m, \mathbf{v}_m, b_m, \lambda_m)$ à la place de $(A, \mathbf{v}, b, \lambda)$ et v_∞ la solution de (1.4) avec $(A_\infty, \mathbf{v}_\infty, b_\infty, \lambda_\infty)$ à la place de $(A, \mathbf{v}, b, \lambda)$, on a $v_m \to v_\infty$ fortement dans $H^1(\Omega)$ et dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$.*

Remarque 2.7 *Pour montrer la convergence forte de $(v_m)_{m\geq 1}$ vers v dans $H^1(\Omega)$, on a juste besoin de $L \in (H^1_{\Gamma_d}(\Omega))'$ et l'hypothèse (1.42) est inutile.*

Preuve de la proposition 2.1
Comme $\mathbf{v}_m \to \mathbf{v}_\infty$ fortement dans $(L^{N_*}(\Omega))^N$, pour tout $\eta > 0$, il existe Λ tel que, pour tout $m \geq 0$, $\mathbf{v}_m \in B(N_*, \eta) + B(\infty, \Lambda)$ (lemme 2.3); ainsi, le théorème 1.1 et le corollaire 1.2 donnent $\kappa > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $m \geq 0$, $v_m \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega) \cap \mathcal{C}^{0,\kappa}(\Omega)$ et $||v_m||_{H^1(\Omega)} + ||v_m||_{\mathcal{C}^{0,\kappa}(\Omega)} \leq C$.

Etape 1: on montre que $v_m \to v_\infty$ faiblement dans $H^1(\Omega)$.
$(v_m)_{m\geq 0}$ est une suite bornée de $H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ et converge donc, quitte à extraire une suite, vers w faiblement dans $H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ et fortement dans $L^s(\Omega)$ pour tout $s < 2N/(N-2)$ (pour tout $s < \infty$ si $N = 2$); de plus, la trace de v_m converge fortement dans $L^s(\partial\Omega)$ vers la trace de w, pour tout $s < 2(N-1)/(N-2)$ (pour tout $s < \infty$ si $N = 2$). Pour tout $\varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$, on a alors

- $A_m \nabla\varphi \to A_\infty \nabla\varphi$ fortement dans $(L^2(\Omega))^N$ et $\nabla v_m \to \nabla w$ faiblement dans $(L^2(\Omega))^N$, donc
$$\int_\Omega A_m^T \nabla v_m \cdot \nabla\varphi \to \int_\Omega A_\infty^T \nabla w \cdot \nabla\varphi,$$
- $\mathbf{v}_m \to \mathbf{v}_\infty$ fortement dans $(L^{N_*}(\Omega))^N$, $\varphi \in L^{\frac{2N_*}{N_*-2}}(\Omega)$ et $\nabla v_m \to \nabla w$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, donc puisque $\frac{1}{N_*} + \frac{N_*-2}{2N_*} + \frac{1}{2} = 1$,
$$\int_\Omega \varphi \mathbf{v}_m \cdot \nabla v_m \to \int_\Omega \varphi \mathbf{v}_\infty \cdot \nabla w,$$
- $b_m \to b_\infty$ faiblement dans $L^{\frac{\overline{r}}{2}}(\Omega)$, $\varphi \in L^{\frac{2\overline{r}}{\overline{r}-2}}(\Omega)$ et $v_m \to w$ fortement dans $L^{\frac{2\overline{r}}{\overline{r}-2}}(\Omega)$ (car $2\overline{r}/(\overline{r}-2) < 2N/(N-2)$), donc puisque $\frac{2}{\overline{r}} + \frac{\overline{r}-2}{2\overline{r}} + \frac{\overline{r}-2}{2\overline{r}} = 1$,
$$\int_\Omega b_m v_m \varphi \to \int_\Omega b_\infty w \varphi,$$
- $\lambda_m \to \lambda_\infty$ faiblement dans $L^{\overline{r}-1}(\partial\Omega)$, $\varphi \in L^{\frac{2(\overline{r}-1)}{\overline{r}-2}}(\partial\Omega)$ et $v_m \to w$ fortement dans $L^{\frac{2(\overline{r}-1)}{\overline{r}-2}}(\partial\Omega)$ (car $2(\overline{r}-1)/(\overline{r}-2) < 2(N-1)/(N-2)$), donc puisque $\frac{1}{\overline{r}-1} + \frac{\overline{r}-2}{2(\overline{r}-1)} + \frac{\overline{r}-2}{2(\overline{r}-1)} = 1$,
$$\int_{\Gamma_f} \lambda_m v_m \varphi \, d\sigma \to \int_{\Gamma_f} \lambda_\infty w \varphi \, d\sigma.$$

En passant donc à la limite $m \to \infty$ dans l'équation vérifiée par v_m, on constate que w est la solution de (1.4) avec $(A_\infty, \mathbf{v}_\infty, b_\infty, \lambda_\infty)$ à la place de $(A, \mathbf{v}, b, \lambda)$, c'est à dire que $w = v_\infty$; la seule limite faible dans $H^1(\Omega)$ d'une sous-suite de $(v_m)_{m\geq 0}$ étant (par le raisonnement précédent) v_∞, on en déduit que la suite tout entière $(v_m)_{m\geq 0}$ converge vers v_∞ faiblement dans $H^1(\Omega)$, et donc fortement dans $L^s(\Omega)$ pour tout $s < 2N/(N-2)$; on obtient aussi la convergence forte dans $L^s(\partial\Omega)$ pour tout $s < 2(N-1)/(N-2)$ des traces de $(v_m)_{m\geq 0}$ vers la trace de v_∞.

Etape 2: on montre que $v_m \to v_\infty$ fortement dans $H^1(\Omega)$.

En soustrayant l'équation satisfaite par v_∞ de l'équation satisfaite par v_m, on a, pour tout $\varphi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega A_m^T \nabla(v_m - v_\infty)\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega (A_m^T - A_\infty^T)\nabla v_\infty \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega \varphi \mathbf{v}_m \cdot \nabla(v_m - v_\infty)\\ &+\int_\Omega \varphi(\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_\infty)\cdot\nabla v_\infty + \int_\Omega b_m\varphi(v_m - v_\infty) + \int_\Omega (b_m - b_\infty)\varphi v_\infty + \int_{\Gamma_f} \lambda_m \varphi(v_m - v_\infty)\,d\sigma\\ &+\int_{\Gamma_f}(\lambda_m - \lambda_\infty)\varphi v_\infty\,d\sigma = 0.\end{aligned}$$

Soit $\chi \in]0, \frac{\mathcal{K}(2,\mathcal{B})}{C_S(\Omega,N_*)}[$. Comme il a été signalé au début de la preuve, il existe $\Lambda > 0$ tel que, pour tout $m \geq 0$, $\mathbf{v}_m \in B(N_*,\chi) + B(\infty,\Lambda)$; notons donc $\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_m^{(1)} + \mathbf{v}_m^{(2)}$ avec $\mathbf{v}_m^{(1)} \in B(N_*,\chi)$ et $\mathbf{v}_m^{(2)} \in B(\infty,\Lambda)$. L'équation précédente peut s'écrire

$$\begin{aligned}&\int_\Omega A_m^T\nabla(v_m - v_\infty)\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega \varphi\mathbf{v}_m^{(1)}\cdot\nabla(v_m - v_\infty) + \int_\Omega b_m\varphi(v_m - v_\infty) + \int_{\Gamma_f}\lambda_m\varphi(v_m - v_\infty)\,d\sigma\\ &= \int_\Omega (A_\infty^T - A_m^T)\nabla v_\infty\cdot\nabla\varphi - \int_\Omega \varphi\mathbf{v}_m^{(2)}\cdot\nabla(v_m - v_\infty) + \int_\Omega \varphi(\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_m)\cdot\nabla v_\infty + \int_\Omega (b_\infty - b_m)\varphi v_\infty\\ &\quad+\int_{\Gamma_f}(\lambda_\infty - \lambda_m)\varphi v_\infty\,d\sigma.\end{aligned}$$

En prenant $\varphi = v_m - v_\infty$ et en utilisant les propriétés de A_m, b_m, λ_m et $\mathbf{v}_m^{(1)}$, cela donne donc, par la remarque 1.2,

$$\begin{aligned}&(\mathcal{K}(2,\mathcal{B}) - \chi C_S(\Omega,N_*))||v_m - v_\infty||^2_{H^1(\Omega)}\\ &\leq \; ||\,|(A_m - A_\infty)\nabla v_\infty|\,||_{L^2(\Omega)}||\,|\nabla(v_m - v_\infty)|\,||_{L^2(\Omega)} + \Lambda||v_m - v_\infty||_{L^2(\Omega)}||\,|\nabla(v_m - v_\infty)|\,||_{L^2(\Omega)}\\ &\quad+||v_m - v_\infty||_{L^{\frac{2N_*}{N_*-2}}(\Omega)}||\,|\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_\infty|\,||_{L^{N_*}(\Omega)}||\,|\nabla v_\infty|\,||_{L^2(\Omega)}\\ &\quad+\left|\int_\Omega (b_m - b_\infty)(v_m - v_\infty)v_\infty\right| + \left|\int_{\Gamma_f}(\lambda_m - \lambda_\infty)(v_m - v_\infty)v_\infty\,d\sigma\right|.\end{aligned} \tag{2.52}$$

Or

- $||\,|(A_m - A_\infty)\nabla v_\infty|\,||_{L^2(\Omega)} \to 0$ ($A_m - A_\infty \to 0$ presque partout en étant bornée dans $L^\infty(\Omega; M_N(\mathbb{R}))$) et $(v_m)_{m\geq 0}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$ donc $||\,|(A_m - A_\infty)\nabla v_\infty|\,||_{L^2(\Omega)}||\,|\nabla(v_m - v_\infty)|\,||_{L^2(\Omega)} \to 0$ lorsque $m \to \infty$,

- $||v_m - v_\infty||_{L^2(\Omega)} \to 0$ lorsque $n \to \infty$ (cf étape 1: on a $2 < 2N/(N-2)$) et $(v_m)_{m\geq 0}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$ donc $\Lambda||v_m - v_\infty||_{L^2(\Omega)}||\,|\nabla(v_m - v_\infty)|\,||_{L^2(\Omega)} \to 0$ lorsque $m \to \infty$,

- $(v_m)_{m\geq 0}$ est bornée dans $L^{\frac{2N_*}{N_*-2}}(\Omega)$ (elle est bornée dans $H^1(\Omega)$) et $||\,|\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_\infty|\,||_{L^{N_*}(\Omega)} \to 0$, donc $||v_m - v_\infty||_{L^{\frac{2N_*}{N_*-2}}(\Omega)}||\,|\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_\infty|\,||_{L^{N_*}(\Omega)}||\,|\nabla v_\infty|\,||_{L^2(\Omega)} \to 0$ lorsque $m \to \infty$,

- $b_m - b_\infty \to 0$ faiblement dans $L^{\frac{\overline{r}}{2}}(\Omega)$, $v_m - v_\infty \to 0$ fortement dans $L^{\frac{2\overline{r}}{\overline{r}-2}}(\Omega)$ (cf étape 1: $2\overline{r}/(\overline{r}-2) < 2N/(N-2)$) et $v_\infty \in L^{\frac{2\overline{r}}{\overline{r}-2}}(\Omega)$, donc $\int_\Omega (b_m - b_\infty)(v_m - v_\infty)v_\infty \to 0$ lorsque $m \to \infty$,

- $\lambda_m - \lambda_\infty \to 0$ faiblement dans $L^{\overline{r}-1}(\partial\Omega)$, $v_m - v_\infty \to 0$ fortement dans $L^{\frac{2(\overline{r}-1)}{\overline{r}-2}}(\partial\Omega)$ (cf étape 1: on a $2(\overline{r}-1)/(\overline{r}-2) < 2(N-1)/(N-2)$) et $v_\infty \in L^{\frac{2(\overline{r}-1)}{\overline{r}-2}}(\partial\Omega)$, donc $\int_{\Gamma_f}(\lambda_m - \lambda_\infty)(v_m - v_\infty)v_\infty\,d\sigma \to 0$ lorsque $m \to \infty$.

Le terme de droite de (2.52) tend donc vers 0 lorsque $m \to \infty$, ce qui prouve que $v_m \to v_\infty$ dans $H^1(\Omega)$.

Etape 3: on montre que $v_m \to v_\infty$ dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$.
$(v_m)_{m\geq 0}$ est bornée dans $\mathcal{C}^{0,\kappa}(\Omega)$, et donc relativement compacte dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$; mais, la convergence dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ entrainant la convergence dans $L^2(\Omega)$, et puisque $v_m \to v_\infty$ dans $L^2(\Omega)$, la seule limite possible dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ des suites extraites de $(v_m)_{m\geq 0}$ est v_∞. On a donc bien $v_m \to v_\infty$ dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. ∎

2.4.4 Preuve du théorème de stabilité

Lemme 2.4 *Sous les hypothèses (1.8), (2.45), (2.46), (2.47), (2.48), (2.50) et (1.42), si* $(\mu_m)_{m\geq 0} \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ *converge vers* μ_∞ *dans* $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ *faible-∗ et* $(L_m)_{m\geq 0} \in (H^1(\Omega))'$ *converge vers* L_∞ *dans* $(H^1(\Omega))'$ *faible-∗, en notant* f_m *la solution de (1.46) avec* $(A_m, \mathbf{v}_m, b_m, \lambda_m, \mu_m + L_m)$ *à la place de* $(A, \mathbf{v}, b, \lambda, \zeta)$ *et* f_∞ *la solution de (1.46) avec* $(A_\infty, \mathbf{v}_\infty, b_\infty, \lambda_\infty, \mu_\infty + L_\infty)$ *à la place de* $(A, \mathbf{v}, b, \lambda, \zeta)$*, on a* $f_m \to f_\infty$ *faiblement dans* $W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega)$ *pour tout* $q < N/(N-1)$ *et fortement dans* $L^q(\Omega)$ *pour tout* $q < N/(N-2)$.

Preuve du lemme 2.4
Soit, pour $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{T}_q^{(m)}$ l'application qui, à $L \in (W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega))'$, associe la solution $\mathcal{T}_q^{(m)}(L) \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ de (1.4) avec $(A_m, \mathbf{v}_m, b_m, \lambda_m)$ à la place de $(A, \mathbf{v}, b, \lambda)$.
Soit $q < N/(N-1)$ et $L \in (W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega))'$; par définition, pour $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f_m = (\mathcal{T}_q^{(m)})^*(\zeta_m)$ avec $\zeta_m = \mu_m + L_m$, donc

$$
\begin{aligned}
&\langle L, f_m - f_\infty \rangle_{(W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega))', W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega)} \\
&= \langle \zeta_m, \mathcal{T}_q^{(m)}(L) \rangle_{(H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega}))', H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})} - \langle \zeta_\infty, \mathcal{T}_q^{(\infty)}(L) \rangle_{(H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega}))', H^1(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \\
&= \langle \mu_m, \mathcal{T}_q^{(m)}(L) \rangle_{(\mathcal{C}(\overline{\Omega}))', \mathcal{C}(\overline{\Omega})} - \langle \mu_\infty, \mathcal{T}_q^{(\infty)}(L) \rangle_{(\mathcal{C}(\overline{\Omega}))', \mathcal{C}(\overline{\Omega})} \qquad (2.53) \\
&\quad + \langle L_m, \mathcal{T}_q^{(m)}(L) \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} - \langle L_\infty, \mathcal{T}_q^{(\infty)}(L) \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)}. \qquad (2.54)
\end{aligned}
$$

Or, par la proposition 2.1, $\mathcal{T}_q^{(m)}(L) \to \mathcal{T}_q^{(\infty)}(L)$ dans $H^1(\Omega)$ et dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$; donc, puisque $\mu_m \to \mu$ dans $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ faible-∗ et $L_m \to L$ dans $(H^1(\Omega))'$ faible-∗, les termes (2.53) et (2.54) tendent vers 0 lorsque $m \to \infty$.
On a donc bien $f_m \to f_\infty$ faiblement dans $W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega)$ et, la convergence faible dans $W^{1,q}(\Omega)$ impliquant la convergence forte dans $L^r(\Omega)$ pour tout $r < Nq/(N-q)$, cela conclut la preuve de ce lemme. ∎

Lemme 2.5 *Sous les hypothèses (1.8), (1.9), (1.12), (1.14), (1.39) et (1.42), si* $\zeta = \mu + L$ *avec* $\mu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ *et* $L \in (H^1(\Omega))'$*, f est la solution de (1.46) et M vérifie* $||\mathbf{v}||_{(L^{N_*}(\Omega))^N} + ||\mu||_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} + ||L||_{(H^1(\Omega))'} \leq M$*, alors il existe C ne dépendant que de* $(N_*, \mathcal{B}, M)$ *tel que, pour tout* $k \in \mathbb{R}^+$*,* $T_k(f) \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ *et* $||T_k(f)||_{H^1(\Omega)} \leq C(k+1)$.

