



UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques appliquées et application des mathématiques

Méthodes numériques

pour la mécanique des milieux continus

présentée par

Serge DUMONT

Soutenue le 30 novembre 2007 devant le jury composé des professeurs :

Pierre Villon	Université Technologique de Compiègne	Président
Patrice Coorevits	Université de Picardie Jules Verne	Rapporteur
Olivier Goubet	Université de Picardie Jules Verne	Examineur
Ioan Ionescu	Université de Paris 13	Rapporteur
Frédéric Lebon	Université de Provence	Examineur
Olivier Millet	Université de La Rochelle	Rapporteur
Valérie Perrier	INPG	Rapporteur

à Agnès,

à Aurore, Anaïs

à Yvande, Miguel

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Olivier Goubet qui m'a énormément apporté depuis son arrivée à Amiens. Son immense culture scientifique, sa patience, ses encouragements ont été pour moi un moteur essentiel. J'apprécie également sa vision de la recherche, sa curiosité intellectuelle, le plaisir d'aller voir ailleurs, vers le monde industriel ou en dehors de son domaine principal. Sans parler des moments de franches rigolades. Je veux lui témoigner ici de ma gratitude et de ma profonde amitié.

Je voudrais également remercier Frédéric Lebon, qui fut il y a quelques années (11 ans déjà !) mon directeur de thèse, et qui a accepté de faire partie du jury. Les nombreuses discussions –pas toujours scientifiques d'ailleurs!– que nous avons régulièrement, à Amiens où à Marseille –Ah ! Les Goudes–, sa culture, sa gentillesse et sa disponibilité m'ont beaucoup apporté. Je lui en suis très reconnaissant.

Je voudrais également exprimer ici ma gratitude envers Pierre Villon qui a accepté de faire partie du jury. Je lui serai toujours reconnaissant d'avoir su me faire confiance en me proposant un problème très intéressant, au moment délicat où je sortais de mon travail de thèse.

Je remercie également et suis très honoré que Patrice Coorevits, Ioan Ionescu, Olivier Millet et Valérie Perrier aient accepté de rapporter ce travail, en cette période difficile de l'année où beaucoup de thèses et d'habilitations sont soutenues.

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein du LAMFA, Laboratoire Amiénois de Mathématiques Fondamentales et Appliquées, laboratoire dans lequel il règne une excellente ambiance. Que ferions-nous sans les discussions de la salle café !

Je voudrais également remercier les membres de l'équipe d'analyse, avec qui on a construit pas mal de choses ces derniers temps (projet ANR, projet Région, groupe de travail...). Pour cela, je leur en suis très reconnaissant.

Toujours au sein du LAMFA, je voudrais exprimer ici ma reconnaissance envers les secrétaires Isabelle Wallet et Christelle Calimez, ainsi que l'ingénieur système Laurent Renault qui font un travail formidable, en nous simplifiant grandement la vie au quotidien face aux problèmes ubuesques devant lesquels on peut se trouver parfois. Je suis également reconnaissant envers la Direction de la Recherche et de la Valorisation de l'université, où Stéphane Duez, Alexandre Dubois et Sandrine Lemaire entre autres arrivent encore à être disponibles malgré leur charge de travail. Il est fort probable que sans eux, certaines parties de ce mémoire n'auraient pu voir le jour.

Enfin, je remercie vivement ma famille pour le soutien qu'elle m'a apporté au cours de toutes ces années ; tout particulièrement Agnès pour m'avoir toujours entouré de beaucoup d'affection et m'avoir toujours supporté avec beaucoup de patience, ainsi que mes enfants Aurore et Anaïs. Qu'elles trouvent ici l'expression de tout mon amour. Ce mémoire leur est dédié.

Table des matières

I	Activités de Recherche	5
1	Introduction	7
2	Méthodes sans maillage	9
2.1	Méthodes sans maillage et conditions aux limites	9
2.1.1	Description de la problématique.	9
2.1.2	Domaines fictifs	10
2.1.3	Résultats numériques.	12
2.1.4	Formulation variationnelle non standard	13
2.1.5	Perspectives	16
2.2	Méthodes sans maillage, ondelettes et applications	16
2.2.1	Description de la problématique	17
2.2.2	Homogénéisation en élasticité plane.	20
2.2.3	Discrétisation de l'opérateur d'élasticité.	21
2.2.4	Résultats numériques, application à l'homogénéisation périodique	22
2.2.5	Directions de recherche	24
3	Autour de l'optimisation numérique	25
3.1	Introduction	25
3.2	Analyse et simulation numérique du comportement du sable	26
3.2.1	Vers un modèle de tas de sable (dune), en l'absence de sollicitation extérieure	26
3.2.2	La variante BCRE	34
3.2.3	Du modèle de BCRE au modèle de Prigozhin	35
3.2.4	Présentation et étude du modèle de Prigozhin	36
3.3	Assemblage par la mesure	44
3.3.1	Introduction	44
3.3.2	Description de la problématique	44
3.3.3	Méthode de résolution	45
3.3.4	Résultats numériques	46
3.3.5	Directions de recherche.	52
4	Propriétés qualitatives des équations aux dérivées partielles	53
4.1	Introduction	53

4.2	Propriétés qualitatives de l'attracteur de l'équation de Schrödinger	54
4.2.1	Description de la problématique.	54
4.2.2	Directions de recherche.	56
4.3	Calcul des solutions explosives aux bords d'équations non linéaires	57
4.3.1	Description de la problématique.	57
4.3.2	Directions de recherche.	59
II	Parcours professionnel	61
5	Parcours professionnel	63
5.1	Coordonnées	63
5.2	Parcours professionnel	63
5.3	Activités d'enseignement	64
5.4	Activités d'encadrement et de recherche	64
5.5	Valorisation, Relations avec le monde industriel et socio-économique	65
5.5.1	Projet GrainDeSable	65
5.5.2	Projet Tolérants	66
5.5.3	Projet Brancusi : Conditions aux bords explosives, soutenu par Egide (no. 08915PG)	66
5.5.4	Action intégrée : Dissipation et asymptotique, soutenue par le CNRS	66
5.5.5	Projet MASOH, soutenu par l'INRIA	66
5.5.6	GdR MeGe	67
5.5.7	Projet FLUPARTI	67
5.6	Responsabilités collectives	67
5.6.1	Commissions de spécialistes	67
5.6.2	Communication du laboratoire	67
5.6.3	Co-organisation de groupes de travail	67
5.6.4	Organisation de journées au sein du laboratoire	68
5.6.5	Divers	68
5.7	Rayonnement et récompenses	68
III	Liste de publications	68
6	Liste de Publications	69
6.1	Revue internationale à comité de lecture	70
6.2	Chapitres d'ouvrages	70
6.3	Revue nationale à comité de lecture	71
6.4	Articles soumis	71
6.5	Notes internes	71
6.6	Thèse	71
6.7	Articles en cours de rédaction	71

6.8 Communications avec actes	71
6.9 Communications sans acte ou avec actes à diffusion restreinte	72
6.10 Séjours à l'étranger	73
6.11 Séminaires sur invitation	73
7 Bibliographie	74

Première partie

Activités de Recherche

Chapitre 1

Introduction

Après avoir accompli ma thèse au sein du laboratoire de mécanique et génie civil (LMGC) de l'Université de Montpellier 2, j'assure depuis 1996 mes activités de recherche au sein du LAMFA, UPJV, CNRS UMR 6140, équipe Analyse Appliquée (A3). Je suis Maître de Conférences dans cette équipe depuis 1997.

Ces activités peuvent être scindées en trois parties :

1. Méthodes sans maillage et conditions aux limites et applications ;
2. Optimisation numérique, application à l'assemblage par la mesure et étude du comportement des matériaux granulaires ;
3. Propriétés qualitatives des équations aux dérivées partielles.

La diversité des thèmes que j'ai abordés pendant ces années et qui vont être développés dans ce document peuvent surprendre de prime abord. Cependant, le fil conducteur de mon travail de recherche a toujours été la compréhension de phénomènes physiques à l'aide de modèles aussi simples que possible, et l'analyse numérique de ces modèles. Ce travail se situe à l'interface entre la mécanique numérique et l'analyse numérique.

Au sortir de ma thèse, ma « spécialité » était l'utilisation des méthodes à base d'ondelettes pour la résolution de problèmes numériques en élasticité linéaire. Ce travail, effectué essentiellement avec Frédéric Lebon était notamment concentré autour de la prise en compte des conditions aux limites de type Dirichlet (chose qui n'est pas facile avec ce type de méthodes), avec pour champ d'applications l'homogénéisation.