Preuve du lemme 2.5
Soit $(\mu_j)_{j\geq 1} \in (H^1(\Omega))' \cap \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ tel que $\mu_j \to \mu$ dans $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ faible-∗ et, pour tout $j \geq 1$, $||\mu_j||_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} \leq ||\mu||_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})}$. Notons $f^{(j)}$ la solution de (1.46) avec $\mu_j + L \in (H^1(\Omega))'$ à la place de ζ; on sait que $f^{(j)}$ est en fait la solution de (1.3) avec $\mu_j + L$ à la place de L (cf 2.3.1).
Ainsi, $T_k(f^{(j)}) \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ et, en utilisant cette fonction dans l'équation satisfaite par $f^{(j)}$, on a

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega A\nabla(T_k(f^{(j)})) \cdot \nabla(T_k(f^{(j)})) + \int_\Omega f^{(j)}\mathbf{v} \cdot \nabla(T_k(f^{(j)})) + \int_\Omega b f^{(j)} T_k(f^{(j)}) + \int_{\Gamma_f} \lambda f^{(j)} T_k(f^{(j)})\, d\sigma \\
&\quad = \langle \mu_j + L, T_k(f^{(j)}) \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Mais $f^{(j)} T_k(f^{(j)}) \geq (T_k(f^{(j)}))^2$ et, b et λ étant positives et supérieures, respectivement, à b_0 sur E et à λ_0 sur S, on a $\int_\Omega b f^{(j)} T_k(f^{(j)}) \geq b_0 \int_E (T_k(f^{(j)}))^2$ et $\int_{\Gamma_f} \lambda f^{(j)} T_k(f^{(j)})\, d\sigma \geq \lambda_0 \int_S (T_k(f^{(j)}))^2\, d\sigma$; de plus,

$|f^{(j)}| \leq k$ là où $\nabla(T_k(f^{(j)})) \neq 0$ donc on obtient, au vu du lemme 2.1,

$$\begin{aligned}
&\alpha_A|| \, |\nabla(T_k(f^{(j)}))| \, ||^2_{L^2(\Omega)} + b_0 \int_E (T_k(f^{(j)}))^2 + \lambda_0 \int_S (T_k(f^{(j)}))^2 \\
\leq \quad & k|| \, |\mathbf{v}| \, ||_{L^2(\Omega)} || \, |\nabla(T_k(f^{(j)}))| \, ||_{L^2(\Omega)} + k||\mu||_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} + ||L||_{(H^1(\Omega))'} ||T_k(f^{(j)})||_{H^1(\Omega)} \\
\leq \quad & \frac{k^2}{\mathcal{K}(2,\mathcal{B})} |\Omega|^{1-\frac{2}{N_*}} ||\mathbf{v}||^2_{(L^{N_*}(\Omega))^N} + \frac{\mathcal{K}(2,\mathcal{B})}{4} ||T_k(f^{(j)})||^2_{H^1(\Omega)} + k||\mu||_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} \\
& + \frac{1}{\mathcal{K}(2,\mathcal{B})} ||L||^2_{(H^1(\Omega))'} + \frac{\mathcal{K}(2,\mathcal{B})}{4} ||T_k(f^{(j)})||^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Par la remarque 1.1, on a finalement

$$\frac{\mathcal{K}(2,\mathcal{B})}{2} ||T_k(f^{(j)})||^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{k^2}{\mathcal{K}(2,\mathcal{B})} |\Omega|^{1-\frac{2}{N_*}} M^2 + kM + \frac{1}{\mathcal{K}(2,\mathcal{B})} M^2 \leq \frac{\mathcal{K}(2,\mathcal{B})}{2} C^2 (k+1)^2$$

où C ne dépend que de $(N_*, \mathcal{B}, M)$. On a donc prouvé que $(T_k(f^{(j)}))_{j\geq 1}$ est bornée dans $H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ par $C(k+1)$. Mais, par le lemme 2.4 (en fait une version simplifiée de ce lemme) $f^{(j)} \to f$ fortement dans $L^1(\Omega)$, donc la suite $(T_k(f^{(j)}))_{j\geq 1}$ bornée par $C(k+1)$ dans $H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ converge faiblement dans cet espace vers $T_k(f)$ et on a bien $T_k(f) \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ avec $||T_k(f)||_{H^1(\Omega)} \leq C(k+1)$. ■

Lemme 2.6 *Sous les hypothèses (1.8), (1.9), (1.12), (1.14), (1.39) et (1.42), si* $\zeta = \mu + L$ *avec* $\mu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ *et* $L \in (H^1(\Omega))'$, f *est la solution de (1.46) et* M *vérifie*

$$||\mu||_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} + ||b||_{L^{\frac{\overline{r}}{2}}(\Omega)} + ||\lambda||_{L^{\overline{r}-1}(\partial\Omega)} + ||f||_{L^{\frac{\overline{r}}{\overline{r}-2}}(\Omega)} + ||f||_{L^{\frac{\overline{r}-1}{\overline{r}-2}}(\partial\Omega)} \leq M,$$

alors, pour tout $k \in \mathbb{R}^+$, *tout* $\delta \in]0,1[$ *et tout* $\psi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega A\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f) - T_k(\psi))) \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f) - T_k(\psi))) \\
\leq \quad & (2M^2 + M)\delta + \langle L, T_\delta(T_{k+1}(f) - T_k(\psi))\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} \\
& - \int_\Omega A\nabla(T_k(\psi)) \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f) - T_k(\psi))) - \int_\Omega T_{k+1}(f)\mathbf{v} \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f) - T_k(\psi))).
\end{aligned}$$

Preuve du lemme 2.6

Soit $(\mu_j)_{j\geq 1} \in (H^1(\Omega))' \cap \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ telle que $\mu_j \to \mu$ dans $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ faible-$*$ et, pour tout $j \geq 1$, $||\mu_j||_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} \leq ||\mu||_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})}$.

Soit $f^{(j)}$ la solution de (1.46) avec $\mu_j + L$ à la place de ζ ($f^{(j)}$ est aussi la solution de (1.3) avec $\mu_j + L$ à la place de L); $f^{(j)}$ converge fortement vers f dans $L^1(\Omega)$ (lemme 2.4) et les suites $(T_{k+1}(f^{(j)}))_{j\geq 1}$ et $(T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)}) - T_k(\psi)))_{j\geq 1}$ sont bornées dans $H^1(\Omega)$ (lemme 2.5), donc $T_{k+1}(f^{(j)}) \to T_{k+1}(f)$ et $T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)}) - T_k(\psi)) \to T_\delta(T_{k+1}(f) - T_k(\psi))$ faiblement dans $H^1(\Omega)$. Quitte à extraire une suite, on peut aussi supposer que $f^{(j)} \to f$ presque partout sur Ω.

En utilisant $T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)}) - T_k(\psi)) \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$ comme fonction test dans le problème variationnel satisfait par $f^{(j)}$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega A\nabla f^{(j)} \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)}) - T_k(\psi))) \\
= \quad & -\int_\Omega f^{(j)}\mathbf{v} \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)}) - T_k(\psi))) - \int_\Omega b f^{(j)} T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)}) - T_k(\psi)) \\
& - \int_{\Gamma_f} \lambda f^{(j)} T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)}) - T_k(\psi))\, d\sigma + \langle \mu_j, T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)}) - T_k(\psi))\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} \\
& + \langle L, T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)}) - T_k(\psi))\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Lorsque $\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)})-T_k(\psi)))\neq 0$, on a $|T_{k+1}(f^{(j)})-T_k(\psi)|\leq\delta<1$, donc $|T_{k+1}(f^{(j)})|<k+1$, c'est à dire $f^{(j)}=T_{k+1}(f^{(j)})$; on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega A\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)})-T_k(\psi)))\cdot\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)})-T_k(\psi)))\\
&\quad= \int_\Omega A\nabla(T_{k+1}(f^{(j)})-T_k(\psi))\cdot\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)})-T_k(\psi)))\\
&\quad\leq -\int_\Omega A\nabla(T_k(\psi))\cdot\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)})-T_k(\psi)))-\int_\Omega T_{k+1}(f^{(j)})\mathbf{v}\cdot\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)})-T_k(\psi)))\\
&\qquad+\delta||b||_{L^{\frac{\overline{r}}{2}}(\Omega)}||f^{(j)}||_{L^{\frac{\overline{r}}{\overline{r}-2}}(\Omega)}+\delta||\lambda||_{L^{\overline{r}-1}(\partial\Omega)}||f^{(j)}||_{L^{\frac{\overline{r}-1}{\overline{r}-2}}(\partial\Omega)}\\
&\qquad+\delta||\mu||_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})}+\langle L,T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)})-T_k(\psi))\rangle_{(H^1(\Omega))',H^1(\Omega)}.
\end{aligned}\tag{2.55}$$

Mais

- $T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)})-T_k(\psi))\to T_\delta(T_{k+1}(f)-T_k(\psi))$ faiblement dans $H^1(\Omega)$, donc, par le lemme 2.2,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega A\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f)-T_k(\psi)))\cdot\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f)-T_k(\psi)))\\
&\quad\leq \liminf_{j\to\infty}\int_\Omega A\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)})-T_k(\psi)))\cdot\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)})-T_k(\psi)))
\end{aligned}$$

- $T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)})-T_k(\psi))\to T_\delta(T_{k+1}(f)-T_k(\psi))$ faiblement dans $H^1(\Omega)$ et $A\nabla(T_k(\psi))\in(L^2(\Omega))^N$ donc

$$\int_\Omega A\nabla(T_k(\psi))\cdot\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)})-T_k(\psi)))\to\int_\Omega A\nabla(T_k(\psi))\cdot\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f)-T_k(\psi))),$$

- $T_{k+1}(f^{(j)})\mathbf{v}\to T_{k+1}(f)\mathbf{v}$ presque partout sur Ω en étant majorée par $(k+1)|\mathbf{v}|\in L^2(\Omega)$, donc la convergence a aussi lieu dans $(L^2(\Omega))^N$ et, puisque $\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)})-T_k(\psi)))\to\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f)-T_k(\psi)))$ faiblement dans $(L^2(\Omega))^N$, on a

$$\int_\Omega T_{k+1}(f^{(j)})\mathbf{v}\cdot\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)})-T_k(\psi)))\to\int_\Omega T_{k+1}(f)\mathbf{v}\cdot\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f)-T_k(\psi))),$$

- $f^{(j)}\to f$ dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q<N/(N-2)$ (lemme 2.4), donc $||f^{(j)}||_{L^{\frac{\overline{r}}{\overline{r}-2}}(\Omega)}\to||f||_{L^{\frac{\overline{r}}{\overline{r}-2}}(\Omega)}$ (car $\overline{r}/(\overline{r}-2)<N/(N-2)$),
- $f^{(j)}$ tendant vers f faiblement dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q<N/(N-1)$, la trace de $f^{(j)}$ converge vers la trace de f fortement dans $L^s(\partial\Omega)$ pour tout $s<(N-1)/(N-2)$; ainsi, $||f^{(j)}||_{L^{\frac{\overline{r}-1}{\overline{r}-2}}(\partial\Omega)}\to||f||_{L^{\frac{\overline{r}-1}{\overline{r}-2}}(\partial\Omega)}$ (car $(\overline{r}-1)/(\overline{r}-2)<(N-1)/(N-2)$),
- $T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)})-T_k(\psi))\to T_\delta(T_{k+1}(f)-T_k(\psi))$ faiblement dans $H^1(\Omega)$ donc $\langle L,T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)})-T_k(\psi))\rangle_{(H^1(\Omega))',H^1(\Omega)}\to\langle L,T_\delta(T_{k+1}(f)-T_k(\psi))\rangle_{(H^1(\Omega))',H^1(\Omega)}$.

En prenant la $\liminf$ de (2.55), on déduit de ces convergences que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega A\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f)-T_k(\psi)))\cdot\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f)-T_k(\psi)))\\
&\quad\leq -\int_\Omega A\nabla(T_k(\psi))\cdot\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f)-T_k(\psi))-\int_\Omega T_{k+1}(f)\mathbf{v}\cdot\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f)-T_k(\psi)))\\
&\qquad+\delta||b||_{L^{\frac{\overline{r}}{2}}(\Omega)}||f||_{L^{\frac{\overline{r}}{\overline{r}-2}}(\Omega)}+\delta||\lambda||_{L^{\overline{r}-1}(\partial\Omega)}||f||_{L^{\frac{\overline{r}-1}{\overline{r}-2}}(\partial\Omega)}\\
&\qquad+\delta||\mu||_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})}+\langle L,T_\delta(T_{k+1}(f)-T_k(\psi))\rangle_{(H^1(\Omega))',H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

c'est à dire le résultat du lemme par hypothèse sur M. ∎

Preuve du théorème 2.4
On sait déjà que $f_m \to f_\infty$ faiblement dans $W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega)$ et fortement dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q < N/(N-1)$. On en déduit que $(f_m)_{m\geq 0}$ est bornée dans $W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega)$ pour tout $q < N/(N-1)$. Nous allons prouver que, à une sous-suite près, $\nabla f_m \to \nabla f_\infty$ en mesure sur Ω; une fois ce résultat établi, nous aurons alors, à une sous-suite près, $\nabla f_m \to \nabla f_\infty$ presque partout sur Ω en étant bornée dans $(L^q(\Omega))^N$ pour tout $q < N/(N-1)$ et, par le lemme de compacité $L^p - L^q$, $\nabla f_m \to \nabla f_\infty$ dans $(L^q(\Omega))^N$ pour tout $q < N/(N-1)$; puisque la seule limite possible des sous-suites de $(\nabla f_m)_{m\geq 0}$ dans $L^q(\Omega)$ est ∇f_∞, ce raisonnement nous donne finalement la convergence de toute la suite $(\nabla f_m)_{m\geq 0}$ vers ∇f_∞ dans $(L^q(\Omega))^N$ (pour tout $q < N/(N-1)$).
Il faut donc prouver que, à une sous-suite près, pour tout $\eta > 0$, $|\{|\nabla f_m - \nabla f_\infty| > \eta\}| \to 0$ lorsque $m \to \infty$.

Quitte à extraire une suite, on peut supposer que $f_m \to f_\infty$ presque partout sur Ω (c'est la seule extraction de suite que nous effectuerons).
On a

$$\{|\nabla f_m - \nabla f_\infty| > \eta\} \subset \{|f_\infty| > k\} \cup \{|f_m - f_\infty| > \delta\} \cup E_{k,m,\delta}, \tag{2.56}$$

avec $\delta \in]0,1[$ et $E_{k,m,\delta} = \{|\nabla f_m - \nabla f_\infty| > \eta\} \cap \{|f_\infty| \leq k\} \cap \{|f_m - f_\infty| \leq \delta\}$.
Soit $\varepsilon > 0$ et fixons $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $|\{|f_\infty| > k\}| \leq \varepsilon$.
Nous allons montrer que l'on peut choisir $\delta > 0$ et $m_1 > 0$ tel que, pour tout $m \geq m_1$, $|E_{k,m,\delta}| < \varepsilon$; une fois ceci effectué, pour δ ainsi fixé, on pourra prendre $m_2 \geq m_1$ tel que, pour tout $m \geq m_2$, $|\{|f_m - f_\infty| > \delta\}| < \varepsilon$ ($f_m \to f_\infty$ dans $L^1(\Omega)$, donc en mesure). On aura alors trouvé m_2 tel que, pour tout $m \geq m_2$, $|\{|\nabla f_m - \nabla f_\infty| > \eta\}| < 3\varepsilon$, ce qui concluera cette démonstration.

Puisque $\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty))) = \nabla f_m - \nabla f_\infty$ sur $E_{k,m,\delta}$, on a

$$\alpha_A \eta^2 |E_{k,m,\delta}| \leq \int_\Omega A_m \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty))) \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty))).$$

$(\mu_m)_{m\geq 0}$ étant bornée dans $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$, $(b_m)_{m\geq 0}$ étant bornée dans $L^{\frac{\overline{r}}{2}}(\Omega)$, $(\lambda_m)_{m\geq 0}$ étant bornée dans $L^{\overline{r}-1}(\Omega)$ et $(f_m)_{m\geq 0}$ étant bornée dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < N/(N-1)$ (ce qui implique que $(f_m)_{m\geq 0}$ est bornée dans $L^{\frac{\overline{r}}{\overline{r}-2}}(\Omega)$ et que la suite des traces de f_m est bornée dans $L^{\frac{\overline{r}-1}{\overline{r}-2}}(\partial\Omega)$), on peut trouver $M > 0$ tel que, pour tout $m \geq 0$,

$$||\mu_m||_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} + ||b_m||_{L^{\frac{\overline{r}}{2}}(\Omega)} + ||\lambda_m||_{L^{\overline{r}-1}(\partial\Omega)} + ||f_m||_{L^{\frac{\overline{r}}{\overline{r}-2}}(\Omega)} + ||f_m||_{L^{\frac{\overline{r}-1}{\overline{r}-2}}(\partial\Omega)} \leq M.$$

Par le lemme 2.6 appliqué à $(A_m, \mathbf{v}_m, b_m, \lambda_m, \zeta_m)$ au lieu de $(A, \mathbf{v}, b, \lambda, \zeta)$ et à $\psi = T_k(f_\infty) \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$, on a alors, pour tout $m \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\alpha_A \eta^2 |E_{k,m,\delta}| \quad \leq \quad & (2M^2 + M)\delta + \langle L_m, T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty))\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} \\
& - \int_\Omega A_m \nabla(T_k(f_\infty)) \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty))) \\
& - \int_\Omega T_{k+1}(f_m)\mathbf{v}_m \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty))).
\end{aligned}$$

Prenons $\delta_0 = \alpha_A \eta^2 \varepsilon / (8M^2 + 4M)$; pour tout $\delta \leq \delta_0$, on a donc, $\forall m \geq 0$,

$$\begin{aligned}
|E_{k,m,\delta}| \quad \leq \quad & \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{\alpha_A \eta^2} \left| \langle L_m, T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty))\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} \right| \\
& + \frac{1}{\alpha_A \eta^2} \left| \int_\Omega A_m \nabla(T_k(f_\infty)) \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty))) \right| \\
& + \frac{1}{\alpha_A \eta^2} \left| \int_\Omega T_{k+1}(f_m)\mathbf{v}_m \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty))) \right|.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Comme $L_m \to L_\infty$ fortement dans $(H^1(\Omega))'$ et $T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty)) \to T_\delta(T_{k+1}(f_\infty) - T_k(f_\infty))$ faiblement dans $H^1(\Omega)$ ($(T_{k+1}(f_m))_{m\geq 0}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$ par le lemme 2.5 et converge presque partout vers $T_{k+1}(f)$ sur Ω), on a

$$\begin{aligned}&\langle L_m, T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty))\rangle_{(H^1(\Omega))',H^1(\Omega)}\\ &\quad\overset{m\to\infty}{\longrightarrow}\quad \langle L_\infty, T_\delta(T_{k+1}(f_\infty) - T_k(f_\infty))\rangle_{(H^1(\Omega))',H^1(\Omega)} = g(\delta).\end{aligned} \tag{2.58}$$

Comme $T_{k+1}(f_m) \to T_{k+1}(f)$ presque partout sur Ω en étant majoré par $k+1$ et $\mathbf{v}_m \to \mathbf{v}_\infty$ fortement dans $(L^2(\Omega))^N$, on a $T_{k+1}(f_m)\mathbf{v}_m \to T_{k+1}(f_\infty)\mathbf{v}_\infty$ dans $(L^2(\Omega))^N$; par convergence faible dans $H^1(\Omega)$ de $(T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty)))_{m\geq 0}$ vers $T_\delta(T_{k+1}(f_\infty) - T_k(f_\infty))$, on en déduit que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega T_{k+1}(f_m)\mathbf{v}_m \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty)))\\ &\quad\overset{m\to\infty}{\longrightarrow}\quad \int_\Omega T_{k+1}(f_\infty)\mathbf{v}_\infty \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f_\infty) - T_k(f_\infty))) = h(\delta).\end{aligned} \tag{2.59}$$

Mais, pour tout $\psi \in H^1(\Omega)$, $T_\delta(\psi) \to 0$ dans $H^1(\Omega)$ lorsque $\delta \to 0$ (la convergence vers 0 dans $L^2(\Omega)$ est évidente puisque $|T_\delta(\psi)| \leq \delta$ sur Ω, et la convergence du gradient vient du fait que $\nabla(T_\delta(\psi)) = \mathbf{1}_{\{0<|\psi|<\delta\}}\nabla\psi$ et que $\mathbf{1}_{\{0<|\psi|<\delta\}} \to 0$ sur Ω en étant majorée par 1), donc $T_\delta(T_{k+1}(f_\infty) - T_k(f_\infty)) \to 0$ dans $H^1(\Omega)$ lorsque $\delta \to 0$. Ainsi, $g(\delta) \to 0$ et $h(\delta) \to 0$ lorsque $\delta \to 0$. On fixe $\delta \in]0, \delta_0]$ tel que $|g(\delta)| \leq \alpha_A\eta^2\varepsilon/8$ et $|h(\delta)| \leq \alpha_A\eta^2\varepsilon/8$.
Par (2.58), (2.59) et ce choix de δ, il existe donc M tel que, pour tout $m \geq M$,

$$\begin{gathered}\left|\langle L_m, T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty))\rangle_{(H^1(\Omega))',H^1(\Omega)}\right| \leq \frac{\alpha_A\eta^2\varepsilon}{4}\\ \text{et}\\ \left|\int_\Omega T_{k+1}(f_m)\mathbf{v}_m \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty)))\right| \leq \frac{\alpha_A\eta^2\varepsilon}{4}.\end{gathered} \tag{2.60}$$

Comme $A_m\nabla(T_k(f_\infty)) \to A\nabla(T_k(f_\infty))$ dans $(L^2(\Omega))^N$ et $(T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty)))_{m\geq 0}$ converge faiblement dans $H^1(\Omega)$ vers $T_\delta(T_{k+1}(f_\infty) - T_k(f_\infty))$, on a

$$\int_\Omega A_m\nabla(T_k(f_\infty)) \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty))) \to \int_\Omega A\nabla(T_k(f_\infty)) \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f_\infty) - T_k(f_\infty))).$$

Mais

$$\begin{aligned}&A\nabla(T_k(f_\infty)) \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f_\infty) - T_k(f_\infty)))\\ &\quad= A\nabla f_\infty \cdot \nabla(T_{k+1}(f_\infty) - T_k(f_\infty))\mathbf{1}_{\{|f_\infty|<k\}}\mathbf{1}_{\{|T_{k+1}(f_\infty)-T_k(f_\infty)|<\delta\}}\\ &\quad= A\nabla f_\infty \cdot (\mathbf{1}_{\{|f_\infty|<k+1\}}\mathbf{1}_{\{|f_\infty|<k|\}}\nabla f_\infty - \mathbf{1}_{\{|f_\infty|<k\}}\mathbf{1}_{\{|f_\infty|<k\}}\nabla f_\infty)\\ &\quad= A\nabla f_\infty \cdot (\mathbf{1}_{\{|f_\infty|<k\}}(\nabla f_\infty - \nabla f_\infty)) = 0\end{aligned}$$

et on a en fait

$$\int_\Omega A_m\nabla(T_k(f_\infty)) \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty))) \to 0.$$

On peut donc trouver $M' > 0$ tel que, pour tout $m \geq M'$,

$$\left|\int_\Omega A_m\nabla(T_k(f_\infty)) \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty)))\right| < \frac{\alpha_A\eta^2\varepsilon}{4}. \tag{2.61}$$

(2.57), (2.60) et (2.61) donnent donc, avec le choix précédement effectué de δ et pour tout $m \geq m_1 = \sup(M, M')$, $|E_{k,m,\delta}| \leq \varepsilon$, ce qui conclut la démonstration de ce théorème. ■

2.4.5 Résultat de stabilité pour la solution par dualité de (1.48)

La technique utilisée pour prouver le théorème 2.4 peut être employée pour obtenir le résultat suivant concernant la stabilité des solutions par dualité de (1.48).

Théorème 2.5 *Sous les hypothèses (1.8), (2.45), (2.47), (2.48), (2.49), (2.50), (1.42) et*

$$\begin{array}{c} \exists r > N \text{ tel que, } \forall m \geq 0\,,\ \mathbf{v}_m \in (L^r(\Omega))^N\,, \\ \mathbf{v}_m \to \mathbf{v}_\infty \text{ dans } (L^r(\Omega))^N, \end{array} \tag{2.62}$$

en notant f_m la solution par dualité de (1.48) avec $(A_m, \mathbf{v}_m, b_m, \lambda_m, \zeta_m)$ à la place de $(A, \mathbf{v}, b, \lambda, \zeta)$ et f_∞ la solution par dualité de (1.48) avec $(A_\infty, \mathbf{v}_\infty, b_\infty, \lambda_\infty, \zeta_\infty)$ à la place de $(A, \mathbf{v}, b, \lambda, \zeta)$, on a

$$f_m \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} f_\infty \text{ fortement dans } W^{1,q}_{\Gamma_d}(\Omega) \text{ pour tout } q < \tfrac{N}{N-1}.$$

Voyons les adaptations à faire (issues du fait qu'il faut changer les termes $\int_\Omega \varphi \mathbf{v}_m \cdot \nabla v_m$ et $\int_\Omega f^{(j)} \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi$ qui apparaissaient dans les preuves précédentes en $\int_\Omega v_m \mathbf{v}_m \cdot \nabla \varphi$ et $\int_\Omega \varphi \mathbf{v} \cdot \nabla f^{(j)}$) pour prouver le théorème 2.5.

Dans toutes les preuves, le changement de $(A_m)_{m\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ en $(A_m^T)_{m\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ n'apporte pas de difficulté.

Adaptation de la proposition 2.1

Enoncé: il faut remplacer l'hypothèse (2.46) par l'hypothèse (2.62), et "(1.4)" par "(1.3)".

Preuve: Dans l'étape 1, il faut prouver la convergence de $\int_\Omega v_m \mathbf{v}_m \cdot \nabla \varphi$ vers $\int_\Omega w \mathbf{v}_\infty \cdot \nabla \varphi$; mais $v_m \to w$ fortement dans $L^{\frac{2r}{r-2}}(\Omega)$ (car $2r/(r-2) < 2N/(N-2)$), $\mathbf{v}_m \to \mathbf{v}_\infty$ dans $(L^r(\Omega))^N$ et $\nabla\varphi \in (L^2(\Omega))^N$, donc puisque $\frac{r-2}{2r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{2} = 1$, on a

$$\int_\Omega v_m \mathbf{v}_m \cdot \nabla \varphi \to \int_\Omega w \mathbf{v}_\infty \cdot \nabla \varphi.$$

Dans l'étape 2, après avoir soustrait l'équation satisfaite par v_∞ de l'équation satisfaite par v_m et pris $\varphi = v_m - v_\infty$ comme fonction test, on trouve (sans séparer $\mathbf{v}_m$ en deux parties),

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}(2,\mathcal{B})||v_m - v_\infty||^2_{H^1(\Omega)} \\ &\quad \leq \ |||(A_m^T - A_\infty^T)\nabla v_\infty|||_{L^2(\Omega)}|||\nabla(v_m - v_\infty)|||_{L^2(\Omega)} + \left|\int_\Omega (v_m\mathbf{v}_m - v_\infty\mathbf{v}_\infty)\cdot\nabla(v_m - v_\infty)\right| \\ &\qquad + \left|\int_\Omega (b_m - b_\infty)(v_m - v_\infty)v_\infty\right| + \left|\int_{\Gamma_f} (\lambda_m - \lambda_\infty)(v_m - v_\infty)v_\infty\,d\sigma\right|. \end{aligned}$$

Les termes $|||(A_m^T - A_\infty^T)\nabla v_\infty|||_{L^2(\Omega)}|||\nabla(v_m - v_\infty)|||_{L^2(\Omega)}$, $\int_\Omega (b_m - b_\infty)(v_m - v_\infty)v_\infty$ et $\int_{\Gamma_f}(\lambda_m - \lambda_\infty)(v_m - v_\infty)v_\infty\,d\sigma$ tendent vers 0 sans adaptation. Comme $v_m \to v_\infty$ fortement dans $L^{\frac{2r}{r-2}}(\Omega)$ (car $2r/(r-2) < 2N/(N-2)$), $\mathbf{v}_m \to \mathbf{v}$ fortement dans $(L^r(\Omega))^N$ et $\nabla(v_m - v) \to 0$ faiblement dans $(L^2(\Omega))^N$, le terme $\int_\Omega (v_m\mathbf{v}_m - v_\infty\mathbf{v}_\infty)\cdot\nabla(v_m - v_\infty)$ tend aussi vers 0.
Il n'y a rien à adapter dans l'étape 3.

Adaptation du lemme 2.4

Enoncé: il faut remplacer l'hypothèse (2.46) par l'hypothèse (2.62), et "(1.4)" par "(1.3)".

Preuve: pas d'adaptation à faire, le résultat découle directement de la proposition 2.1 adaptée.

Adaptation du lemme 2.5

Enoncé: il faut remplacer l'hypothèse (1.12) par l'hypothèse (1.34), f désigne la solution par dualité de (1.48), M doit vérifier

$$||\mathbf{v}||_{(L^r(\Omega))^N} + ||b||_{L^{\frac{\overline{r}}{2}}(\Omega)} + ||\lambda||_{L^{\overline{r}-1}(\partial\Omega)} + ||\mu||_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} + ||L||_{(H^1(\Omega))'} \le M \tag{2.63}$$

et C dépend de $(N_*, \mathcal{B}, \Lambda_A, \overline{r}, r, M)$.

Preuve: pour majorer le terme $\int_\Omega T_k(f^{(j)})\mathbf{v}\cdot\nabla f^{(j)}$, on écrit simplement

$$\left|\int_\Omega T_k(f^{(j)})\mathbf{v}\cdot\nabla f^{(j)}\right| \le k||\mathbf{v}||_{(L^r(\Omega))^N}||f^{(j)}||_{W^{1,r'}(\Omega)} \le kM||f^{(j)}||_{W^{1,r'}(\Omega)}. \tag{2.64}$$

Or $r' < N/(N-1)$ donc $f^{(j)} = (\mathcal{T}_{r'})^*(\mu_j + L)$, où $\mathcal{T}_{r'} : (W^{1,r'}_{\Gamma_d}(\Omega))' \to H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ désigne l'application qui, à $l \in (W^{1,r'}_{\Gamma_d}(\Omega))'$, associe la solution $\mathcal{T}_{r'}(l)$ de (1.3) avec l à la place de L. Le théorème 1.1 et le corollaire 1.1 donnent $C_0 > 0$ ne dépendant que de $(N_*, \mathcal{B}, \Lambda_A, \overline{r}, r, M)$ tel que

$$||\mathcal{T}_{r'}||_{\mathcal{L}((W^{1,r'}_{\Gamma_d}(\Omega))';H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega}))} \le C_0.$$

On a alors

$$||(\mathcal{T}_{r'})^*||_{\mathcal{L}((H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega}))';W^{1,r'}_{\Gamma_d}(\Omega))} \le C_0.$$

Ainsi,

$$||f^{(j)}||_{W^{1,r'}(\Omega)} \le C_0||\mu_j + L||_{(H^1_{\Gamma_d}(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega}))'} \le C_0(||\mu_j||_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} + ||L||_{(H^1(\Omega))'}) \le C_0 M,$$

et on a donc, dans (2.64),

$$\left|\int_\Omega T_k(f^{(j)})\mathbf{v}\cdot\nabla f^{(j)}\right| \le C_0 M^2 k,$$

ce qui suffit pour conclure comme dans la preuve du lemme 2.5 (et la borne obtenue sur $||T_k(f)||_{H^1(\Omega)}$ est en fait en $\sqrt{k+1}$).