Ensuite, après une certaine période de flottement où je me suis davantage occupé de questions pédagogiques, j'ai eu la chance de rencontrer Pierre Villon. Nous avons pu ainsi revoir totalement la question de la prise en compte des conditions aux limites avec les méthodes sans maillage, avec l'aide précieuse d'Olivier Goubet et de Tuong Ha-Duong sur les questions les plus théoriques. Ce travail constitue le premier chapitre de ce mémoire.

Indépendamment, j'ai travaillé avec Rejeb Hadiji et Patrick Courilleau, sur le problème des cristaux liquides et l'équation qui lui est attaché : l'équation de Ginzburg Landau. Même si ce travail n'est pas présenté dans ce mémoire, il concentre à lui seul tout ce qui m'a passionné par

la suite : origine directement physique de la problématique, optimisation (non convexe en l'occurrence), propriétés qualitatives des solutions de l'équation (et par là même retour à la physique du problème), collaboration entre personnes ayant des profils scientifiques différents (ici, théoriciens et numériciens).

Ce type de travail s'est poursuivi d'une part par l'action intégrée « Dissipation asymptotique » avec la FST de Marrakech, puis au sein du projet INRIA MASOH sur l'équation de Shrödinger (qui m'a valu par ailleurs sur le plan personnel de très agréables moments d'amitiés notamment à Marrakech et à Monastir). D'autre part, le même état d'esprit (collaboration entre théoriciens et numériciens) a mené le projet Brancusi avec l'Université de Craiova, sur la question des propriétés des solutions explosives d'une équation aux dérivées partielles non linéaires.

Ces travaux sont présentés dans la troisième partie de ce mémoire.

Ce type de collaboration a trouvé son apogée pour moi lorsque nous avons obtenu le soutien de l'ANR sur le projet Jeunes Chercheurs « Grain De Sable » dont je suis le coordinateur. L'intérêt de la problématique de ce projet est sa globalité, puisqu'il comprend de la modélisation de phénomènes physiques, l'étude théorique et numérique des équations ainsi obtenues, et le retour à l'expérience. Ce projet réunit des chercheurs mathématiciens spécialistes de l'analyse des équations aux dérivées partielles, des mathématiciens numériciens, et des mécaniciens ; je me place dans ces deux dernières catégories.

Enfin, j'ai pris grand plaisir à travailler avec des industriels, notamment avec Airbus. Leur approche pragmatique (parfois déconcertante pour nous !) et la difficulté que l'on a eu parfois à mettre en équations leurs problèmes qui semblaient si simples au départ a un côté extrêmement enrichissant.

Le problème de la modélisation du comportement d'un tas de sable et le problème de l'assemblage par la mesure sont détaillés dans le chapitre 2, intitulé « Autour de l'optimisation numérique ».

L'ensemble de mes activités autres que de recherche seront développées dans la deuxième partie de ce mémoire.

Chapitre 2

Méthodes sans maillage

2.1 Méthodes sans maillage et conditions aux limites

2.1.1 Description de la problématique.

La question ici est le développement de méthodes de type Galerkin pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Afin d'illustrer les différentes techniques, nous allons nous intéresser au problème modèle suivant, posé sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^2$, où Ω est un domaine borné, de frontière Γ régulière.

Soit $f \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in H^{1/2}(\Omega)$, trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.1)$$

La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée pour la résolution de ce type d'équations aux dérivées partielles. Elle présente plusieurs avantages. En effet, la connaissance de la valeur exacte de la solution aux noeuds permet un traitement simple des conditions aux limites. Son principe même permet son adaptation à tous les types de géométries, y compris les plus complexes. Par contre, le prix à payer pour utiliser cette technique est que la création du maillage reste très coûteuse et difficile, en dimension 3 notamment. De plus, la mise en oeuvre de méthode de raffinement local ou de remaillage n'est pas sans poser quelques problèmes (respect de critère de taille, détection des zones à raffiner, etc.). L'idée principale des techniques alternatives est alors de tenter de supprimer la notion de maillage [BBO03, BTV99].

Nous appellerons par la suite méthode sans maillage une méthode de Galerkin utilisant une base de l'espace d'approximation (qui va servir à approcher les solutions d'équations aux dérivées partielles) construite à partir de fonctions dont le support est inclus dans un domaine ayant une géométrie très simple (triangle, carré, disque en dimension 2) fixe et définie à l'avance. Entrent par exemple dans cette définition : les éléments diffus, la transformée en ondelettes, les polynômes orthogonaux ou même les éléments finis dont le maillage ne suit pas la frontière du domaine considéré.

Il surgit dès lors un nouveau problème qui est celui de la prise en compte des conditions aux limites de type Dirichlet.

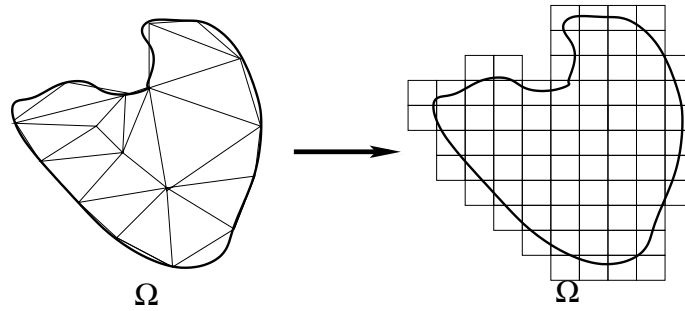


FIG. 2.1 – Illustration éléments finis / méthode sans maillage

En effet, l'écriture de la formulation variationnelle associée au problème (2.1) exige de prendre des fonctions tests dans $H_0^1(\Omega)$, qui s'annulent en particulier sur la frontière Γ , ce que nous ne désirons pas faire ici. Je travaille sur ce problème depuis ma thèse de doctorat. La stratégie classiquement utilisée pour résoudre ce problème consiste à adapter les fonctions de base dont les supports sont proches du bord du domaine, de telle sorte que ces fonctions gardent à la fois les propriétés des autres fonctions de base (par exemple pour les ondelettes : orthogonalité, relation d'échelle, etc.) mais de plus s'annulent sur le bord du domaine.

Malheureusement, dans la pratique, cette stratégie est très lourde à mettre en œuvre et n'est réalisable que sur des domaines dont la géométrie est très simple (rectangle).

2.1.2 Domaines fictifs

Afin d'éviter ces problèmes, nous avons développé au cours ma thèse une autre technique, fondée sur la notion de **domaine fictif**. Cette méthode consiste à plonger le domaine initial dans un nouveau domaine, plus grand et ayant une géométrie plus simple. Les conditions aux limites seront ensuite imposées par des techniques d'optimisation sous contraintes (voir [Glo95]).

Plus précisément, lorsque l'on veut résoudre (2.1) par ce type de méthode, on considère un domaine $\tilde{\Omega} \supset \Omega$ de géométrie très simple (un carré pour fixer les idées, comme illustré sur la figure 2.2).

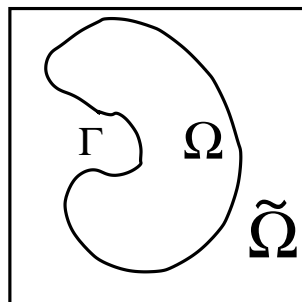


FIG. 2.2 – Exemple d'un domaine fictif

Prolongeons tout d'abord f définie sur $L^2(\Omega)$ en $\tilde{f} \in L^2(\tilde{\Omega})$, définie sur $\tilde{\Omega}$.

On écrit ensuite le problème de minimisation associé à (2.1), mais écrit sur $\tilde{\Omega}$, en considérant comme une contrainte la condition $u = u_0$ sur Γ .

Le problème devient : trouver $u \in H^1(\tilde{\Omega})$ minimisant

$$\inf\{J(u) : u|_{\Gamma} = u_0\}, \quad (2.2)$$

où

$$\begin{aligned} - J(u) &= \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla u|^2 dx - \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{f}u dx; \\ - u|_{\Gamma} &\text{ est l'opérateur trace de } H^1(\tilde{\Omega}) \text{ sur } H^{1/2}(\Gamma), \text{ qui est tel que} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b : H^1(\tilde{\Omega}) \times H^{1/2}(\Gamma)' &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, q) &\mapsto \langle v|_{\Gamma}, q \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)'} \end{aligned} \quad (2.3)$$

est bien défini. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)'}$ désigne le produit de dualité entre les deux espaces et sera noté simplement $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ par la suite.

La première solution pour résoudre (2.2) a été de prendre en compte les contraintes par une pénalisation [Wel95], en considérant le problème

$$\inf J_r(u), \quad (2.4)$$

où

$$\begin{aligned} - J_r(u) &= J(u) + \frac{r}{2} \|u|_{\Gamma} - u_0\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2; \\ - \text{le réel } r &\text{ est un paramètre de pénalisation, choisi suffisamment grand.} \end{aligned}$$

En notant u_r le minimum de ce problème, on peut montrer que la limite de u_r quand r tend vers l'infini est bien la solution du problème initial.

Ensuite, une méthode plus élaborée a été utilisée [Kun01, 8, 17]. Elle consiste à prendre en compte la contrainte sur Γ à l'aide de multiplicateurs de Lagrange [Ba73, Glo95]. Pour ce faire, on introduit le Lagrangien du problème

$$\begin{aligned} L : H^1(\tilde{\Omega}) \times H^{1/2}(\Gamma)' &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, p) &\mapsto L(v, p) = J(v) + \langle p, v - u_0 \rangle_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

ou le Lagrangien augmenté (afin d'améliorer le conditionnement du système [8]) :

$$\begin{aligned} L_r : H^1(\tilde{\Omega}) \times H^{1/2}(\Gamma)' &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, p) &\mapsto L_r(v, p) = J(v) + \langle p, v - u_0 \rangle_{\Gamma} + \frac{r}{2} \|v - u_0\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

La solution $(u, q) \in H^1(\tilde{\Omega}) \times H^{1/2}(\Gamma)'$ est alors le point selle de L_r :

$$L_r(u, q) = \inf_{v \in H^1(\tilde{\Omega})} \sup_{p \in H^{1/2}(\Gamma)'} L_r(v, p). \quad (2.7)$$

En écrivant l'équation d'Euler associée à ce point-selle, on obtient que la solution (u, q) est aussi solution du problème variationnel

$$\begin{cases} a_r(u, v) + b(v, q) = \ell(v) & \forall v \in H^1(\tilde{\Omega}) \\ b(u, p) = g(p) & \forall p \in H^{1/2}(\Gamma)' \end{cases} \quad (2.8)$$

où

- $a_r(u, v) = \int_{\tilde{\Omega}} \nabla u \nabla v \, dx + r(u, v)_\Gamma$;
- $b(v, p) = \langle v, p \rangle_\Gamma$;
- $\ell(v) = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{f} v \, dx + r(u_0, v)_\Gamma$;
- $g(p) = \langle u_0, p \rangle_\Gamma$.

Il est alors classique de montrer ensuite que (2.8) est bien posé en montrant qu'il vérifie la condition inf-sup de Babuska-Brezzi [Ba73, Gris85]

$$\inf_{q \in H^{1/2}(\Gamma)'} \sup_{v \in H^1(\tilde{\Omega})} \frac{|b(v, q)|}{\|v\|_{H^1(\tilde{\Omega})} \|q\|_{H^{1/2}(\Gamma)'}} \geq \beta > 0. \quad (2.9)$$

Ceci a été fait dans le cas du problème (2.1) dans [Kun01], et dans le cas de l'élasticité plane dans [6, 8].

2.1.3 Résultats numériques.

Tous les résultats présentés ici ont été réalisés en dimension 2. Dans [Kun01] et [Wel95], les calculs ont été effectués sur le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (2.10)$$

où Ω est un disque centré en $(1/2, 1/2)$ de rayon R .

Dans [8], nous avons considéré le système de l'élasticité plane avec des conditions aux limites de Dirichlet, sur un domaine identique au précédent.

- Dans [Wel95], si $R = \frac{1}{6}$, on trouve une erreur $L^2(\Omega)$ entre la solution exacte et la solution approchée de l'ordre de 10^{-4} si le paramètre de pénalisation r est égal à 1, de l'ordre de 10^{-5} si $r = 10^6$.

Dans ce travail, le nombre de degré de liberté est de 1225.

- Dans [6, 8, Kun01] l'erreur $L^2(\Omega)$ commise est de l'ordre de 10^{-5} lorsque le nombre de degré de liberté est de 1024 (le pas h est alors de 0,05), en prenant $R = 0.4$, et quand la solution est très régulière (polynomiale).

On voit ici le défaut de cette méthode : il faut un grand nombre de degré de liberté pour obtenir une précision raisonnable, et une bonne partie de ces degrés de liberté n'apporte pas une information intéressante (les multiplicateurs sur la frontière Γ ainsi que la solution dans $\tilde{\Omega} - \Omega$).

De plus, la détermination du point selle du Lagrangien par la méthode d'Uzawa est bien moins rapide que la méthode du gradient conjugué pour un système linéaire dont la matrice serait symétrique définie positive. Ceci allonge d'autant plus le temps de calcul.

Nous avons alors recherché une nouvelle méthode pouvant répondre à ces deux problèmes. La technique proposée dans le paragraphe suivant consiste à introduire les conditions de Dirichlet dans la formulation variationnelle (au lieu de les considérer dans l'espace fonctionnel comme on le fait habituellement).

2.1.4 Formulation variationnelle non standard

Aux alentours des années 2000, après des discussions avec Pierre Villon, nous avons développé une méthode originale. Afin d'explicitier cette technique, nous allons considérer dans ce paragraphe le problème suivant :

Soit Ω un ouvert borné suffisamment régulier de \mathbb{R}^N . Soit une partition du bord $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ telle que la mesure $N - 1$ dimensionnelle de Γ_D soit non nulle.

Étant donné (f, u_0, g) , trouver u tel que

$$\begin{cases} (1) & -\Delta u = f & \text{si } x \text{ dans } \Omega \\ (2) & u = u_0 & \text{si } x \text{ sur } \Gamma_D \\ (3) & \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{si } x \text{ sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (2.11)$$

Nous supposons que f est dans $L^2(\Omega)$, et que u_0 et g sont les traces de fonctions suffisamment régulières vérifiant certaines conditions de compatibilité sur $\overline{\Gamma_D} \cap \overline{\Gamma_N}$ de telle sorte que la solution u soit dans $H^2(\Omega)$. Nous discuterons de ces conditions par la suite. Pour plus de détails sur ce point, se référer à [Gris85].

Principe

Écrivons la formulation faible associée à ce problème. Ne désirant pas avoir des fonctions de base s'annulant sur le bord de Ω , nous sommes donc amené ici à prendre des fonctions tests non nulles sur Γ_D .

Considérons donc une fonction test v dans $H^2(\Omega)$, alors (2.11-1) entraîne, par la formule de Green

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.12)$$

On voudrait ensuite utiliser

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds, \quad (2.13)$$

mais ceci n'est pas vrai en général, même si u et v sont régulières. On peut néanmoins écrire cette égalité par exemple si

- $\overline{\Gamma_D} \cap \overline{\Gamma_N} = \emptyset$. Par exemple dans le cas où $\Gamma_N = \emptyset$ (condition de Dirichlet pure) ou si Ω est un anneau de \mathbb{R}^2 ;
- Dans le cas où la trace de u et de v sur Γ_D est dans l'espace $H_{00}^{1/2}(\Gamma_D)$. Cet espace est le sous espace de $H^{1/2}(\Gamma_D)$ des fonctions qui, prolongées par 0 sur Γ_N sont des fonctions de $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

De même, les traces de u et v sur Γ_N doivent être dans l'espace $H_{00}^{1/2}(\Gamma_N)$ (cf. [Gris85, Wen79]).

Ceci impose en particulier aux fonctions de base de s'annuler à l'interface entre Γ_D et Γ_N . Nous verrons par la suite que nous nous sommes affranchis de cette restriction dans les essais numériques, sans perte de qualité d'approximation de la solution.

Par la suite, l'espace variationnel considéré sera donc (γ_D et γ_N représentent respectivement les traces sur Γ_D et Γ_N)

$$V = \{v \in H^1(\Omega), \Delta v \in L^2(\Omega), \gamma_D(v) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_D), \gamma_N(v) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_N)\}. \quad (2.14)$$

où l'égalité

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds = \int_{\Gamma_N} g v ds + \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v ds \quad (2.15)$$

devient licite.