Adaptation du lemme 2.6

Enoncé: il faut remplacer l'hypothèse (1.12) par l'hypothèse (1.34), f désigne la solution par dualité de (1.48) et M doit vérifier (2.63). La conclusion est modifiée en: il existe $C > 0$ ne dépendant que de $(N_*, \mathcal{B}, \Lambda_A, \overline{r}, r, M)$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{R}^+$, pour tout $\delta \in]0,1[$ et pour tout $\psi \in H^1_{\Gamma_d}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega A^T\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f) - T_k(\psi)))\cdot\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f) - T_k(\psi))) \\
&\quad \le \quad C\delta + \langle L, T_\delta(T_{k+1}(f) - T_k(\psi))\rangle_{(H^1(\Omega))',H^1(\Omega)} - \int_\Omega A^T\nabla(T_k(\psi))\cdot\nabla(T_\delta(T_{k+1}(f) - T_k(\psi))).
\end{aligned}$$

Preuve: Puisque $r_0 = \inf(\overline{r}, r) > N$, donc $r_0' < N/(N-1)$, comme dans l'adaptation de la preuve du lemme 2.5, on va trouver C_0 ne dépendant que de $(N_*, \mathcal{B}, \Lambda_A, \overline{r}, r, M)$ tel que

$$||f^{(j)}||_{W^{1,r_0'}(\Omega)} \le C_0 M. \tag{2.65}$$

Dans l'équivalent de (2.55), on a, puisque $r_0' \ge r'$ et $r_0' \ge \overline{r}'$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega T_\delta(T_{k+1}(f^{(j)}) - T_k(\psi))\mathbf{v}\cdot\nabla f^{(j)}\right| &\le \delta||\mathbf{v}||_{(L^r(\Omega))^N}||f^{(j)}||_{W^{1,r'}(\Omega)} \le \delta M C_1||f||_{W^{1,r_0'}(\Omega)}, \\
||f||_{L^{\frac{\overline{r}}{\overline{r}-2}}(\Omega)} &\le C_2||f||_{W^{1,\overline{r}'}(\Omega)} \le C_3||f||_{W^{1,r_0'}(\Omega)}, \\
||f||_{L^{\frac{\overline{r}-1}{\overline{r}-2}}(\partial\Omega)} &\le C_4||f||_{W^{1,\overline{r}'}(\Omega)} \le C_5||f||_{W^{1,r_0'}(\Omega)},
\end{aligned}$$

où $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$ ne dépendent que de $(\Omega, \overline{r}, r)$ (les injections de Sobolev sont correctes car, étant donné que $\overline{r} > N$, on a $\overline{r}/(\overline{r}-2) \leq N\overline{r}'/(N-\overline{r}')$ et $(\overline{r}-1)/(\overline{r}-2) \leq (N-1)\overline{r}'/(N-\overline{r}')$). Ces majorations associées à (2.65) donnent le résultat souhaité.

Adaptation de la preuve du théorème 2.4

Comme $(\mu_m)_{m\geq 0}$ est bornée dans $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$, $(L_m)_{m\geq 0}$ est bornée dans $(H^1(\Omega))'$, $(\mathbf{v}_m)_{m\geq 0}$ est bornée dans $(L^r(\Omega))'$, $(b_m)_{m\geq 0}$ est bornée dans $L^{\frac{\overline{r}}{2}}(\Omega)$ et $(\lambda_m)_{m\geq 0}$ est bornée dans $L^{\overline{r}-1}(\Omega)$, on peut trouver M tel que, pour tout $m \geq 0$,

$$||\mathbf{v}_m||_{(L^r(\Omega))^N} + ||b_m||_{L^{\frac{\overline{r}}{2}}(\Omega)} + ||\lambda_m||_{L^{\overline{r}-1}(\partial\Omega)} + ||\mu_m||_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} + ||L_m||_{(H^1(\Omega))'} \leq M.$$

En appliquant alors l'adaptation du lemme 2.6, on obtient $C > 0$ tel que, pour tout $m \geq 0$,

$$\begin{aligned} \alpha_A \eta^2 |E_{k,m,\delta}| \quad &\leq \quad C\delta + |\langle L_m, T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty))\rangle_{(H^1(\Omega))',H^1(\Omega)}| \\ &\quad + \left| \int_\Omega A^T \nabla(T_k(f_\infty)) \cdot \nabla(T_\delta(T_{k+1}(f_m) - T_k(f_\infty))) \right|, \end{aligned}$$

et on conclut comme dans la preuve du théorème 2.4 (en plus simple, même, puisque les termes (2.59) n'apparaissent pas ici).

Chapitre 3

Etude d'un Schéma Volumes Finis pour une Equation Elliptique non Coercitive

3.1 L'équation

Nous nous intéressons, dans cette partie, à un schéma de type volumes finis pour une équation de la forme (1.1).

Ω est ici un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou 3. Afin de simplifier l'étude, nous considérons uniquement le cas du Laplacien avec des conditions au bord de type Dirichlet homogènes (i.e. $A = Id$, $\Gamma_d = \partial\Omega$ et $\mathcal{U}_d = 0$ dans (1.1)).
Le problème étudié est donc le suivant

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta u + \mathrm{div}(\mathbf{v}u) + bu = f + \mathrm{div}(G) & \text{dans} & \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} & \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{3.1}$$

et on effectue les hypothèses suivantes sur les données:

$$\mathbf{v} \in (\mathcal{C}(\overline{\Omega}))^N, \quad b \in L^\infty(\Omega) \text{ avec } b \geq 0 \text{ sur } \Omega, \quad f \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad G \in (\mathcal{C}(\overline{\Omega}))^N.$$

La principale nouveauté du travail que nous présentons ici vient du fait que, contrairement au cas classique étudié dans [37], nous n'imposons aucune condition de signe sur la divergence de $\mathbf{v}$. Il faut aussi constater que $\mathbf{v}$ est seulement supposée continue, et non pas $\mathcal{C}^1$ comme c'est demandé usuellement.
Le terme "div(G)" n'apparait pas dans [37]; son introduction n'entraine pas de problème supplémentaire, mais elle est agréable car elle permet de déduire très simplement les estimations d'erreurs à partir des estimations a priori.

On pourrait affaiblir les hypothèses d'intégrabilité sur b et f, mais afin de ne pas compliquer le raisonnement, nous nous contenterons de celles-ci.

3.2 La discrétisation

La discrétisation de (3.1) par volumes finis demande l'introduction d'une notion dite de "maillage admissible" de Ω.

Définition 3.1 *Un maillage admissible de Ω, noté $\mathcal{M}$, est la donnée d'une famille finie $\mathcal{T}$ d'ouverts polygonaux convexes disjoints inclus dans Ω (les "mailles", ou "volumes de contrôle"), d'une famille finie $\mathcal{E}$ de sous-ensembles disjoints de $\overline{\Omega}$ contenus dans des hyperplans de $\mathbb{R}^N$ (les "interfaces") et d'une famille $\mathcal{P} = (x_K)_{K\in\mathcal{T}}$ de points de Ω tels que*

i) $\overline{\Omega} = \cup_{K\in\mathcal{T}}\overline{K}$,

ii) Tout $\sigma \in \mathcal{E}$ est un ouvert non vide du bord d'un élément K de $\mathcal{T}$,

iii) En notant $\mathcal{E}_K = \{\sigma \in \mathcal{E} \mid \sigma \subset \partial K\}$, $\partial K = \cup_{\sigma\in\mathcal{E}_K}\overline{\sigma}$ pour tout $K \in \mathcal{T}$,

iv) Pour tous K et L distincts dans $\mathcal{T}$, soit la mesure $(N-1)$-dimensionnelle de $\overline{K}\cap\overline{L}$ est nulle, soit $\overline{K}\cap\overline{L} = \overline{\sigma}$ pour un $\sigma \in \mathcal{E}$, que l'on notera alors $\sigma = K|L$,

v) Pour tout $K \in \mathcal{T}$, $x_K \in K$,

vi) Pour tout $\sigma = K|L \in \mathcal{E}$, la droite (x_K, x_L) intersecte orthogonalement σ,

vii) Pour tout $\sigma \in \mathcal{E}$, $\sigma \subset \partial\Omega \cap \partial K$, la droite orthogonale à σ et passant par x_K rencontre σ.

La taille du maillage est alors définie par $h_{\mathcal{T}} = \sup_{K\in\mathcal{T}} \operatorname{diam}(K)$. On note $m(K)$ la mesure de Lebesgue de $K \in \mathcal{T}$. La normale à $\sigma \in \mathcal{E}_K$ extérieure à K sera notée $\mathbf{n}_{K,\sigma}$.
On pose $\mathcal{E}_{\text{int}} = \{\sigma \in \mathcal{E} \mid \sigma \not\subset \partial\Omega\}$ l'ensemble des interfaces intérieures à Ω et $\mathcal{E}_{\text{ext}} = \mathcal{E}\backslash\mathcal{E}_{\text{int}}$. Lorsque $\sigma \in \mathcal{E}$, on note $m(\sigma)$ la mesure $(N-1)$-dimensionnelle de σ; si $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, d_σ est la distance euclidienne entre les points (x_K, x_L) et $d_{K,\sigma}$ désigne la distance entre x_K et σ; lorsque $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}$, $d_\sigma = d_{K,\sigma}$ est la distance entre x_K et σ. La transmissivité au travers d'une interface σ est $\tau_\sigma = \frac{m(\sigma)}{d_\sigma}$. γ désigne la mesure $(N-1)$-dimensionnelle sur les interfaces du maillage.

On peut maintenant définir la discrétisation par volumes finis de (3.1) sur un maillage admissible $\mathcal{M}$. En notant, pour $K \in \mathcal{T}$ et $\sigma \in \mathcal{E}_K$,

$$\begin{aligned} f_K &= \frac{1}{m(K)}\int_K f\,, \quad G_{K,\sigma} = \frac{1}{m(\sigma)}\int_\sigma G\cdot\mathbf{n}_{K,\sigma}\,d\gamma \\ b_K &= \frac{1}{m(K)}\int_K b\,, \quad \text{et} \quad v_{K,\sigma} = \int_\sigma \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{K,\sigma}\,d\gamma\,, \end{aligned} \tag{3.2}$$

le schéma est défini par

$$\forall K \in \mathcal{T}\,,\ \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} v_{K,\sigma}u_{\sigma,+} + m(K)b_K u_K = m(K)f_K + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} m(\sigma)G_{K,\sigma}\,, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &\forall\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}}\,, \quad F_{K,\sigma} = -\tau_\sigma(u_L - u_K)\,, \\ &\forall\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}\cap\mathcal{E}_K\,, \quad F_{K,\sigma} = \tau_\sigma u_K\,, \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} &\forall\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}}\,, \quad u_{\sigma,+} = u_K \text{ si } v_{K,\sigma} \geq 0\,, \quad u_{\sigma,+} = u_L \text{ dans le cas contraire,} \\ &\forall\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}\cap\mathcal{E}_K\,, \quad u_{\sigma,+} = u_K \text{ si } v_{K,\sigma} \geq 0\,, \quad u_{\sigma,+} = 0 \text{ dans le cas contraire.} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Les équations (3.3)—(3.5) forment un système linéaire de taille $\operatorname{Card}(\mathcal{T})$ en les inconnues $(u_K)_{K\in\mathcal{T}}$. On remarquera au passage que ce schéma, comme tout schéma de type volumes finis, conserve les flux: si $\sigma = K|L$, alors $F_{K,\sigma} = -F_{L,\sigma}$, $G_{K,\sigma} = -G_{L,\sigma}$ et $v_{K,\sigma} = -v_{L,\sigma}$.

Remarque 3.1 *Le choix du décentrement (3.5) (décentrement amont) est classique lorsque l'on impose la condition* $\operatorname{div}(\mathbf{v}) \geq 0$ *et permet d'éliminer les termes de convection dans les estimations; un tel décentrement est dans tous les cas nécessaire pour obtenir une stabilité inconditionnelle du schéma. Nous étudierons, dans la partie 3.6, d'autres choix pour le terme de convection, mais nous constaterons que, dans ce cas, la stabilité obtenue est en général conditionnelle (n'est valable que pour $h_{\mathcal{T}}$ assez petit).*

Remarque 3.2 *Il peut y avoir une petite indétermination dans le choix de $u_{\sigma,+}$. En effet, si $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\rm int}$ et $v_{K,\sigma} = 0$, alors on a aussi $v_{L,\sigma} = 0$, de sorte qu'une lecture de (3.5) nous dit de prendre $u_{\sigma,+} = u_K$ et l'autre lecture nous dit de prendre $u_{\sigma,+} = u_L$. Cette indétermination n'est cependant pas grave car, $v_{K,\sigma}$ étant nul, le terme impliquant $u_{\sigma,+}$ n'apparait pas dans (3.3). Pour lever l'ambiguïté sur ces interfaces σ particulières (les interfaces pour lesquelles il y a indétermination ne dépendent que de $\mathbf{v}$ et du maillage, et non pas des inconnues $(u_K)_{K\in\mathcal{T}}$), on peut par exemple, dans ce cas-là, fixer arbitrairement un K tel que $\sigma \in \mathcal{E}_K$ et poser $u_{\sigma,+} = u_K$.*

3.3 Estimations a priori sur la solution approchée

Nous prouvons ici des estimations a priori, dans une norme adaptée au problème, sur les $(u_K)_{K\in\mathcal{T}}$ vérifiant (3.3)—(3.5).
Dans cette partie, il nous importe peu que les $(f_K)_{K\in\mathcal{T}}$ et $(G_{K,\sigma})_{K\in\mathcal{T},\,\sigma\in\mathcal{E}_K}$ soient issus de fonctions f et G au travers des définitions (3.2). C'est pourquoi nous prenons ici des seconds membres plus généraux, vérifiant seulement:

$$\begin{array}{l} \forall K \in \mathcal{T}\,,\ f_K \in \mathbb{R}, \\ \forall K \in \mathcal{T}\,,\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_K\,,\ G_{K,\sigma} \in \mathbb{R} \text{ et, pour tout } \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\rm int},\ G_{K,\sigma} = -G_{L,\sigma}. \end{array} \tag{3.6}$$

On posera alors

$$\mathcal{N}(f_\mathcal{T}, G_\mathcal{M}) = \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} m(K) f_K^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma) d_\sigma G_\sigma^2\right)^{1/2}$$

où $G_\sigma = |G_{K,\sigma}|$ pour un $K \in \mathcal{T}$ tel que $\sigma \in \mathcal{E}_K$ (par hypothèse sur les $(G_{K,\sigma})_{K\in\mathcal{T},\,\sigma\in\mathcal{E}_K}$, la définition de G_σ ne dépend pas du $K \in \mathcal{T}$ choisi tel que $\sigma \in \mathcal{E}_K$).

La norme adaptée au problème, avec laquelle toutes les estimations sur les solutions de (3.3)—(3.5) seront obtenues, est la norme H_0^1 discrète suivante.

Définition 3.2 *Lorsque $\mathcal{M}$ est un maillage admissible sur Ω et $v_\mathcal{T} = (v_K)_{K\in\mathcal{T}}$, on pose*

$$||v_\mathcal{T}||_{1,\mathcal{M}} = \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma (D_\sigma v_\mathcal{T})^2\right)^{1/2},$$

où $D_\sigma v_\mathcal{T} = |v_K - v_L|$ lorsque $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\rm int}$ et $D_\sigma v_\mathcal{T} = |v_K|$ lorsque $\sigma \in \mathcal{E}_{\rm ext} \cap \mathcal{E}_K$.

En identifiant naturellement l'espace $X(\mathcal{M})$ des fonctions définies presque partout sur Ω et constantes sur chaque maille de $\mathcal{M}$ à l'espace $\prod_{K\in\mathcal{T}} \mathbb{R}$, on constate aisément que $||\cdot||_{1,\mathcal{M}}$ est une norme sur $X(\mathcal{M})$.

3.3.1 Lemmes généraux

La norme $||\cdot||_{1,\mathcal{M}}$ est la norme naturelle pour obtenir des estimations a priori sur les solutions de (3.3)—(3.5). Elle a aussi le double avantage d'être plus forte que la norme de $L^2(\Omega)$ et de donner en fait un résultat de compacité dans $L^2(\Omega)$, comme le montrent les lemmes suivants.

Lemme 3.1 *(inégalité de Poincaré discrète) Soit $\mathcal{M}$ un maillage admissible de Ω. Si $v_\mathcal{T} \in X(\mathcal{M})$, alors on a*

$$||v_\mathcal{T}||_{L^2(\Omega)} \le \operatorname{diam}(\Omega) ||v_\mathcal{T}||_{1,\mathcal{M}}.$$

(Voir le lemme 9.1 dans [37]).