Ensuite, sachant que $u = u_0$ sur le bord Γ_D , on peut introduire les conditions de Dirichlet dans la formulation variationnelle en écrivant, pour tout $v \in V$

$$\int_{\Gamma_D} (u - u_0) \frac{\partial v}{\partial n} ds = 0 \quad (2.16)$$

ce qui amène à considérer la formulation variationnelle non standard

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma_D} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v + u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_N} g v \, ds - \int_{\Gamma_D} u_0 \frac{\partial v}{\partial n} \, ds \quad (2.17)$$

On notera par la suite $\beta(u, v)$ la partie gauche et $\Lambda(v)$ la partie droite de l'égalité ci-dessus.

Il est classique de montrer ensuite une proposition telle que la suivante

Proposition 1 *Supposons la formulation (2.17) vraie pour tout v dans V . Alors le problème (2.11) est équivalent à la formulation variationnelle (2.17). Par suite, la formulation variationnelle non standard admet une unique solution.*

Nous avons déjà montré que (2.11) implique (2.17). La démonstration de la réciproque de cette propriété est classique et se montre en deux temps. Prendre tout d'abord une fonction test nulle sur le bord $\partial\Omega$ pour montrer que (2.17) implique (2.11-1), puis montrer ensuite que l'on a les conditions aux limites (2.11-1) et (2.11-2).

Remarques :

- La forme bilinéaire β et la forme linéaire Λ sont continues sur V , mais pas sur $H^1(\Omega)$ contrairement à la formulation variationnelle standard. De plus, β n'est pas définie positive (mais elle reste symétrique). En effet $\beta(1, 1) = 0$. Nous reviendrons sur ce point et sur ces conséquences plus tard.
- Cette formulation variationnelle est connue depuis longtemps [Nit74] mais jusqu'à présent on rajoutait un terme de pénalisation du type

$$r \int_{\Gamma_D} uv \, ds$$

où r est suffisamment grand afin d'assurer à nouveau la positivité de la forme bilinéaire.

- Il existe un autre domaine où il est utilisé une formulation variationnelle du même type que (2.17). Il s'agit des méthodes de Galerkin discontinues. Ces méthodes, fondées sur les éléments finis, permettent à la solution d'être discontinue d'un élément à l'autre [Prud02].

On écrit alors une formulation identique à (2.17) sur chaque élément du maillage. Dans cette technique, il est plutôt utilisé la version non symétrique

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma_D} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_N} g v \, ds + \int_{\Gamma_D} u_0 \frac{\partial v}{\partial n} \, ds \quad (2.18)$$

afin d'assurer la positivité de la forme bilinéaire (mais pas le caractère défini positif).

Résultats numériques

On a montré qu'en dimension 1 et 2, la méthode est consistante (voir [3, 9]), au sens où si la solution de l'équation aux dérivées partielles est dans l'espace d'approximation, alors la résolution du problème discrétisé permet de retrouver exactement cette solution.

On a de plus montré que le comportement de l'erreur en fonction du pas de discrétisation est le même que dans le cas d'une discrétisation avec des éléments finis et une discrétisation classique, que ce soit dans le cas où la solution est régulière (voir figure 2.3) comme dans le cas où la solution présente une couche limite (voir figure 2.4), et ceci indépendamment de la géométrie du domaine Ω .

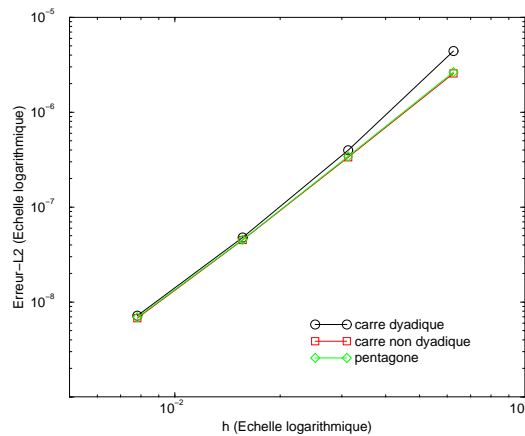


FIG. 2.3 – Convergence lorsque le second membre est une fonction régulière

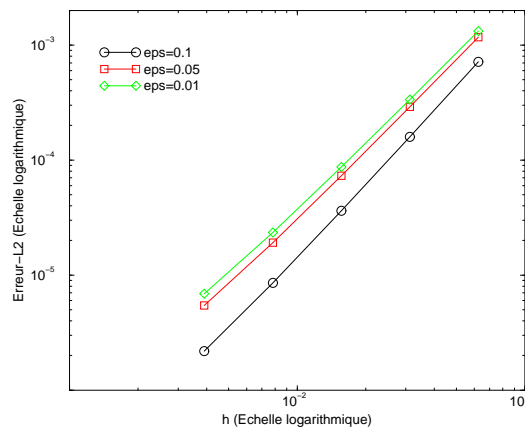


FIG. 2.4 – Convergence lorsque la solution présente une couche limite

Nous avons également étudié les valeurs propres et le conditionnement de la matrice de rigidité après discrétisation et n'avons pas noté de différences notables avec une discrétisation par éléments finis standard.

Dans [12], nous avons également utilisé avec succès cette méthode dans le cas où les fonctions de base sont des polynômes de Legendre.

2.1.5 Perspectives

Nous savons d'ores et déjà montrer que en dimension 1, cette formulation permet d'écrire un problème discrétisé ayant les bonnes propriétés. C'est à dire que si on considère un espace d'approximation $V_h \subset V$ de dimension fini, indicé par le réel h qui représente le pas de discrétisation, et ayant de bonnes propriétés d'approximation (conditions de Strang et Fix), alors on peut montrer que le problème "trouver u_h dans V_h tel que

$$\beta(u_h, v_h) = \Lambda(v_h) \quad (2.19)$$

pour tout $v_h \in V_h$ " admet une unique solution u_h (au moins pour h suffisamment petit), et la solution u_h tend vers la solution u du problème initial u lorsque h tend vers 0. Malheureusement, en dimension supérieure, on ne sait pas encore montrer de tels résultats, même si les résultats numériques semblent indiquer qu'il en est ainsi.

Par contre, il est aisé de voir que si on considère E_h , le sous espace vectoriel de V_h engendré par les fonctions v_h qui ont un support strictement inclus dans Ω (et qui par conséquent s'annulent sur Γ_D), alors, sur cet espace, la matrice associée à β est symétrique définie positive.

Ensuite, nous avons pu vérifier que dans un certain nombre d'exemples (avec une certaine géométrie, et avec certaines fonctions de base) alors la matrice issue de la discrétisation de β sur V_h est inversible.

Plus précisément, en écrivant $V_h = V_h + W_h$, où W_h est l'ensemble des fonctions de V_h qui ne s'annulent pas sur Γ_D , alors β vérifie la condition inf-sup discrète

$$\inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in W_h} \frac{\beta(v_h, w_h)}{|v_h||w_h|} \geq \beta_h > 0. \quad (2.20)$$

Malheureusement, nous ne savons pas encore montrer que cette propriété est vraie en toute généralité. Je travaille toujours sur cette problématique, notamment avec Pierre Villon (laboratoire Roberval, U.T. Compiègne) et Marc Dambrine (Laboratoire LMAC, U.T. Compiègne) qui encadrent Gaël Dupire, étudiant en thèse sur ce sujet.

2.2 Méthodes sans maillage, ondelettes et applications

Dans ce paragraphe, nous allons montrer comment nous avons mis en œuvre une méthode basée sur la transformée en ondelettes pour la résolution du problème en élasticité linéaire [6]. Ce travail, qui a débuté lors de ma thèse [17] nous a permis de traiter des problèmes d'homogénéisation en élasticité [7]. Nous avons pu ensuite nous intéresser à l'étude de deux problèmes originaux :

- l’influence des interfaces entre les différents composants d’un composite sur la rigidité globale de celui-ci [11, 5]. La difficulté numérique principale est ici la différence de taille importante entre les différents composants d’une part et les interfaces d’autre part. Une méthode classique fondée sur les éléments finis aurait été plus difficile à mettre en œuvre à cause des problèmes de maillage de la structure.
- Les matériaux aléatoires [10, 13]. Le comportement des matériaux hétérogènes est généralement défini à partir de bornes (Hashin-Shtrikman, schéma self-consistant, etc.). Malheureusement, cette définition n’est pas très intéressante lorsque l’on considère des matériaux comme le béton ou la terre, car dans ce cas la localisation de chaque composant est mal connue. Pour cela, nous avons effectué une étude statistique à l’aide de notre méthode numérique pour des composites de type résine-verre et aluminium-carbure de silicium ce qui nous a permis d’obtenir d’autres paramètres plus pertinents, de type valeur moyenne et écart type. Ce travail nous permet d’envisager maintenant d’étudier des matériaux ayant un comportement non linéaire, de type élasto-plastique par exemple.