Lemme 3.2 *(théorème de Rellich discret) Soit $C > 0$. Si $\mathcal{M}_n$ est une suite de maillages admissibles de Ω et $v_n \in X(\mathcal{M}_n)$ vérifie $||v_n||_{1,\mathcal{M}_n} \leq C$, alors $(v_n)_{n\geq 1}$ est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$; de plus, si $h_{\mathcal{T}_n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$, les valeurs d'adhérence de $(v_n)_{n\geq 1}$ sont dans $H_0^1(\Omega)$.*

(Conséquence immédiate du lemme 9.3 et du théorème 14.2 de [37]).

L'obtention d'estimations a priori sur les solutions de (3.3)—(3.5) (i.e. (3.1) discrétisée) suit les mêmes idées que la preuve des estimations a priori sur les solutions de (3.1) (la seule différence étant que l'estimation sur $\ln(1+|u|)$ n'est pas obtenue en prenant des fonctions tests sous une forme de "rondelle" mais sous une forme globale, comme nous l'avons fait dans le cas non-linéaire de la section 2.1). Nous aurons donc besoin d'inégalités de Sobolev discrètes (lemme 9.5 dans [37]).

Lemme 3.3 *Soit $\mathcal{M}$ un maillage admissible de Ω et $\zeta > 0$ tel que*

$$\forall K \in \mathcal{T}\,,\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_K\,,\ d_{K,\sigma} \geq \zeta d_\sigma.$$

Si $v_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{M})$, alors il existe C ne dépendant que de Ω et ζ tel que, pour tout $q \in [2,+\infty[$ lorsque $N = 2$ ou tout $q \in [2,6]$ lorsque $N = 3$,

$$||v_{\mathcal{T}}||_{L^q(\Omega)} \leq Cq||v_{\mathcal{T}}||_{1,\mathcal{M}}.$$

3.3.2 Estimations a priori sur $\ln(1+|u_{\mathcal{T}}|)$

Proposition 3.1 *Soit $\varphi(s) = \int_0^s \frac{dt}{(1+|t|)^2}$ et $\mathcal{M}$ un maillage admissible. Si $(u_K)_{K\in\mathcal{T}}$ est une solution de (3.3)—(3.5) avec un second membre vérifiant (3.6), alors*

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma (u_K - u_L)(\varphi(u_K) - \varphi(u_L)) \leq 2|\Omega|^{1/2}\mathcal{N}(f_{\mathcal{T}}, G_{\mathcal{M}}) + 2\mathcal{N}(f_{\mathcal{T}}, G_{\mathcal{M}})^2 + 2N|\Omega|\,||\mathbf{v}||^2_{(L^\infty(\Omega))^N}\,, \quad (3.7)$$

où l'on a posé, lorsque $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, $\sigma = K|L$ et, lorsque $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \cap \mathcal{E}_K$, $u_L = 0$.

Avant d'aborder la preuve de cette proposition, nous établissons un petit lemme technique.

Lemme 3.4 *Soit $\varphi(s) = \int_0^s \frac{dt}{(1+|t|)^2}$. Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ont même signe et $|x| \leq |y|$, alors*

$$x^2(\varphi(x) - \varphi(y))^2 \leq (y-x)(\varphi(y) - \varphi(x)). \quad (3.8)$$

Preuve du lemme 3.4
On commence par supposer que x et y sont positifs, de sorte que l'on a $0 \leq x \leq y$. Dans ce cas, $\varphi(y) - \varphi(x) = \int_x^y \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)}$ et

$$\begin{aligned} x^2(\varphi(x) - \varphi(y))^2 &\leq x^2 \frac{|y-x|}{(1+x)(1+y)}|\varphi(x) - \varphi(y)| \\ &\leq \frac{x^2}{(1+x)(1+y)}|y-x||\varphi(y) - \varphi(x)|. \end{aligned}$$

Or $(1+x)(1+y) \geq (1+x)^2 \geq x^2$ puisque $0 \leq x \leq y$; de plus, φ est croissante, donc $|y-x||\varphi(y) - \varphi(x)| = (y-x)(\varphi(y) - \varphi(x))$. On déduit alors, de l'inégalité précédente, (3.8) lorsque x et y sont positifs.
Si x et y sont négatifs, puisque φ est impaire, on a

$$x^2(\varphi(x) - \varphi(y))^2 = (-x)^2(-\varphi(-x) - (-\varphi(-y)))^2 = (-x)^2(\varphi(-x) - \varphi(-y))^2,$$

avec $|-x| = |x| \leq |y| = |-y|$ et $(-x,-y)$ positifs; en appliquant alors (3.8) prouvée précédemment pour des réels positifs, on en déduit

$$x^2(\varphi(x)-\varphi(y))^2 \leq (-y-(-x))(\varphi(-y)-\varphi(-x)) = (x-y)(\varphi(x)-\varphi(y)) = (y-x)(\varphi(y)-\varphi(x)),$$

ce qui conclut la preuve. ■

Preuve de la proposition 3.1
En multipliant chaque égalité de (3.3) par $\varphi(u_K)$ et en sommant sur $K \in \mathcal{T}$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}\varphi(u_K) + \sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} v_{K,\sigma}u_{\sigma,+}\varphi(u_K) + \sum_{K\in\mathcal{T}} m(K)b_K u_K\varphi(u_K)\\ = \sum_{K\in\mathcal{T}} m(K)f_K\varphi(u_K) + \sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} m(\sigma)G_{K,\sigma}\varphi(u_K).\end{aligned} \tag{3.9}$$

En rassemblant la sommation par interfaces et en utilisant (3.4), on a

$$\begin{aligned}\sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}\varphi(u_K) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int},\,\sigma=K|L} (F_{K,\sigma}\varphi(u_K)+F_{L,\sigma}\varphi(u_L)) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm ext}\,,\sigma\in\mathcal{E}_K} \tau_\sigma u_K\varphi(u_K)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int},\,\sigma=K|L} \tau_\sigma(u_K-u_L)(\varphi(u_K)-\varphi(u_L)) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm ext}\,,\sigma\in\mathcal{E}_K} \tau_\sigma u_K\varphi(u_K)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma(u_K-u_L)(\varphi(u_K)-\varphi(u_L))\end{aligned} \tag{3.10}$$

où l'on a posé, comme annoncé, $\sigma = K|L$ lorsque $\sigma \in \mathcal{E}_{\rm int}$ et $u_L = 0$ lorsque $\sigma \in \mathcal{E}_{\rm ext}\cap\mathcal{E}_K$.
Toujours en sommant par interfaces, on a, par conservativité des flux,

$$\begin{aligned}&\sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} v_{K,\sigma}u_{\sigma,+}\varphi(u_K)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int},\,\sigma=K|L} u_{\sigma,+}(v_{K,\sigma}\varphi(u_K)+v_{L,\sigma}\varphi(u_L)) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm ext},\,\sigma\in\mathcal{E}_K} u_{\sigma,+}v_{K,\sigma}\varphi(u_K)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int},\,\sigma=K|L} u_{\sigma,+}v_{K,\sigma}(\varphi(u_K)-\varphi(u_L)) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\rm ext},\,\sigma\in\mathcal{E}_K} u_{\sigma,+}v_{K,\sigma}\varphi(u_K)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} u_{\sigma,+}v_{K,\sigma}(\varphi(u_K)-\varphi(u_L))\end{aligned}$$

(rappelons que $u_L = 0$ — donc $\varphi(u_L) = 0$ — lorsque $\sigma \in \mathcal{E}_{\rm ext}\cap\mathcal{E}_K$). Notons, lorsque $\sigma\in\mathcal{E}$, $v_\sigma = |v_{K,\sigma}|$ pour un $K\in\mathcal{T}$ tel que $\sigma\in\mathcal{E}_K$ (la définition de v_σ ne dépend pas du choix d'un tel K). Nous noterons aussi $u_{\sigma,-}$ le décentrement aval, i.e. $u_{\sigma,-}$ est tel que $\{u_{\sigma,+},u_{\sigma,-}\} = \{u_K,u_L\}$, toujours en posant $\sigma = K|L$ si $\sigma\in\mathcal{E}_{\rm int}$ et $u_L = 0$ si $\sigma\in\mathcal{E}_{\rm ext}\cap\mathcal{E}_K$ (en passant sous silence le problème d'indétermination dont nous avons parlé en remarque 3.2, cela revient à poser $u_{\sigma,-} = u_L$ lorsque $v_{K,\sigma}\geq 0$ et $u_{\sigma,-} = u_K$ dans le cas contraire).
Prenons $\sigma\in\mathcal{E}$; si $v_{K,\sigma}\geq 0$, alors $u_{\sigma,+} = u_K$ et $u_{\sigma,-} = u_L$ donc $v_{K,\sigma}(\varphi(u_K)-\varphi(u_L)) = v_\sigma(\varphi(u_{\sigma,+})-\varphi(u_{\sigma,-}))$; si $v_{K,\sigma} < 0$, alors $u_{\sigma,+} = u_L$ et $u_{\sigma,-} = u_K$ donc $v_{K,\sigma}(\varphi(u_K)-\varphi(u_L)) = -v_\sigma(\varphi(u_{\sigma,-})-\varphi(u_{\sigma,+})) = v_\sigma(\varphi(u_{\sigma,+})-\varphi(u_{\sigma,-}))$ (le problème d'indétermination qui peut surgir lorsque $v_{K,\sigma} = 0$ ne se pose pas ici, puisqu'alors $v_{K,\sigma} = v_\sigma = 0$). Ainsi,

$$\sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} v_{K,\sigma}u_{\sigma,+}\varphi(u_K) = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} v_\sigma u_{\sigma,+}(\varphi(u_{\sigma,+})-\varphi(u_{\sigma,-})). \tag{3.11}$$

b étant positive et $\varphi(s)$ étant du même signe que s,

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} m(K)b_K u_K\varphi(u_K) \geq 0. \tag{3.12}$$

Comme φ est bornée par 1, on a, par Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{K\in\mathcal{T}} m(K)f_K\varphi(u_K)\right| &\leq \sum_{K\in\mathcal{T}} m(K)|f_K| \\
&\leq \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} m(K)\right)^{1/2}\left(\sum_{K\in\mathcal{T}} m(K)f_K^2\right)^{1/2} \\
&\leq |\Omega|^{1/2}\mathcal{N}(f_\mathcal{T},G_\mathcal{M}). \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Par hypothèse de conservativité sur les $(G_{K,\sigma})_{K\in\mathcal{T},\,\sigma\in\mathcal{E}_K}$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} m(\sigma)G_{K,\sigma}\varphi(u_K)\right| &= \left|\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)G_{K,\sigma}(\varphi(u_K)-\varphi(u_L))\right| \\
&\leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_\sigma G_\sigma^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma(\varphi(u_K)-\varphi(u_L))^2\right)^{1/2} \\
&\leq \mathcal{N}(f_\mathcal{T},G_\mathcal{M})\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma(\varphi(u_K)-\varphi(u_L))^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Or φ est croissante et 1-lipschitzienne (φ' est majorée par 1) donc, pour tous $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(\varphi(x)-\varphi(y))^2\leq |x-y||\varphi(x)-\varphi(y)| = (x-y)(\varphi(x)-\varphi(y))$; ainsi,

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma(\varphi(u_K)-\varphi(u_L))^2 \leq \sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma(u_K-u_L)(\varphi(u_K)-\varphi(u_L)).$$

Par l'inégalité de Young, on en déduit donc que

$$\left|\sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} m(\sigma)G_{K,\sigma}\varphi(u_K)\right| \leq \mathcal{N}(f_\mathcal{T},G_\mathcal{M})^2 + \frac{1}{4}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma(u_K-u_L)(\varphi(u_K)-\varphi(u_L)). \qquad (3.14)$$

En injectant (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) et (3.14) dans (3.9), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{4}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma(u_K-u_L)(\varphi(u_K)-\varphi(u_L)) \\
&\quad\leq |\Omega|^{1/2}\mathcal{N}(f_\mathcal{T},G_\mathcal{M}) + \mathcal{N}(f_\mathcal{T},G_\mathcal{M})^2 - \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} v_\sigma u_{\sigma,+}(\varphi(u_{\sigma,+})-\varphi(u_{\sigma,-})) \\
&\quad= |\Omega|^{1/2}\mathcal{N}(f_\mathcal{T},G_\mathcal{M}) + \mathcal{N}(f_\mathcal{T},G_\mathcal{M})^2 + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} v_\sigma u_{\sigma,+}(\varphi(u_{\sigma,-})-\varphi(u_{\sigma,+})). \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant étudier un peu plus précisément chaque terme de la dernière somme, cas par cas. On utilise pour cela le fait que φ est croissante.

- Si $u_{\sigma,+}\geq u_{\sigma,-}$ et $u_{\sigma,+}\geq 0$, alors $\varphi(u_{\sigma,-})-\varphi(u_{\sigma,+})\leq 0$ et $u_{\sigma,+}(\varphi(u_{\sigma,-})-\varphi(u_{\sigma,+}))\leq 0$.
- Si $u_{\sigma,+}\geq u_{\sigma,-}$ et $u_{\sigma,+}<0$, alors $0>u_{\sigma,+}\geq u_{\sigma,-}$, donc $(u_{\sigma,+},u_{\sigma,-})$ ont le même signe et $|u_{\sigma,+}|\leq|u_{\sigma,-}|$.
- Si $u_{\sigma,+}<u_{\sigma,-}$ et $u_{\sigma,+}\geq 0$, alors $0\leq u_{\sigma,+}<u_{\sigma,-}$, donc $(u_{\sigma,+},u_{\sigma,-})$ ont le même signe et $|u_{\sigma,+}|\leq|u_{\sigma,-}|$.
- Si $u_{\sigma,+}<u_{\sigma,-}$ et $u_{\sigma,+}<0$, alors $\varphi(u_{\sigma,-})-\varphi(u_{\sigma,+})\geq 0$ et $u_{\sigma,+}(\varphi(u_{\sigma,-})-\varphi(u_{\sigma,+}))\leq 0$.

En notant alors $\mathcal{A}_1 = \{\sigma \in \mathcal{E} \mid u_{\sigma,+} \geq u_{\sigma,-}\,,\ u_{\sigma,+} < 0\}$ et $\mathcal{A}_2 = \{\sigma \in \mathcal{E} \mid u_{\sigma,+} < u_{\sigma,-}\,,\ u_{\sigma,+} \geq 0\}$, on constate que, pour tout $\sigma \in \mathcal{E}\backslash(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$, $v_\sigma u_{\sigma,+}(\varphi(u_{\sigma,-}) - \varphi(u_{\sigma,+})) \leq 0$. Ainsi,

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} v_\sigma u_{\sigma,+}(\varphi(u_{\sigma,-}) - \varphi(u_{\sigma,+})) \leq \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2} v_\sigma u_{\sigma,+}(\varphi(u_{\sigma,-}) - \varphi(u_{\sigma,+})).$$

Comme $v_\sigma \leq m(\sigma)||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N}$, on en déduit, par Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} v_\sigma u_{\sigma,+}(\varphi(u_{\sigma,-}) - \varphi(u_{\sigma,+})) \\
&\quad\leq\ ||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N} \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2} m(\sigma)|u_{\sigma,+}||\varphi(u_{\sigma,-}) - \varphi(u_{\sigma,+})| \\
&\quad\leq\ ||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N} \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2} m(\sigma)d_\sigma\right)^{1/2} \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2} \tau_\sigma u_{\sigma,+}^2(\varphi(u_{\sigma,-}) - \varphi(u_{\sigma,+}))^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Or $\sum_{\sigma\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2} m(\sigma)d_\sigma \leq \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_\sigma = N|\Omega|$ et, dès que $\sigma \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, $(u_{\sigma,+}, u_{\sigma,-})$ ont le même signe et $|u_{\sigma,+}| \leq |u_{\sigma,-}|$, donc par le lemme 3.4 et l'inégalité de Young,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} v_\sigma u_{\sigma,+}(\varphi(u_{\sigma,-}) - \varphi(u_{\sigma,+})) \\
&\quad\leq\ (N|\Omega|)^{1/2}||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N} \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2} \tau_\sigma(u_{\sigma,-} - u_{\sigma,+})(\varphi(u_{\sigma,-}) - \varphi(u_{\sigma,+}))\right)^{1/2} \\
&\quad\leq\ N|\Omega|\,||\mathbf{v}||^2_{(L^\infty(\Omega))^N} + \frac{1}{4}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma(u_{\sigma,-} - u_{\sigma,+})(\varphi(u_{\sigma,-}) - \varphi(u_{\sigma,+})).
\end{aligned}$$

Pour tout $\sigma \in \mathcal{E}$, on a $\{u_{\sigma,+}, u_{\sigma,-}\} = \{u_K, u_L\}$, donc $(u_{\sigma,-} - u_{\sigma,+})(\varphi(u_{\sigma,-}) - \varphi(u_{\sigma,+})) = (u_K - u_L)(\varphi(u_K) - \varphi(u_L))$. En revenant à (3.15), on obtient donc

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma(u_K - u_L)(\varphi(u_K) - \varphi(u_L)) \leq 2|\Omega|^{1/2}\mathcal{N}(f_\mathcal{T}, G_\mathcal{M}) + 2\mathcal{N}(f_\mathcal{T}, G_\mathcal{M})^2 + 2N|\Omega|\,||\mathbf{v}||^2_{(L^\infty(\Omega))^N},$$

ce qui conclut la preuve de cette proposition. ∎

Corollaire 3.1 *Si $\mathcal{M}$ est un maillage admissible et $u_\mathcal{T} = (u_K)_{K\in\mathcal{T}}$ est une solution de (3.3)—(3.5) avec un second membre vérifiant (3.6), alors*

$$||\ln(1 + |u_\mathcal{T}|)||_{1,\mathcal{M}} \leq \left(2|\Omega|^{1/2}\mathcal{N}(f_\mathcal{T}, G_\mathcal{M}) + 2\mathcal{N}(f_\mathcal{T}, G_\mathcal{M})^2 + 2N|\Omega|\,||\mathbf{v}||^2_{(L^\infty(\Omega))^N}\right)^{1/2}$$

Preuve du corollaire 3.1

On constate que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\ln(1 + |s|) = \int_0^s \frac{\mathrm{sgn}(t)\,dt}{1+|t|}$. Ainsi, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par Cauchy-Schwarz et par croissance de φ,

$$\begin{aligned}
(\ln(1 + |x|) - \ln(1 + |y|))^2 &= \left(\int_y^x \frac{\mathrm{sgn}(t)\,dt}{1 + |t|}\right)^2 \\
&\leq |x - y| \left|\int_y^x \frac{dt}{(1 + |t|)^2}\right| = |x - y||\varphi(x) - \varphi(y)| = (x - y)(\varphi(x) - \varphi(y)).
\end{aligned}$$

En utilisant cette majoration et l'estimation de la proposition 3.1, on en déduit le résultat du corollaire. ∎

3.3.3 Estimations a priori sur $u_{\mathcal{T}}$

Munis de l'estimation sur $\ln(1+|u_{\mathcal{T}}|)$, nous pouvons maintenant, comme dans le cas continu, en déduire une estimation sur $u_{\mathcal{T}}$ solution de (3.3)—(3.5).

Proposition 3.2 *Soit $\mathcal{M}$ un maillage admissible et $\zeta > 0$ tel que*

$$\forall K \in \mathcal{T}\,,\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_K\,,\ d_{K,\sigma} \geq \zeta d_\sigma.$$

Il existe C ne dépendant que de $(||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N}, \Omega, \zeta)$ tel que, si $u_{\mathcal{T}} = (u_K)_{K\in\mathcal{T}}$ est une solution de (3.3)—(3.5) avec un second membre vérifiant (3.6), on a $||u_{\mathcal{T}}||_{1,\mathcal{M}} \leq C\mathcal{N}(f_{\mathcal{T}}, G_{\mathcal{M}})$.

Preuve de la proposition (3.2)
Dans toute cette preuve, les constantes C_i ne dépendent que de $(||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N}, \Omega, \zeta)$.

Etape 1: estimation sur $S_k(u_{\mathcal{T}})$.
Nous supposons ici que $u_{\mathcal{T}}$ est une solution de (3.3)—(3.5) avec un second membre vérifiant (3.6) et $\mathcal{N}(f_{\mathcal{T}}, G_{\mathcal{M}}) \leq 1$. En notant, comme dans le cas continu, pour $k \in \mathbb{R}$, $S_k(s) = s - T_k(s) = s - \min(k, \max(s, -k))$, nous cherchons des estimations sur $S_k(u_{\mathcal{T}})$ pour un k bien choisi.
En multipliant chaque égalité de (3.3) par $S_k(u_K)$, en sommant sur $K \in \mathcal{T}$ et en rassemblant les sommes par interfaces, on a

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma(u_K - u_L)(S_k(u_K) - S_k(u_L)) \quad = \quad & \sum_{K\in\mathcal{T}} m(K) f_K S_k(u_K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma) G_{K,\sigma}(S_k(u_K) - S_k(u_L)) \\ & - \sum_{K\in\mathcal{T}} m(K) b_K u_K S_k(u_K) - \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} u_{\sigma,+} v_{K,\sigma}(S_k(u_K) - S_k(u_L)),\end{aligned}$$

où, comme précédemment, on a posé, lorsque $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, $\sigma = K|L$ et, lorsque $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \cap \mathcal{E}_K$, $u_L = 0$.
Comme S_k est croissante et 1-lipschitzienne, on a $(S_k(u_K) - S_k(u_L))^2 \leq (u_K - u_L)(S_k(u_K) - S_k(u_L))$; b étant positive et $S_k(s)$ étant du même signe que s, $b_K u_K S_k(u_K) \geq 0$. Par Cauchy-Schwarz, et puisque $\mathcal{N}(f_{\mathcal{T}}, G_{\mathcal{M}}) \leq 1$,

$$\left|\sum_{K\in\mathcal{T}} m(K) f_K S_k(u_K)\right| \leq \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} m(K) f_K^2\right)^{1/2} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} m(K) S_k(u_K)^2\right)^{1/2} \leq ||S_k(u_{\mathcal{T}})||_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma) G_{K,\sigma}(S_k(u_K) - S_k(u_L))\right| \quad & \leq \quad \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma) d_\sigma G_\sigma^2\right)^{1/2} \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma (S_k(u_K) - S_k(u_L))^2\right)^{1/2} \\ & \leq \quad ||S_k(u_{\mathcal{T}})||_{1,\mathcal{M}}.\end{aligned}$$

On a donc, par le lemme 3.1 (inégalité de Poincaré discrète),

$$||S_k(u_{\mathcal{T}})||_{1,\mathcal{M}}^2 \leq C_1 ||S_k(u_{\mathcal{T}})||_{1,\mathcal{M}} + C_2 \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma) |u_{\sigma,+}|\, |S_k(u_K) - S_k(u_L)|. \tag{3.16}$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma) |u_{\sigma,+}| |S_k(u_K) - S_k(u_L)| \quad & \leq \quad \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma) d_\sigma u_{\sigma,+}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma (S_k(u_K) - S_k(u_L))^2\right)^{1/2} \\ & \leq \quad \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} u_K^2 \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K \,|\, v_{K,\sigma}\geq 0} m(\sigma) d_\sigma\right)\right)^{1/2} ||S_k(u_{\mathcal{T}})||_{1,\mathcal{M}}.\end{aligned}$$

Puisque $d_\sigma \leq \frac{1}{\zeta} d_{K,\sigma}$ pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_K$, on a

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K \mid v_{K,\sigma}\geq 0} m(\sigma)d_\sigma \leq \frac{1}{\zeta}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} m(\sigma)d_{K,\sigma} = \frac{N}{\zeta}m(K),$$

donc

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)|u_{\sigma,+}||S_k(u_K)-S_k(u_L)| \leq C_3||u_\mathcal{T}||_{L^2(\Omega)}||S_k(u_\mathcal{T})||_{1,\mathcal{M}}.$$

Mais $u_\mathcal{T} = T_k(u_\mathcal{T}) + S_k(u_\mathcal{T})$, donc $||u_\mathcal{T}||_{L^2(\Omega)} \leq k|\Omega|^{1/2} + ||S_k(u_\mathcal{T})||_{L^2(\Omega)}$, ce qui donne

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)|u_{\sigma,+}||S_k(u_K)-S_k(u_L)| \leq C_3k|\Omega|^{1/2}||S_k(u_\mathcal{T})||_{1,\mathcal{M}} + C_3||S_k(u_\mathcal{T})||_{L^2(\Omega)}||S_k(u_\mathcal{T})||_{1,\mathcal{M}}. \quad (3.17)$$

Soit $p > 2$; puisque $S_k(u_\mathcal{T}) = 0$ hors de $E_k = \{|u_\mathcal{T}| \geq k\}$, on a, par Hölder,

$$||S_k(u_\mathcal{T})||_{L^2(\Omega)} \leq |E_k|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}||S_k(u_\mathcal{T})||_{L^p(\Omega)}.$$

Comme, par le lemme 3.3 (inégalité de Sobolev discrète), il existe $p > 2$ (ne dépendant que de N) et C_4 tels que

$$||S_k(u_\mathcal{T})||_{L^p(\Omega)} \leq C_4||S_k(u_\mathcal{T})||_{1,\mathcal{M}},$$

on en déduit que

$$||S_k(u_\mathcal{T})||_{L^2(\Omega)} \leq C_4|E_k|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}||S_k(u_\mathcal{T})||_{1,\mathcal{M}},$$

ce qui implique, dans (3.17),

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)|u_{\sigma,+}||S_k(u_K)-S_k(u_L)| \leq C_3k|\Omega|^{1/2}||S_k(u_\mathcal{T})||_{1,\mathcal{M}} + C_3C_4|E_k|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}||S_k(u_\mathcal{T})||^2_{1,\mathcal{M}}.$$

En injectant cette inégalité dans (3.16), on a donc

$$||S_k(u_\mathcal{T})||^2_{1,\mathcal{M}} \leq C_1||S_k(u_\mathcal{T})||_{1,\mathcal{M}} + C_5k||S_k(u_\mathcal{T})||_{1,\mathcal{M}} + C_5|E_k|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}||S_k(u_\mathcal{T})||^2_{1,\mathcal{M}}.$$

On a, grâce au corollaire 3.1 et au lemme 3.1, $||\ln(1+|u_\mathcal{T}|)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_6$. Donc, par Tchebycheff,

$$|E_k| = |\{\ln(1+|u_\mathcal{T}|) \geq \ln(1+k)\}| \leq \frac{C_6}{(\ln(1+k))^2}.$$

Puisque $\frac{1}{2} - \frac{1}{p} > 0$, il existe donc k_0 ne dépendant que de (C_5, C_6, p), i.e. ne dépendant que de $(||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N}, \Omega, \zeta)$, tel que $C_5|E_{k_0}|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \leq 1/2$. On a alors

$$||S_{k_0}(u_\mathcal{T})||^2_{1,\mathcal{M}} \leq 2C_1||S_{k_0}(u_\mathcal{T})||_{1,\mathcal{M}} + 2C_5k_0||S_{k_0}(u_\mathcal{T})||_{1,\mathcal{M}},$$

ce qui donne

$$||S_{k_0}(u_\mathcal{T})||_{1,\mathcal{M}} \leq C_7. \quad (3.18)$$

Etape 2: estimation sur $u_\mathcal{T}$.
Toujours en supposant que $u_\mathcal{T}$ est une solution de (3.3)—(3.5) avec un second membre vérifiant (3.6) et $\mathcal{N}(f_\mathcal{T}, G_\mathcal{M}) \leq 1$, nous obtenons une estimation sur $||u_\mathcal{T}||_{1,\mathcal{M}}$.
Pour le k_0 trouvé dans la partie précédente, on cherche d'abord une estimation sur $T_{k_0}(u_\mathcal{T})$. En multipliant chaque terme de (3.3) par $T_{k_0}(u_K)$, en sommant sur $K \in \mathcal{T}$ et en rassemblant les sommes par

interfaces, on trouve, puisque T_{k_0} est croissante et 1-lipschitzienne,

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma(T_{k_0}(u_K)-T_{k_0}(u_L))^2 &\le \sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma(u_K-u_L)(T_{k_0}(u_K)-T_{k_0}(u_L))\\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}} m(K)f_K T_{k_0}(u_K)+\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)G_{K,\sigma}(T_{k_0}(u_K)-T_{k_0}(u_L))\\ &\quad -\sum_{K\in\mathcal{T}} m(K)b_K u_K T_{k_0}(u_K)-\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} u_{\sigma,+}v_{K,\sigma}(T_{k_0}(u_K)-T_{k_0}(u_L)).\end{aligned}$$

Or $u_K T_{k_0}(u_K)\ge 0$ et $|T_{k_0}(u_K)|\le k_0$, donc, par Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}||T_{k_0}(u_\mathcal{T})||_{1,\mathcal{M}}^2 &\le k_0\left(\sum_{K\in\mathcal{T}} m(K)\right)^{1/2}\left(\sum_{K\in\mathcal{T}} m(K)f_K^2\right)^{1/2}\\ &\quad +\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_\sigma G_\sigma^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma(T_{k_0}(u_K)-T_{k_0}(u_L))^2\right)^{1/2}\\ &\quad +C_8\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_\sigma u_{\sigma,+}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma(T_{k_0}(u_K)-T_{k_0}(u_L))^2\right)^{1/2}\\ &\le k_0|\Omega|^{1/2}+||T_{k_0}(u_\mathcal{T})||_{1,\mathcal{M}}+C_8\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_\sigma u_{\sigma,+}^2\right)^{1/2}||T_{k_0}(u_\mathcal{T})||_{1,\mathcal{M}}. \quad (3.19)\end{aligned}$$

On a déjà vu que

$$\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_\sigma u_{\sigma,+}^2\right)^{1/2}\le C_9||u_\mathcal{T}||_{L^2(\Omega)}.$$

De plus, puisque $|u_\mathcal{T}|\le k_0+|S_{k_0}(u_\mathcal{T})|$, par (3.18) et le lemme 3.1, on a $||u_\mathcal{T}||_{L^2(\Omega)}\le C_{10}$.
Ainsi, (3.19) donne $||T_{k_0}(u_\mathcal{T})||_{1,\mathcal{M}}\le C_{11}$. Puisque $u_\mathcal{T}=T_{k_0}(u_\mathcal{T})+S_{k_0}(u_\mathcal{T})$, cette inégalité et (3.18) donnent finalement

$$||u_\mathcal{T}||_{1,\mathcal{M}}\le C_{12}.$$

Etape 3: conclusion.
Supposons maintenant que $u_\mathcal{T}$ est une solution de (3.3)—(3.5) avec un second membre vérifiant (3.6) et prenons $\lambda>\mathcal{N}(f_\mathcal{T},G_\mathcal{M})$ (ceci pour éviter de diviser par 0...). Comme le système (3.3)—(3.5) est linéaire, $u_\mathcal{T}/\lambda$ est solution de ce système avec $(f_K/\lambda)_{K\in\mathcal{T}}$, $(G_{K,\sigma}/\lambda)_{K\in\mathcal{T},\,\sigma\in\mathcal{E}_K}$ comme second membre; ce second membre vérifiant (3.6) et $\mathcal{N}(f_\mathcal{T}/\lambda,G_\mathcal{M}/\lambda)\le 1$, on en déduit, par ce qui précède, que $||u_\mathcal{T}/\lambda||_{1,\mathcal{M}}\le C_{12}$, c'est à dire que $||u_\mathcal{T}||_{1,\mathcal{M}}\le C_{12}\lambda$. En faisant tendre λ vers $\mathcal{N}(f_\mathcal{T},G_\mathcal{M})$, on obtient finalement le résultat voulu. ■

3.4 Existence, unicité et convergence de la solution approchée

Lemme 3.5 *Soit $\mathcal{M}$ un maillage admissible de Ω et $\zeta>0$ tel que, pour tout $K\in\mathcal{T}$ et tout $\sigma\in\mathcal{E}_K$, $d_{K,\sigma}\ge\zeta d_\sigma$. Soit $(f_K)_{K\in\mathcal{T}}$ et $(G_{K,\sigma})_{K\in\mathcal{T},\,\sigma\in\mathcal{E}_K}$ définis par (3.2). Il existe alors une unique solution $u_\mathcal{T}=(u_K)_{K\in\mathcal{T}}$ à (3.3)—(3.5) et elle vérifie $||u_\mathcal{T}||_{1,\mathcal{M}}\le C(||f||_{L^2(\Omega)}+||G||_{(L^\infty(\Omega))^N})$, avec C ne dépendant que de $||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N}$, ζ et Ω.*

Preuve du lemme 3.5
Le système (3.3)—(3.5) est linéaire carré en $(u_K)_{K\in\mathcal{T}}$. De plus, l'estimation a priori de la proposition 3.2 prouve que, si le second membre de ce système est nul (ce second membre vérifie (3.6)), alors toute

solution correspondante est nulle. Ce système est donc injectif et, étant de dimension finie, il est bijectif; il existe donc, pour tout second membre, une unique solution à (3.3)—(3.5).
Supposons maintenant que le second membre soit donné par (3.2). Alors il vérifie clairement (3.6) et, par la proposition (3.2), la solution correspondante vérifie $||u_{\mathcal{T}}||_{1,\mathcal{M}} \leq C\mathcal{N}(f_{\mathcal{T}}, G_{\mathcal{M}})$ où C ne dépend que de $||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N}$, ζ et Ω. Or, pour tout $K \in \mathcal{T}$ et $\sigma \in \mathcal{E}_K$, $f_K^2 \leq \frac{1}{m(K)}\int_K |f|^2$ et $G_\sigma \leq ||G||_{(L^\infty(\Omega))^N}$, donc

$$\mathcal{N}(f_{\mathcal{T}}, G_{\mathcal{M}}) \leq ||f||_{L^2(\Omega)} + ||G||_{(L^\infty(\Omega))^N}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_\sigma\right)^{1/2} = ||f||_{L^2(\Omega)} + ||G||_{(L^\infty(\Omega))^N}(N|\Omega|)^{1/2},$$

ce qui donne bien l'estimation cherchée dans le lemme. ■

Maintenant que nous savons qu'il existe une solution au problème (3.1) discrétisé, et que nous avons des estimations sur cette solution, nous pouvons montrer un théorème de convergence.