2.2.1 Description de la problématique

Nous allons commencer ce paragraphe par la description de la transformée en ondelettes et de sa mise en œuvre pour la résolution de problèmes d’homogénéisation en élasticité linéaire. Ces travaux ont fait l’objet d’une publication [8], et les applications de cette méthode à l’homogénéisation périodique ont été publiées dans divers articles [10, 11, 5, 7, 13].

La théorie des ondelettes est récente : les premiers résultats datent du début des années 80. Elle est utilisée dans plusieurs domaines (traitement du signal ou de l’image, mécanique des fluides, statistiques, électromagnétisme), même si c’est dans le traitement de l’image qu’elle a enregistré ses plus beaux succès (avec la norme JPEG 2000 notamment).

Par conséquent, il n’existe pas une seule transformée en ondelettes, mais plusieurs, chacune étant adaptée à un domaine d’application particulier. Pour ce qui est de la résolution d’équations aux dérivées partielles, on utilise la transformée discrète en ondelettes, c’est à dire que l’on définit un espace d’approximation à l’aide d’une base de fonctions dont on va décrire les propriétés ci-dessous.

De plus, grâce à la localisation des ondelettes, à la fois dans l’espace physique mais aussi dans l’espace spectral, la matrice de rigidité que l’on obtient après discrétisation est d’un conditionnement convenable, ce qui permet une résolution des systèmes linéaires relativement rapide. Cette méthode peut aussi être vue comme un compromis entre la méthode des éléments finis et la transformée de Fourier.

Tout d’abord, nous allons décrire brièvement la transformée d’ondelettes de Daubechies. Soit M un entier naturel. Alors il existe une suite de réels $(h_n)_n$ pour $n = 0, \dots, 2M - 1$, une fonction φ appelée la fonction d’échelle et une fonction ψ appelée l’ondelette associée telles que

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=0}^{2M-1} h_n \varphi(2x - n) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \psi(x) &= \sum_{n=0}^{2M-1} g_n \psi(2x - n) & \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.21}$$

où $g_n = (-1)^n h_{2M-1-n}$ pour $n = 0, \dots, 2M - 1$.

Ces fonctions φ et ψ ont les propriétés :

- φ et ψ sont orthogonales, c'est à dire que $(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\psi(x) dx = 0$;
- Les supports de φ et ψ sont inclus dans l'intervalle $[0, 2M - 1]$;
- Soient, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$

$$\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k); V_j = \text{vect}\{\varphi_{jk}, k \in \mathbb{Z}\};$$

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k); W_j = \text{vect}\{\psi_{jk}, k \in \mathbb{Z}\};$$
alors les fonctions φ_{jk} et ψ_{jk} vérifient, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

$$(\varphi_{jk}, \varphi_{j\ell}) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{jk}(x)\varphi_{j\ell}(x) dx = \delta_{k\ell} \quad (2.22)$$

$$(\psi_{jk}, \psi_{i\ell}) = \int_{\mathbb{R}} \psi_{jk}(x)\psi_{i\ell}(x) dx = \delta_{ij}\delta_{k\ell}. \quad (2.23)$$

La relation (2.22) signifie que la famille $(\varphi_{jk})_k$ forme une base orthonormée de l'espace V_j , pour tout j . La relation (2.23) entraîne que la famille $(\psi_{jk})_k$ forme une base orthonormée de l'espace W_j , pour tout j , et les espaces W_j sont deux à deux orthogonaux. De plus, nous avons les propriétés :

$$\begin{aligned} V_j &\subset V_{j+1}, & V_{j+1} &= V_j \oplus W_j, \\ \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} &= \{0\}, & L^2(\mathbb{R}) &= \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

L'ensemble des espaces emboîtés $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ s'appelle une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. Pour plus de détails sur le sujet, voir [BCR91, DK92, M89].

Remarquons ici que la fonction d'échelle et l'ondelette associée ne sont connues que de façon implicite, via la relation d'échelle (2.21), et par la seule connaissance des filtres h et g .

On peut ensuite obtenir une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^2)$ en considérant des produits tensoriels (en considérant $x = (x_1, x_2)$ un point de \mathbb{R}^2) :

$$\begin{aligned} \Phi_{jk}(x) &= \varphi_{jk_1}(x_1)\varphi_{jk_2}(x_2) \\ \Psi_{jk}^1(x) &= \varphi_{jk_1}(x_1)\psi_{jk_2}(x_2) \\ \Psi_{jk}^2(x) &= \psi_{jk_1}(x_1)\varphi_{jk_2}(x_2) \\ \Psi_{jk}^3(x) &= \psi_{jk_1}(x_1)\psi_{jk_2}(x_2). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Le défaut principal des ondelettes de Daubechies est qu'elles ne sont pas symétriques, ni très régulières. Si l'on souhaite utiliser des ondelettes de Daubechies régulières, le prix à payer est la taille du support de ces fonctions, qui devient grande. On leur préfère donc souvent les ondelettes B-splines qui ne sont plus orthogonales mais bi-orthogonales. Elles peuvent être définies de la façon suivante :

- Soient deux suites d'espaces emboîtés :

$$\begin{aligned} \dots &\subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \\ \dots &\subset \tilde{V}_{-2} \subset \tilde{V}_{-1} \subset \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}_2 \subset \dots \end{aligned}$$

- soit, pour chaque j , W_j (resp. \tilde{W}_j) le complémentaire de V_j dans V_{j+1} (resp. \tilde{V}_j dans \tilde{V}_{j+1} , tels que

$$V_j \perp \tilde{W}_j \quad \tilde{V}_j \perp W_j$$

- Nous avons donc maintenant deux fonctions d'échelle (φ et $\tilde{\varphi}$) ainsi que deux ondelettes associées (ψ et $\tilde{\psi}$) telles que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \tilde{\varphi}(x-k) dx &= \delta_{0k} & \forall k \in \mathbb{Z} \\
\int_{\mathbb{R}} \psi(x) \tilde{\psi}(x-k) dx &= \delta_{0k} & \forall k \in \mathbb{Z} \\
\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \tilde{\psi}(x-k) dx &= 0 & \forall k \in \mathbb{Z} \\
\int_{\mathbb{R}} \psi(x) \tilde{\varphi}(x-k) dx &= 0 & \forall k \in \mathbb{Z}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

- Une fonction f est alors décomposée à l'aide des coefficients

$$s_{j_0 k} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi_{j_0 k} dx \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$d_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi_{jk} dx \quad \forall j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}.$$

et

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{j_0 k} \tilde{\varphi}_{j_0 k}(x) + \sum_{j \geq j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{jk} \tilde{\psi}_{jk}(x).$$

Les coefficients ($s_{j_0 k}$) sont appelés coefficients d'approximation de f . Ils donnent une première approximation de f avec une précision de l'ordre de 2^{-j_0} autour du point $x = 2^{-j_0} k$. Les coefficients (d_{jk}) sont appelés coefficients de détail et donnent une approximation plus précise de f (d'une précision de l'ordre de 2^{-j}) autour du point $x = 2^{-j} k$.

- Par conséquent, quatre filtres sont nécessaires :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sqrt{2} \sum_{n=0}^N h_n \varphi(2x-n); \\
\psi(x) &= \sqrt{2} \sum_{n=0}^N g_n \varphi(2x-n); \\
\tilde{\varphi}(x) &= \sqrt{2} \sum_{n=0}^N \tilde{h}_n \tilde{\varphi}(2x-n); \\
\tilde{\psi}(x) &= \sqrt{2} \sum_{n=0}^N \tilde{g}_n \tilde{\varphi}(2x-n).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Commentaires :

- La fonction φ est souvent une B-spline. Dans ce cas, on définit la B-spline d'ordre N comme étant N convolutions de la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, 1]$. La B-spline d'ordre 2 est alors un élément fini P1. Nous utiliserons par la suite plutôt une B-spline d'ordre 3, qui est comparable à des éléments finis P2. Le support de cette fonction est inclus dans l'intervalle $[0, 3]$, cette fonction est symétrique et différentiable.
- Le choix de \tilde{N} , la taille du filtre \tilde{h} est plus difficile. Plus \tilde{N} est grand, plus la fonction d'échelle duale $\tilde{\varphi}$ et l'ondelette duale $\tilde{\psi}$ sont régulières. Mais alors, le support de ces fonctions devient également plus grand. Généralement, afin que toutes les fonctions de base aient la même régularité, il est classique de prendre \tilde{N} de l'ordre de $1, 5 \times N$.

Il reste encore à étudier comment se fait la discrétisation de l'opérateur d'élasticité, dans le cas de l'élasticité plane. Avant cela, nous allons faire une brève présentation du problème que nous allons étudier par la suite, à savoir l'homogénéisation périodique en élasticité plane.

2.2.2 Homogénéisation en élasticité plane.

Nous allons considérer ici un matériau hétérogène constitué de deux phases (pour simplifier), chacune des phases étant un matériau élastique homogène et isotrope. Une première étape d'homogénéisation est tout d'abord réalisée, consistant à déterminer les propriétés effectives d'un matériau homogène équivalent.

Soit un matériau composite plan et périodique Ω (échelle macroscopique, variable x), qui a pour périodicité une cellule de base Y (échelle microscopique, variable y). La taille de Y est comparable à un paramètre ε . Nous supposons que les interfaces entre les différents éléments du composite sont parfaites.

Les coefficients d'élasticité C_{ijkl}^ε du composite sont supposés périodiques, de période Y . On suppose que la frontière $\partial\Omega$ du composite se décompose en deux parties : $\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$ avec $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset$. Une force de traction est appliquée sur la partie $\partial_1\Omega$, et un déplacement nul est imposé sur la partie $\partial_2\Omega$ (voir figure 2.5).

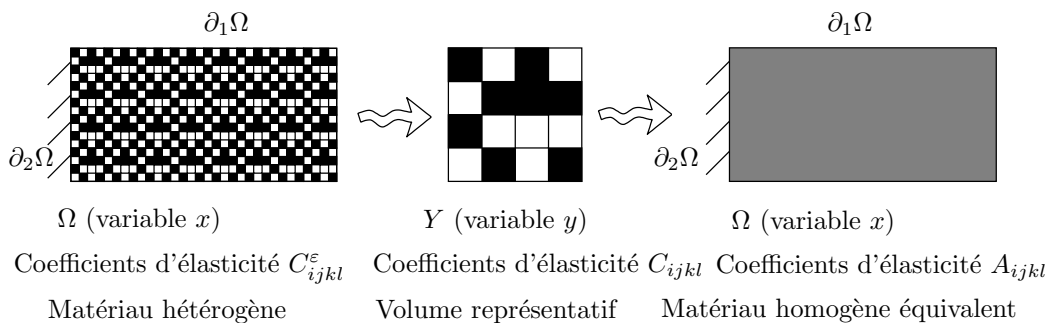


FIG. 2.5 – Le processus d'homogénéisation

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, le calcul du déplacement en chaque point du composite peut s'écrire :

Problème (P_ε) : Trouver $u^\varepsilon \in V$ tel que

$$a_\varepsilon(u^\varepsilon, v) = L(v), \quad (2.28)$$

pour tout v dans V , où $a_\varepsilon = \int_\Omega C_{ijkl}^\varepsilon e_{kl}(u) e_{ij}(v) dx$, $e_{kl}(u) = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k})$ représente le tenseur des déformations, $L(v) = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial_1\Omega} F v dl$ et $V = \{v \in (H^1(\Omega))^2, v = 0 \text{ sur } \partial_2\Omega\}$ est l'espace des champs cinématiquement admissibles.

Lorsque la taille de la cellule de base Y tend vers 0 (ce qui s'écrit $\varepsilon \rightarrow 0$), il est bien connu que la solution u^ε du problème (2.28) tend vers la solution u du problème

Problème (P) : Trouver $u \in V$ tel que

$$a(u, v) = L(v), \quad (2.29)$$

pour tout v dans V , où $a = \int_{\Omega} A_{ijkl} e_{kl}(u) e_{ij}(v) dx$, avec $A_{ijkl} = \frac{1}{|Y|} \int_Y (C_{ijkl} + C_{ijpq} e_{pq}(u^{kl})) dy$.

Afin de déterminer les déplacements u^{kl} il est nécessaire de résoudre trois problèmes sur la cellule de base Y , du type

Problème (P_Y) : Soit E^{kl} donné, trouver $u^{kl} \in H$ tel que

$$a_Y(u^{kl}, v) = l(v) \quad \forall v \in H, \quad (2.30)$$

où $a_Y(u, v) = \int_Y C_{klst}(y) e_{kl}(u) e_{st}(v) dy$ et $l(v) = - \int_Y C_{klst}(y) E^{kl} e_{st}(v) dy$.

2.2.3 Discrétisation de l'opérateur d'élasticité.

Nous allons maintenant voir comment discrétiser le problème (P_Y) à l'aide de la transformée en ondelettes. Nous allons décrire la méthode avec les ondelettes de Daubechies parce que cela est plus simple, mais le principe est le même pour les ondelettes bi-orthogonales. La méthode est classique et a été décrite précisément pour le cas de l'élasticité dans plusieurs articles [9, 11, 5, 6, 7, 8, 17].

Plus précisément, une approximation de la solution u du problème (P_Y) peut être cherchée sous la forme

$$u(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} u_{jk} \Psi_{jk}(y) \quad (2.31)$$

pour tout point y de la cellule Y , où $\Psi_{jk}(y) = 2^j \Psi(2^j y - k)$ est une ondelette (ou une fonction d'échelle) localisée autour du point $y = 2^{-j} k$. Puisque l'ondelette est à support compact, la somme précédente peut être écrite sur un nombre fini de points de \mathbb{Z}^2 , que nous appellerons Λ_j . En utilisant des fonctions tests v du même type, la projection de l'opérateur d'élasticité $a(u, v) = \int_Y C e(u) : e(v) dy$ est une matrice \mathcal{K} définie par

$$[\mathcal{K}] = [\mathcal{K}_{il}]_{il \in \Lambda_j}, \quad (2.32)$$

où \mathcal{K}_{il} est une matrice élémentaire 2×2 :

$$\mathcal{K}_{il} = \begin{bmatrix} F_{11}^{11} + F_{22}^{33} & F_{12}^{12} + F_{21}^{33} \\ F_{21}^{12} + F_{12}^{33} & F_{22}^{22} + F_{11}^{33} \end{bmatrix},$$

avec $F_{\eta\xi}^{\alpha\beta} = \int_Y C_{\alpha\beta}(x) \Psi_{ji,\eta}(y) \Psi_{j\ell,\xi}(y) dy$.

Puisque les coefficients $C_{\alpha\beta}$ sont constants par morceaux (constants sur chacun des matériaux), nous pouvons décomposer ces fonctions à l'aide de la fonction d'échelle de Haar

$$\theta(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on peut alors écrire $C_{\alpha\beta}$ (nous allons omettre α et β dans la suite) :

$$C(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} C_n \Theta_{jn}(y)$$

où $\Theta_{jn}(y) = 2^j \theta(2^j y_1 - n_1) \theta(2^j y_2 - n_2)$. Les éléments de la matrice de rigidité sont des coefficients du type

$$\int_Y \Theta_{jn}(y) \Psi_{jk,\eta} \Psi_{j\ell,\xi}(y).$$

Le principal intérêt de cette méthode, c'est qu'en utilisant la relation d'échelle (2.21), ces coefficients sont calculés une fois pour toute, de façon exacte, par la diagonalisation d'une matrice de petite dimension (voir [Bey92, 6, 8, 17]).

Grâce à la forme particulière des bases d'ondelettes, et notamment grâce à son caractère multi-niveau, la matrice de rigidité de l'opérateur discrétisé prend la forme montrée dans la figure 2.6. Une méthode multigrilles est particulièrement adaptée à la résolution numérique des systèmes linéaires avec ce type de matrice.