Théorème 3.1 *Soit $\zeta > 0$. On considère des maillages $\mathcal{M}$ de Ω tels que, pour tout $K \in \mathcal{T}$ et pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_K$, on a $d_{K,\sigma} \geq \zeta d_\sigma$. Alors la solution $u_{\mathcal{T}}$ de (3.3)—(3.5) converge, lorsque $h_{\mathcal{T}} \to 0$, dans $L^2(\Omega)$ vers la solution variationnelle u de (3.1).*

Remarque 3.3 *L'hypothèse de minoration de $d_{K,\sigma}/d_\sigma$ n'est utile que pour obtenir une estimation sur les solutions discrétisées, i.e. pour pouvoir appliquer le lemme 3.5; nous ne l'utiliserons pas pour prouver que les limites des solutions discrétisées sont des solutions de (3.1). Ainsi, notre preuve de convergence permet d'étendre les résultats de convergence de [37] au cas $\mathbf{v} \in (\mathcal{C}(\overline{\Omega}))^N$ et $G \in (\mathcal{C}(\overline{\Omega}))^N$ non nul, sans hypothèse supplémentaire sur les maillages.*

Preuve du théorème 3.1
Par l'estimation du lemme 3.5, on sait que $||u_{\mathcal{T}}||_{1,\mathcal{M}}$ est borné indépendamment du maillage $\mathcal{M}$. Le lemme 3.2 nous dit alors que l'ensemble Y des solutions discrètes (i.e. solutions de (3.3)—(3.5) pour un maillage $\mathcal{M}$ satisfaisant $d_{K,\sigma} \geq \zeta d_\sigma$ pour tout $K \in \mathcal{T}$ et tout $\sigma \in \mathcal{E}_K$) est relativement compact dans $L^2(\Omega)$ et que les valeurs d'adhérence de suites $(u_n)_{n\geq 1}$ de cet ensemble, correspondant à des maillages dont la taille $h_{\mathcal{T}_n}$ tend vers 0, sont dans $H_0^1(\Omega)$. Nous allons montrer que toute valeur d'adhérence de ce genre est une solution variationnelle de (3.1); cette solution étant unique (théorème 1.1), cela nous donnera bien la convergence, lorsque $h_{\mathcal{T}} \to 0$ et sans extraire de suite, de $u_{\mathcal{T}}$ vers la solution de (3.1).

Soit donc $u_{\mathcal{T}} \in Y$ qui converge dans $L^2(\Omega)$, lorsque $h_{\mathcal{T}} \to 0$, vers un certain $u \in H_0^1(\Omega)$. On prend $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et on veut donc montrer que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\psi - \int_\Omega u\mathbf{v} \cdot \nabla\psi + \int_\Omega bu\psi = \int_\Omega f\psi - \int_\Omega G \cdot \nabla\psi. \tag{3.20}$$

On s'inspire pour cela en tout point de la preuve de convergence dans [37], en faisant la modification nécessaire au fait que $\mathbf{v}$ et G ne sont que continues ici.
Dans la preuve qui suit, les constantes C_i ne dépendent que de ψ, Ω et d'un majorant (que l'on a) de $||u_{\mathcal{T}}||_{1,\mathcal{M}}$.

On prend $h_{\mathcal{T}}$ assez petit tel que $\psi = 0$ sur K pour tout $K \in \mathcal{T}$ vérifiant $\overline{K} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. En multipliant par $\psi(x_K)$ l'équation satisfaite par $u_{\mathcal{T}}$ et en sommant sur $K \in \mathcal{T}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma(u_K - u_L)(\psi(x_K) - \psi(x_L)) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} v_{K,\sigma}u_{\sigma,+}(\psi(x_K) - \psi(x_L)) + \sum_{K\in\mathcal{T}} m(K)b_K u_K\psi(x_K)\\ = \sum_{K\in\mathcal{T}} m(K)f_K\psi(x_K) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)G_{K,\sigma}(\psi(x_K) - \psi(x_L)).\end{aligned} \tag{3.21}$$

Notons T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5 les termes de cette égalité.

Etape 1: convergence de T_3 et T_4.
Soit $\psi_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{M})$ définie par $\psi_K = \psi(x_K)$; on a $\psi_{\mathcal{T}} \to \psi$ dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p < \infty$. Ainsi, puisque $u_{\mathcal{T}} \to u$ et $f_{\mathcal{T}} \to f$ dans $L^2(\Omega)$ et $b_{\mathcal{T}} \to b$ dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p < \infty$, on a

$$T_3 \to \int_\Omega bu\psi \quad \text{et} \quad T_4 \to \int_\Omega f\psi.$$

Etape 2: convergence de T_1.
On commence par remarquer que

$$T_1' = -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} (u_K - u_L) \int_\sigma \nabla\psi \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}\, d\gamma = -\sum_{K\in\mathcal{T}} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} u_K \int_\sigma \nabla\psi \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}\, d\gamma = -\int_\Omega u_{\mathcal{T}} \Delta\psi$$

converge vers $-\int_\Omega u\Delta\psi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\psi$. De plus, en notant

$$R_{K,\sigma} = \frac{\psi(x_L) - \psi(x_K)}{d_\sigma} - \frac{1}{m(\sigma)} \int_\sigma \nabla\psi \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}\, d\gamma,$$

on a, par régularité de ψ, $|R_{K,\sigma}| \le C_1 h_{\mathcal{T}}$. On peut alors comparer T_1 et T_1':

$$\begin{aligned}
|T_1 - T_1'| &\le \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)|u_K - u_L| \left| \frac{\psi(x_K) - \psi(x_L)}{d_\sigma} + \frac{1}{m(\sigma)} \int_\sigma \nabla\psi \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}\, d\gamma \right| \\
&\le C_1 h_{\mathcal{T}} \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \tau_\sigma (u_K - u_L)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma) d_\sigma \right)^{1/2} \\
&\le C_1 (N|\Omega|)^{1/2} ||u_{\mathcal{T}}||_{1,\mathcal{M}} h_{\mathcal{T}}.
\end{aligned}$$

Puisque $||u_{\mathcal{T}}||_{1,\mathcal{M}}$ est borné, on a donc $T_1 - T_1' \to 0$ et donc $T_1 \to \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\psi$.

Etape 3: convergence de T_2.
Nous désirons montrer que T_2 tend vers $-\int_\Omega u\mathbf{v} \cdot \nabla\psi$. Pour cela, on se donne $\varepsilon > 0$ et $\mathbf{w} \in (\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}))^N$ telle que $||\mathbf{v} - \mathbf{w}||_{(L^\infty(\Omega))^N} \le \varepsilon$. En notant $w_{K,\sigma} = \int_\sigma \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}\, d\gamma$ et

$$T_2' = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} w_{K,\sigma} u_{\sigma,+} (\psi(x_K) - \psi(x_L)),$$

on a

$$\begin{aligned}
|T_2 - T_2'| &= \left| \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} (v_{K,\sigma} - w_{K,\sigma}) u_{\sigma,+} (\psi(x_K) - \psi(x_L)) \right| \\
&\le C_2 \varepsilon \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma) d_\sigma |u_{\sigma,+}| \\
&= C_2 \varepsilon \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma) d_{\sigma,+} |u_{\sigma,+}| + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma) d_{\sigma,-} |u_{\sigma,+}| \right)
\end{aligned}$$

où, comme on s'y attend,

pour $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, $\quad d_{\sigma,+} = d_{K,\sigma}$ avec le $K \in \mathcal{T}$ tel que $\sigma \in \mathcal{E}_K$ choisi pour définir $u_{\sigma,+} = u_K$,
pour $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \cap \mathcal{E}_K$, $\quad d_{\sigma,+} = d_{K,\sigma}$ si $v_{K,\sigma} \ge 0$, $d_{\sigma,+} = 0$ dans le cas contraire

et $d_{\sigma,-} = d_\sigma - d_{\sigma,+}$. On notera $\mathcal{E}_{K,+} = \{\sigma \in \mathcal{E}_K \mid K$ a été choisi pour définir $u_{\sigma,+} = u_K\}$.

Par l'estimation que l'on a sur $||u_\mathcal{T}||_{1,\mathcal{M}}$ et le lemme de Poincaré discret,

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_{\sigma,+}|u_{\sigma,+}| &= \sum_{K\in\mathcal{T}}|u_K|\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{K,+}} m(\sigma)d_{K,\sigma}\\ &\leq \sum_{K\in\mathcal{T}}|u_K|\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} m(\sigma)d_{K,\sigma}\\ &\leq N||u_\mathcal{T}||_{L^1(\Omega)}\\ &\leq C_3.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_{\sigma,-}|u_{\sigma,+}|\\ &\quad\leq \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_{\sigma,-}|u_{\sigma,-}| + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_{\sigma,-}|u_{\sigma,+}-u_{\sigma,-}|\\ &\quad\leq \sum_{K\in\mathcal{T}}|u_K|\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K\setminus\mathcal{E}_{K,+}} m(\sigma)d_{K,\sigma} + h_\mathcal{T}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_\sigma\right)^{1/2}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\tau_\sigma(u_{\sigma,+}-u_{\sigma,-})^2\right)^{1/2}\\ &\quad\leq N||u_\mathcal{T}||_{L^1(\Omega)} + h_\mathcal{T}(N|\Omega|)^{1/2}||u_\mathcal{T}||_{1,\mathcal{M}}\\ &\quad\leq C_4.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|T_2 - T_2'| \leq C_5\varepsilon. \tag{3.22}$$

Etudions maintenant T_2'.

$$\begin{aligned}T_2' &= \sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} w_{K,\sigma}u_{\sigma,+}\psi(x_K)\\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} w_{K,\sigma}(u_{\sigma,+}-u_K)\psi(x_K) + \sum_{K\in\mathcal{T}} u_K\psi(x_K)\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} w_{K,\sigma}\\ &= T_2'' + T_2'''\end{aligned}$$

Par régularité de $\mathbf{w}$, on a

$$T_2''' = \sum_{K\in\mathcal{T}} u_K\psi(x_K)\int_{\partial K}\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}_K\,d\gamma = \sum_{K\in\mathcal{T}} u_K\psi(x_K)\int_K \mathrm{div}(\mathbf{w}) \to \int_\Omega u\psi\mathrm{div}(\mathbf{w}).$$

De plus,

$$T_2'' = \sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K}(u_{\sigma,+}-u_K)\int_\sigma \psi\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}_{K,\sigma}\,d\gamma + \sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K}(u_{\sigma,+}-u_K)\int_\sigma(\psi(x_K)-\psi)\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}_{K,\sigma}\,d\gamma.$$

Mais, comme le support de ψ ne touche pas les mailles au bord de Ω,

$$\sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} u_{\sigma,+}\int_\sigma\psi\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}_{K,\sigma}\,d\gamma = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathrm{int}}} u_{\sigma,+}\left(\int_\sigma\psi\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}_{K,\sigma}\,d\gamma + \int_\sigma\psi\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}_{L,\sigma}\,d\gamma\right) = 0$$

car $\mathbf{n}_{K,\sigma} = -\mathbf{n}_{L,\sigma}$ lorsque $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\mathrm{int}}$. Comme

$$-\sum_{K\in\mathcal{T}} u_K\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K}\int_\sigma\psi\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}_{K,\sigma}\,d\gamma = -\sum_{K\in\mathcal{T}} u_K\int_K\mathrm{div}(\psi\mathbf{w}) \to -\int_\Omega u\mathrm{div}(\psi\mathbf{w}),$$

et

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K}(u_{\sigma,+}-u_K)\int_\sigma(\psi(x_K)-\psi)\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}_{K,\sigma}\,d\gamma\right| &\leq C_6h_{\mathcal{T}}||\mathbf{w}||_{(L^\infty(\Omega))^N}\sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K}m(\sigma)|u_{\sigma,+}-u_K| \\
&\leq C_6h_{\mathcal{T}}||\mathbf{w}||_{(L^\infty(\Omega))^N}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}m(\sigma)|u_L-u_K| \\
&\leq C_6h_{\mathcal{T}}||\mathbf{w}||_{(L^\infty(\Omega))^N}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}m(\sigma)d_\sigma\right)^{1/2}||u_{\mathcal{T}}||_{1,\mathcal{M}} \\
&\leq C_7h_{\mathcal{T}},
\end{aligned}$$

on en déduit que $T_2'' \to -\int_\Omega u\mathrm{div}(\psi\mathbf{w})$. Ainsi, $T_2' \to -\int_\Omega u\mathrm{div}(\psi\mathbf{w})+\int_\Omega u\psi\mathrm{div}(\mathbf{w}) = -\int_\Omega u\mathbf{w}\cdot\nabla\psi$; il existe donc $\eta>0$ tel que, pour tout $h_{\mathcal{T}}<\eta$,

$$\left|T_2'-\left(-\int_\Omega u\mathbf{w}\cdot\nabla\psi\right)\right|\leq\varepsilon. \tag{3.23}$$

Mais

$$\left|\int_\Omega u\mathbf{v}\cdot\nabla\psi-\int_\Omega u\mathbf{w}\cdot\nabla\psi\right|\leq\varepsilon||u||_{L^2(\Omega)}||\,|\nabla\psi|\,||_{L^2(\Omega)}=C_8\varepsilon. \tag{3.24}$$

(3.22), (3.23) et (3.24) donnent donc, dès que $h_{\mathcal{T}}<\eta$,

$$\left|T_2-\left(-\int_\Omega u\mathbf{v}\cdot\nabla\psi\right)\right|\leq C_9\varepsilon,$$

ce qui signifie bien que $T_2' \to -\int_\Omega u\mathbf{v}\cdot\nabla\psi$.