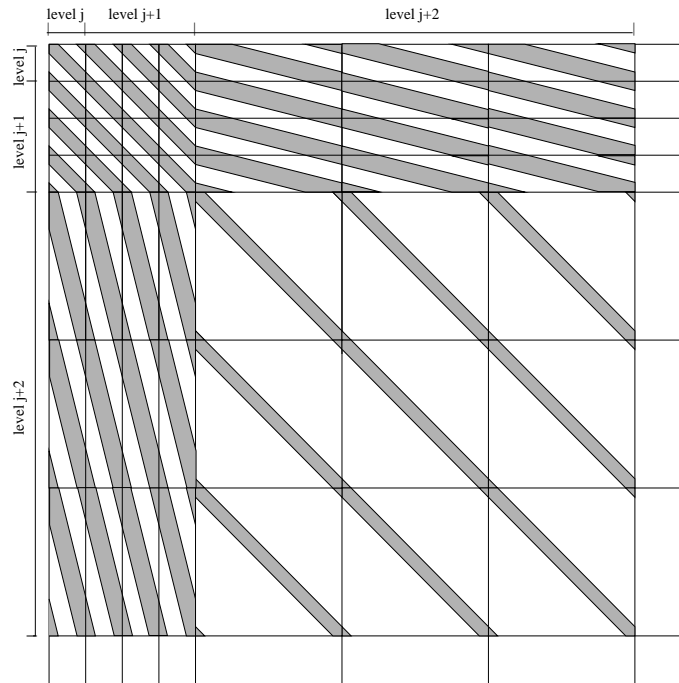


FIG. 2.6 – Forme particulière de la matrice de rigidité discrétisée par une transformée en ondelettes

2.2.4 Résultats numériques, application à l'homogénéisation périodique

Nous allons présenter maintenant certains résultats que nous avons pu obtenir avec cette méthode. Après avoir effectué des expériences numériques sur des composites constitués d'une matrice et d'inclusions ayant un important rapport de taille [7], nous avons également étudié l'influence du comportement des interfaces entre la matrice et les inclusions sur la rigidité globale du matériau homogène équivalent [11, 5].

Nous allons présenter ici un autre type de résultat que nous avons pu obtenir. Ce travail a fait l'objet d'un article qui a été soumis [13]. Cette étude est consacrée à la détermination des propriétés statistiques de matériau que nous appellerons imparfaitement définis, et dont la microstructure est définie de façon aléatoire.

Ce type de matériau (comme le béton ou les sols) fait l'objet de nombreuses études. Généralement, les caractéristiques de ces matériaux sont décrites à l'aide de bornes (de Hashin et Shtrikman [HH63] par exemple). Dans un célèbre article, Torquato [To91] a montré que l'on pouvait en décrire le comportement par des informations stochastiques, à l'aide de fonctions de corrélation notamment.

Ici, nous montrons numériquement que si les composants du matériau sont tous linéaires homogènes et isotropes, et s'ils sont répartis aléatoirement dans la cellule de base, alors, pour un grand nombre de tirage, le matériau « moyen », obtenu en moyennant sur l'ensemble des tirages les matrices de rigidité A obtenues en résolvant le problème (P_Y) , est un matériau linéaire homogène et isotrope dont nous donnons les caractéristiques mécaniques.

Plus précisément, prenons le cas d'un composite Aluminium/Carbure de Silicium. Nous supposons que la cellule de base (carré) est constituée d'un certain nombre de pixels (également carré). Sur chaque pixel, on tire aléatoirement (à pile ou face) si le matériau sur ce pixel est de l'aluminium ou du carbure de silicium, sachant que globalement, la proportion entre les deux composants est fixée à l'avance.

La cellule de base Y étant ainsi définie, on effectue une étape d'homogénéisation, ce qui nous donne les propriétés mécaniques du matériau homogène équivalent. Ce matériau n'est bien évidemment pas homogène ni isotrope.

Toutefois, si on reproduit un grand nombre de fois cette expérience, et si on fait la moyenne des résultats obtenus, on obtient un matériau qui est homogène isotrope. On peut alors comparer les propriétés de ce matériau « moyen » aux bornes classiques que l'on peut trouver dans la littérature (voir figure 2.7 et 2.8).

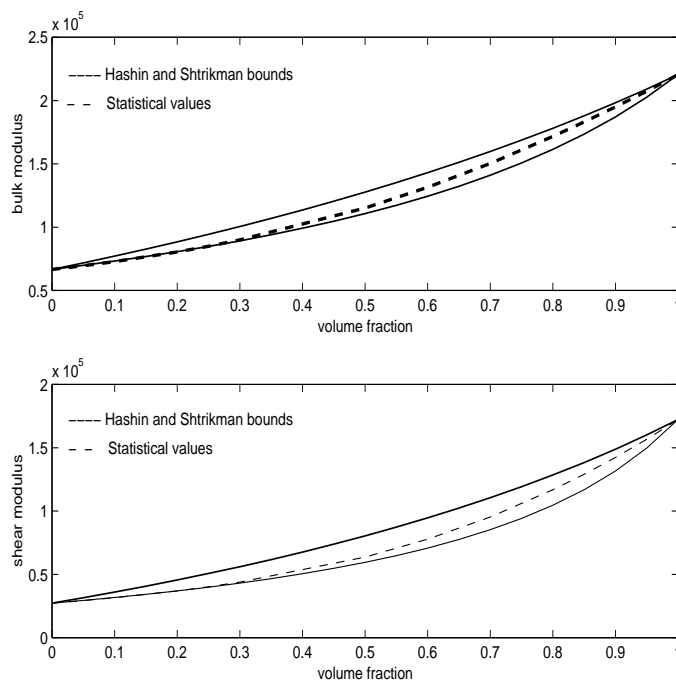


FIG. 2.7 – Modules de rigidité et de cisaillement en fonction de la fraction volumique (composite Al/SiC)

On peut observer que pour des faibles fractions volumiques d'aluminium (inférieures à 35 %), le matériau « moyen » a les mêmes propriétés que la plus petite des bornes de Hashin et Shtrikman, alors que pour des fractions volumiques plus grandes, ce matériau a des propriétés qui se situent au milieu de ces bornes.

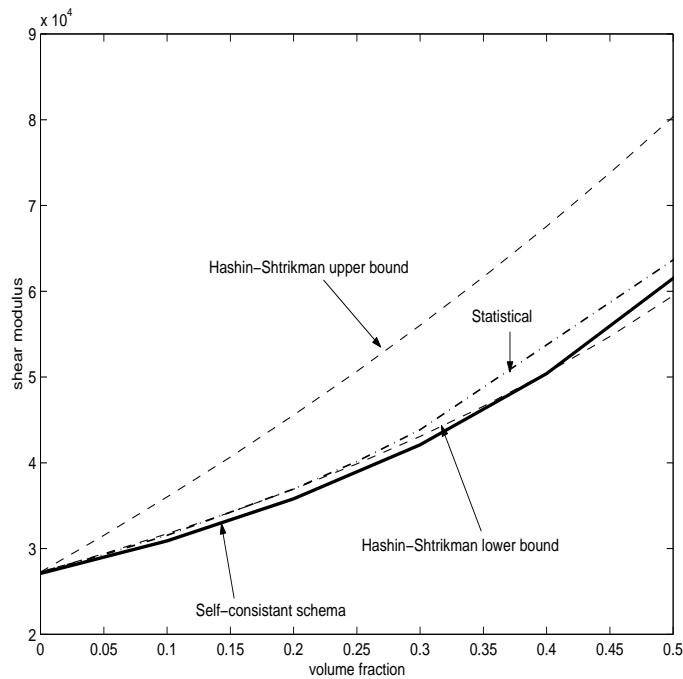


FIG. 2.8 – Module de cisaillement comparé aux bornes de Hashin et Shtrikman et au schéma self-consistant

2.2.5 Directions de recherche

Nous pensons maintenant poursuivre ce travail dans plusieurs directions.

- Tout d’abord, il serait intéressant d’étudier l’influence de la forme des pixels. Il est probable que si les pixels ne sont pas isotropes, par exemple en prenant des rectangles nettement plus longs que larges, ou des pixels en forme de L, le matériau moyen que l’on obtiendra ne sera plus isotrope. Mais il n’est pas clair actuellement qu’il puisse être orthotrope.
- Il est également intéressant d’étudier si le même type de phénomènes se produit lorsque les éléments du composite ont un comportement mécanique plus complexe, de type élasto-plastique ou avec un couplage thermomécanique ou piézoélectrique. Un travail a déjà débuté avec Frédéric Lebon sur le sujet.