Etape 4: convergence de T_5.
La méthode employée pour prouver la convergence de T_5 est très semblable, en beaucoup plus simple (il s'agit de prendre $u_{\sigma,+}\equiv 1$ dans la démonstration précédente!), à la méthode déjà employée pour prouver la convergence de T_2.
Soit $\varepsilon>0$ et $H\in(\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}))^N$ telle que $||G-H||_{(L^\infty(\Omega))^N}\leq\varepsilon$. On introduit

$$T_5'=\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}m(\sigma)H_{K,\sigma}(\psi(x_K)-\psi(x_L)),$$

où $H_{K,\sigma}=m(\sigma)^{-1}\int_\sigma H\cdot\mathbf{n}_{K,\sigma}\,d\gamma$. On a alors

$$|T_5-T_5'|\leq C_{10}\varepsilon\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}m(\sigma)d_\sigma=C_{11}\varepsilon.$$

Mais, par régularité de H et de ψ,

$$\begin{aligned}
T_5' &= \sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K}m(\sigma)H_{K,\sigma}\psi(x_K) \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}}\psi(x_K)\int_K\mathrm{div}(H)\to\int_\Omega\mathrm{div}(H)\psi=-\int_\Omega H\cdot\nabla\psi.
\end{aligned}$$

Il existe donc $\eta>0$ tel que, pour $h_{\mathcal{T}}<\eta$, $|T_5'+\int_\Omega H\cdot\nabla\psi|\leq\varepsilon$. Comme

$$\left|\int_\Omega H\cdot\nabla\psi-\int_\Omega G\cdot\nabla\psi\right|\leq C_{12}\varepsilon,$$

on déduit de tout ceci que, dès que $h_{\mathcal{T}} < \eta$, on a

$$\left| T_5 - \left(- \int_\Omega G \cdot \nabla \psi \right) \right| \le (1 + C_{11} + C_{12})\varepsilon,$$

ce qui prouve bien que $T_5 \to - \int_\Omega G \cdot \nabla \psi$.
Grâce aux convergences de T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5, on constate que $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifie (3.20), ce qui conclut la preuve de ce théorème. ■

3.5 Estimation d'erreur

Nous prouvons ici, lorsque $G = 0$ et $\mathbf{v} \in (\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}))^N$, une estimation de l'erreur entre la solution approchée $u_{\mathcal{T}}$ et la solution exacte u de (3.1), lorsque cette dernière est dans $H^2(\Omega)$. Pour simplifier, nous prendrons aussi b constant.

Théorème 3.2 *On suppose que $G = 0$, que $\mathbf{v} \in (\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}))^N$ et que b est constant. Soit $\zeta > 0$. On considère un maillage $\mathcal{M}$ de Ω tel que, pour tout $K \in \mathcal{T}$ et tout $\sigma \in \mathcal{E}_K$, on a $d_{K,\sigma} \ge \zeta d_\sigma$. On note $u_{\mathcal{T}}$ la solution de (3.3)—(3.5) et u la solution de (3.1). On suppose que $u \in H^2(\Omega)$ (ce qui est par exemple le cas si Ω est convexe). Alors, en définissant $e_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{M})$ par $e_K = u_K - u(x_K)$, il existe C ne dépendant que de $||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N}$, Ω et ζ tel que*

$$||e_{\mathcal{T}}||_{1,\mathcal{M}} \le C h_{\mathcal{T}} ||u||_{H^2(\Omega)}.$$

Preuve du théorème 3.2
Ici encore, on suit fidèlement [37].
Dans cette preuve, les constantes C_i ne dépendent que de b, $||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N}$, Ω et ζ.

u étant dans $H^2(\Omega)$, elle vérifie (3.1) au sens fort. On peut donc intégrer l'équation de (3.1) sur chaque maille K pour trouver

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \overline{F}_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \overline{V}_{K,\sigma} + b \int_K u = \int_K f \tag{3.25}$$

où $\overline{F}_{K,\sigma} = - \int_\sigma \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}$ et $\overline{V}_{K,\sigma} = \int_\sigma u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}$. En posant les flux approchés

$$\begin{array}{ll} F^*_{K,\sigma} = -\tau_\sigma (u(x_L) - u(x_K)) & \text{lorsque } \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\rm int}\,, \\ F^*_{K,\sigma} = \tau_\sigma u(x_K) & \text{lorsque } \sigma \in \mathcal{E}_{\rm int} \cap \mathcal{E}_K\,, \end{array}$$

et

$$V^*_{K,\sigma} = v_{K,\sigma} u(x_{\sigma,+})$$

où, pour $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\rm int}$ (respectivement $\sigma \in \mathcal{E}_{\rm ext} \cap \mathcal{E}_K$), $x_{\sigma,+} = x_K$ lorsque $v_{K,\sigma} \ge 0$ et $x_{\sigma,+} = x_L$ (respectivement $x_{\sigma,+} \in \sigma$ — ce qui implique $u(x_{\sigma,+}) = 0$) dans le cas contraire, il a été prouvé dans [41] que les erreurs de consistance

$$R_{K,\sigma} = \frac{1}{m(\sigma)}(F^*_{K,\sigma} - \overline{F}_{K,\sigma})\,, \quad r_{K,\sigma} = \frac{1}{m(\sigma)}(V^*_{K,\sigma} - \overline{V}_{K,\sigma}) \quad \text{et} \quad \rho_K = u(x_K) - \frac{1}{m(K)} \int_K u$$

vérifient

$$\begin{array}{l} |R_{K,\sigma}| \le C_1 h_{\mathcal{T}} (m(\sigma) d_\sigma)^{-1/2} ||u||_{H^2(\mathcal{V}_\sigma)}\,, \quad |r_{K,\sigma}| \le C_1 h_{\mathcal{T}} (m(\sigma) d_\sigma)^{-1/4} ||u||_{W^{1,4}(\mathcal{V}_\sigma)} \\ \text{et} \quad |\rho_K| \le h_{\mathcal{T}} m(K)^{-1/4} ||u||_{W^{1,4}(K)} \end{array} \tag{3.26}$$

où $\mathcal{V}_\sigma = \{t x_K + (1-t)x\,,\ x \in \sigma\,,\ t \in]0,1[\} \cup \{t x_L + (1-t)x\,,\ x \in \sigma\,,\ t \in]0,1[\}$ lorsque $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\rm int}$ et $\mathcal{V}_\sigma = \{t x_K + (1-t)x\,,\ x \in \sigma\,,\ t \in]0,1[\}$ lorsque $\sigma \in \mathcal{E}_{\rm ext} \cap \mathcal{E}_K$ (les estimations de [41] sont plus générales, mais nous n'utiliserons que cette forme). Remarquez que, puisque $u \in H^2(\Omega)$ et $N = 2$ ou 3, on a bien $u \in W^{1,4}(\Omega)$.

Par (3.25) et la définition de $R_{K,\sigma}$, $r_{K,\sigma}$ et ρ_K, on a donc, pour tout $K \in \mathcal{T}$,

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} F^*_{K,\sigma} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} V^*_{K,\sigma} + m(K)bu(x_K) = m(K)f_K + m(K)b\rho_K + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} m(\sigma)(R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}).$$

En soustrayant cette équation à celle vérifiée par $u_{\mathcal{T}}$, on constate donc que $e_{\mathcal{T}}$ satisfait, pour tout $K \in \mathcal{T}$,

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} \widetilde{F}_{K,\sigma} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} v_{K,\sigma}e_{\sigma,+} + m(K)be_K = -m(K)b\rho_K - \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} m(\sigma)(R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma}),$$

où $\widetilde{F}_{K,\sigma} = -\tau_\sigma(e_L - e_K)$ si $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, $\widetilde{F}_{K,\sigma} = \tau_\sigma e_K$ si $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \cap \mathcal{E}_K$, et $e_{\sigma,+}$ est le décentrement amont de $e_{\mathcal{T}}$.
$e_{\mathcal{T}}$ est donc la solution de (3.3)—(3.5) avec, pour second membre,

$$((-b\rho_K)_{K\in\mathcal{T}}, (-R_{K,\sigma} - r_{K,\sigma})_{K\in\mathcal{T},\sigma\in\mathcal{E}_K}).$$

Ce second membre vérifiant (3.6) (car les flux $\overline{F}$, $\overline{V}$, F^* et V^* sont conservatifs), on peut alors appliquer la proposition 3.2:

$$||e_{\mathcal{T}}||_{1,\mathcal{M}} \le C_2\mathcal{N}((b\rho_K)_{K\in\mathcal{T}}, (R_{K,\sigma} + r_{K,\sigma})_{K\in\mathcal{T},\sigma\in\mathcal{E}_K}). \tag{3.27}$$

Mais, par (3.26), Cauchy-Schwarz et les inégalité de Sobolev, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{K\in\mathcal{T}} m(K)b^2\rho_K^2 &\le b^2h_{\mathcal{T}}^2 \sum_{K\in\mathcal{T}} m(K)^{1/2}||u||^2_{W^{1,4}(K)} \\
&\le b^2h_{\mathcal{T}}^2 \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} m(K)\right)^{1/2} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}} ||u||^4_{W^{1,4}(K)}\right)^{1/2} \\
&\le b^2h_{\mathcal{T}}^2|\Omega|^{1/2}||u||^2_{W^{1,4}(\Omega)} \\
&\le C_3h_{\mathcal{T}}^2||u||^2_{H^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

et, en notant $R_\sigma = |R_{K,\sigma}|$ et $r_\sigma = |r_{K,\sigma}|$ lorsque $\sigma \in \mathcal{E}_K$ (ces définitions ne dépendent que de σ, non du K tel que $\sigma \in \mathcal{E}_K$),

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_\sigma(R_\sigma + r_\sigma)^2 &\le 2C_1^2h_{\mathcal{T}}^2 \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} ||u||^2_{H^2(\mathcal{V}_\sigma)} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} (m(\sigma)d_\sigma)^{1/2}||u||^2_{W^{1,4}(\mathcal{V}_\sigma)}\right) \\
&\le 2C_1^2h_{\mathcal{T}}^2 \left(||u||^2_{H^2(\Omega)} + \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_\sigma\right)^{1/2} \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} ||u||^4_{W^{1,4}(\mathcal{V}_\sigma)}\right)^{1/2}\right) \\
&\le C_4h_{\mathcal{T}}^2||u||^2_{H^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

(en effet, $\cup_\sigma\mathcal{V}_\sigma = \Omega$ à un ensemble de mesure nulle près, et l'union est disjointe). En rassemblant ces inégalités dans (3.27), on en déduit le résultat du théorème. ∎

3.6 Concernant le décentrement amont

Comme nous l'avons signalé dans la remarque 3.1, on peut aussi étudier des schémas non décentrés amont, i.e. pour lesquels $u_{\sigma,+}$ n'est pas donné par (3.5).
Nous allons voir ici que, quel que soit le choix linéaire que l'on effectue entre u_K et u_L pour $u_{\sigma,+}$, on a des estimations sur la solution du schéma correspondant, à condition que la taille $h_{\mathcal{T}}$ du maillage soit assez petite. Munis de ces estimations, la convergence se fait alors comme dans le cas décentré amont.

Plus précisément: si $\mathcal{M}$ est un maillage de Ω, on considère la discrétisation suivante de (3.1)

$$\forall K \in \mathcal{T}\,,\ \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} v_{K,\sigma}u_\sigma + m(K)b_K u_K = m(K)f_K + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} m(\sigma)G_{K,\sigma}\,, \tag{3.28}$$

$$\begin{array}{ll} \forall\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\rm int}\,, & F_{K,\sigma} = -\tau_\sigma(u_L - u_K)\,,\\ \forall\sigma \in \mathcal{E}_{\rm ext}\cap\mathcal{E}_K\,, & F_{K,\sigma} = \tau_\sigma u_K\,, \end{array} \tag{3.29}$$

$$\begin{array}{ll} \forall\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\rm int}\,, & u_\sigma = \alpha_{K,\sigma}u_K + \alpha_{L,\sigma}u_L\,,\\ \forall\sigma \in \mathcal{E}_{\rm ext}\cap\mathcal{E}_K\,, & u_{\sigma,+} = \alpha_{K,\sigma}u_K\,, \end{array} \tag{3.30}$$

où $(\alpha_{K,\sigma})_{K\in\mathcal{T},\,\sigma\in\mathcal{E}_K}$ sont fixés (ne dépendent que des données $(\mathbf{v}, f, G)$ du problème) dans $[0,1]$ de sorte que $\alpha_{K,\sigma} + \alpha_{L,\sigma} = 1$ dès que $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\rm int}$.
Le choix du décentrement amont consiste à prendre, modulo l'indétermination non gênante dont nous avons parlé en remarque 3.2, $\alpha_{K,\sigma} = 1$ si $v_{K,\sigma} \ge 0$ et $\alpha_{K,\sigma} = 0$ dans le cas contraire.
Le choix centré consiste à prendre $\alpha_{K,\sigma} = \frac{1}{2}$ pour tout $K \in \mathcal{T}$ et tout $\sigma \in \mathcal{E}_K$.

L'obtention d'estimations a priori sur les solutions du système linéaire (3.28)—(3.30) se fait en le comparant au système (3.3)—(3.5).

Proposition 3.3 *Soit $\zeta > 0$ tel que le maillage $\mathcal{M}$ vérifie: pour tout $K \in \mathcal{T}$, pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_K$, $d_{K,\sigma} \ge \zeta d_\sigma$. Il existe $h_0 > 0$ et C ne dépendant que de $||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N}$, Ω et ζ tel que, si $h_\mathcal{T} \le h_0$, toute solution $u_\mathcal{T}$ de (3.28)—(3.30) avec un second membre vérifiant (3.6) satisfait $||u_\mathcal{T}||_{1,\mathcal{M}} \le C\mathcal{N}(f_\mathcal{T}, G_\mathcal{M})$.*

Preuve de la proposition 3.3
On introduit le décentrement amont $u_{\sigma,+}$ de $u_\mathcal{T}$ comme défini dans (3.5). $u_\mathcal{T}$ vérifie alors, pour tout $K \in \mathcal{T}$,

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} v_{K,\sigma}u_{\sigma,+} + m(K)b_K u_K = m(K)f_K + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_K} m(\sigma)\left(G_{K,\sigma} + \frac{v_{K,\sigma}}{m(\sigma)}(u_{\sigma,+} - u_\sigma)\right),$$

c'est à dire une équation de la forme (3.3)—(3.5) où l'on a remplace $G_{K,\sigma}$ par $\widetilde{G}_{K,\sigma} = G_{K,\sigma} + \frac{v_{K,\sigma}}{m(\sigma)}(u_{\sigma,+} - u_\sigma)$.
Les flux $(v_{K,\sigma})_{K\in\mathcal{T},\,\sigma\in\mathcal{E}_K}$ étant conservatifs, ce second membre vérifie (3.6) et on a donc, par la proposition 3.2,

$$||u_\mathcal{T}||_{1,\mathcal{M}} \le C_1\mathcal{N}(f_\mathcal{T}, \widetilde{G}_\mathcal{M}),$$

où C_1 ne dépend que de $||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N}$, Ω et ζ.
Pour estimer $\mathcal{N}(f_\mathcal{T}, \widetilde{G}_\mathcal{M})$, on écrit

$$\begin{array}{l} \displaystyle\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_\sigma\left|G_{K,\sigma} + \frac{v_{K,\sigma}}{m(\sigma)}(u_{\sigma,+} - u_\sigma)\right|^2\right)^{1/2}\\ \displaystyle\quad\le\ \sqrt{2}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_\sigma G_\sigma^2\right)^{1/2} + \sqrt{2}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_\sigma\left(\frac{v_\sigma}{m(\sigma)}(u_{\sigma,+} - u_\sigma)\right)^2\right)^{1/2}. \end{array}$$

Comme $v_\sigma \le ||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N} m(\sigma)$ et $|u_{\sigma,+} - u_\sigma| \le D_\sigma u$ (car $(u_{\sigma,+}, u_\sigma) \in [u_K, u_L]$ si $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\rm int}$ et $(u_{\sigma,+}, u_\sigma) \in [0, u_K]$ si $\sigma \in \mathcal{E}_{\rm ext}\cap\mathcal{E}_K$), on peut écrire

$$\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_\sigma\left(\frac{v_\sigma}{m(\sigma)}(u_{\sigma,+} - u_\sigma)\right)^2\right)^{1/2} \quad\le\quad ||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} m(\sigma)d_\sigma(D_\sigma u)^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \quad ||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma^2 \tau_\sigma (D_\sigma u)^2 \right)^{1/2}$$
$$\leq \quad 2h_{\mathcal{T}} ||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N} ||u_{\mathcal{T}}||_{1,\mathcal{M}}.$$

Ainsi,

$$||u_{\mathcal{T}}||_{1,\mathcal{M}} \leq C_1 \sqrt{2} \mathcal{N}(f_{\mathcal{T}}, G_{\mathcal{M}}) + 2C_1 \sqrt{2} h_{\mathcal{T}} ||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N} ||u_{\mathcal{T}}||_{1,\mathcal{M}}.$$

Cette inégalité nous montre que le résultat de la proposition est valide avec $h_0 = 1/(4\sqrt{2}C_1 ||\mathbf{v}||_{(L^\infty(\Omega))^N})$ et $C = 2\sqrt{2}C_1$. ■

Muni de cette estimation conditionnelle (valable uniquement pour $h_{\mathcal{T}}$ petit), on obtient, exactement comme dans l'étude du système décentré amont, des résultats de convergence et d'estimation d'erreur pour les solutions de (3.28)—(3.30), à condition de supposer à chaque fois $h_{\mathcal{T}}$ assez petit.