Chapitre 3

Autour de l'optimisation numérique

3.1 Introduction

Le domaine de l'optimisation numérique est le sujet qui m'a permis de traiter les sujets les plus appliqués, et d'obtenir des partenariats pour poursuivre mes recherches : co-encadrements de 3 thèses à 50% toutes financées, participation à un projet (Tolérants) soutenu par l'Etat et la Région Picardie dans le cadre du contrat de plan Etat-Région 2000-2006, contrat industriel avec Airbus Méaulte; et enfin je suis enfin coordinateur d'un projet soutenu par l'ANR, programme jeunes chercheurs. Deux sujets distincts font partie de ce thème :

- Le dernier en date consiste en l'analyse et la simulation numérique du comportement d'un tas de sable sous l'effet d'un apport d'une source extérieure de sable, ou sous l'effet d'une force extérieure telle que l'action d'un fluide comme l'eau ou le vent. Dans ce cas, après l'effort de modélisation qui n'est pas simple à réaliser, l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la hauteur d'un tas de sable est fortement non linéaire. Nous travaillons à l'approximation numérique des solutions de cette équation en utilisant notamment des outils d'analyse convexe. Ce projet a obtenu un financement de l'ANR. Je co-encadre un doctorant sur le sujet (financement bourse MENRT).
- Le plus ancien chronologiquement consiste à proposer des méthodes afin d'assembler au mieux deux pièces mécaniques imparfaites, en respectant certaines contraintes (géométriques, fonctionnelles, ...). Ce travail est fait en collaboration avec EADS-CCR et Airbus. Ce projet a obtenu un financement de la région Picardie qui s'est terminé en 2005 puis d'Airbus (contrat de recherche de trois ans). Deux thèses sont en cours sur le sujet (1 financement région, 1 financement BDI CNRS-Région).

3.2 Analyse et simulation numérique du comportement du sable

Dans ce paragraphe, nous allons décrire rapidement comment modéliser la variation de la hauteur d'un tas de sable lors d'un apport d'une source extérieure de sable à l'aide d'une modélisation continue. Dans un second temps, nous montrerons les méthodes employées pour approcher les solutions de certaines équations obtenues. Au travers de cette étude, nous espérons traiter à terme des problèmes concrets tels que l'avancée des dunes dans le désert (projet soutenu par le CNRS/CNRST avec la FST Marrakech) ou l'ensablement des baies des fleuves (projet FLUPARTI soutenu par la région Picardie), etc. D'un point de vue plus théorique, nous ambitionnons d'apporter notre pierre à la compréhension du comportement des matériaux granulaires.

3.2.1 Vers un modèle de tas de sable (dune), en l'absence de sollicitation extérieure

Introduction

Nous nous proposons ici de présenter différentes approches pour décrire les écoulements (de sable) à la surface d'un tas, en l'absence de sollicitations extérieures. Cette question a été largement étudiée par nombre d'auteurs (voir par exemple [A01, B01, PZ03, BCRE94, SH89, dG95]), et est encore très débattue. L'objectif du travail que nous avons entamé avec Jérôme Fortin (Mécanicien du LTI, Université de Picardie) au sein de l'ANR GrainDeSable (voir [15]), et que nous allons poursuivre avec l'arrivée d'un post-doctorant, est de comparer ces différentes approches avec les résultats que l'on peut obtenir avec la méthode des éléments discrets. Cette méthode consiste à considérer un milieu granulaire comme une collection de billes rigides interagissant entre elles par contact frottant, avec éventuellement de la cohésion (pour plus de détails sur cette formulation qui ne sera pas décrite ici, voir par exemple [F00, M94]).

Ce travail de comparaison entre différentes approches a déjà été mené pour le problème du tambour tournant (voir [RBDA05]) et pour le problème du silo [R06].

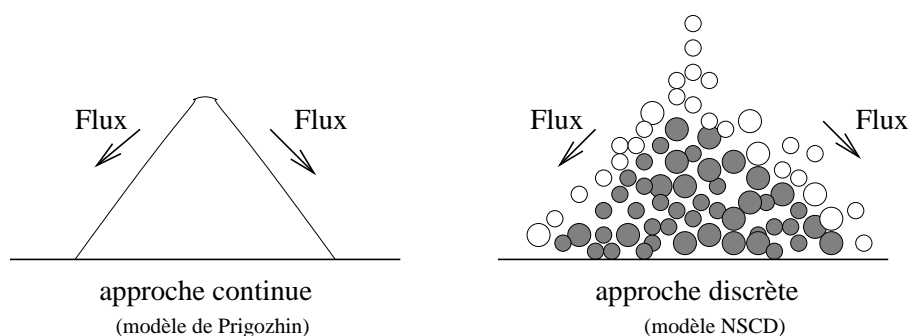


FIG. 3.1 – Comparaison approche continue / approche discrète pour la modélisation du comportement d'un tas de sable

Dans le présent document, nous allons expliciter les différentes approches continues qui ont été déjà développées pour modéliser le comportement d'un tas de sable, principalement en ce qui concerne les écoulements de surface. Trois types de descriptions seront étudiés :

- l’approche de Saint Venant, directement basée sur les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ;
- le modèle de BCRE (du nom de leurs auteurs : Bouchaud-Cates-Ravi Prakash-Edwards, [BCRE94]), qui peut être vu comme une simplification du modèle précédent, en particulier au niveau de la vitesse de propagation du front d’avalanche ;
- le modèle que nous appellerons de Prigozhin, et qui peut être vu comme la limite en grand temps et en grandes échelles d’espace du modèle précédent (et donc particulièrement adapté à la modélisation du mouvement des dunes).

L’objectif sera aussi de préciser les liens qui existent entre ces modèles, ainsi que leurs qualités et leurs limites.

L’approche de Saint-Venant

Historiquement, cette approche a été introduite pour la description d’écoulements stationnaires en tambours tournants. Elle a été ensuite généralisée à des écoulements de surfaces sur un plan incliné (pas d’échanges entre les couches) puis à des écoulements quelconques. Cette approche est fondée sur la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, intégrée dans l’épaisseur du tas.

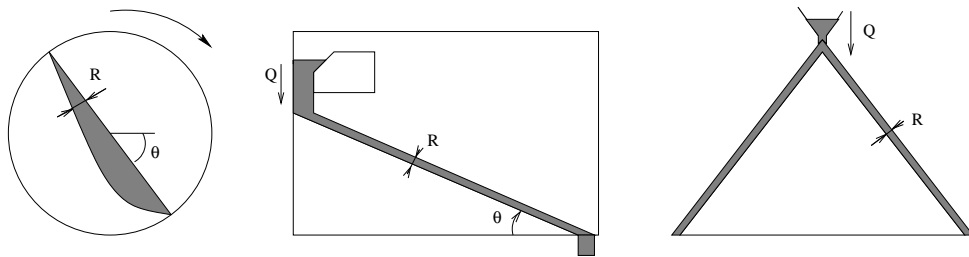


FIG. 3.2 – Différents problèmes où est utilisé le modèle de Saint-Venant

La première utilisation d’équations intégrées sur l’épaisseur à un écoulement de grains revient à Savage et Hunter [SH89].

Principe : En supposant le milieu incompressible (ce qui n’est pas tout à fait vrai!), la loi de conservation de la masse :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot v = 0 \quad (3.1)$$

devient

$$\nabla \cdot v = 0. \quad (3.2)$$

où ρ est la masse volumique et v est la vitesse du matériau, en coordonnées eulériennes, et $\frac{d}{dt}$ représente la dérivée particulaire.

La conservation de la quantité de mouvement s’écrit :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = g + \nabla \cdot \sigma \quad (3.3)$$

où σ est le tenseur des contraintes par unité de masse et g le vecteur gravité.

On considère ensuite la situation suivante où le milieu peut être décomposé en deux parties : une

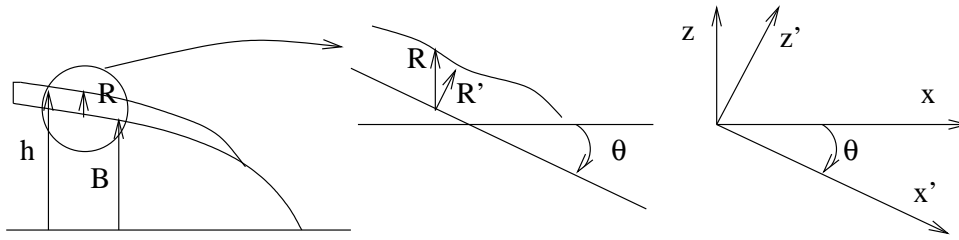


FIG. 3.3 – Modélisation du tas de sable en deux couches

épaisseur fine de grains mobiles qui coule sur un lit statique (considéré comme solide). Typiquement, on a pu observer que la hauteur d'une avalanche est de l'ordre de 10 à 20 grains, donc très fine devant la hauteur du lit statique.

Comme l'épaisseur de la couche en mouvement est petite, la vitesse des grains est essentiellement parallèle à l'interface solide/mobile. Par conséquent, on choisira parfois le référentiel (\vec{x}', \vec{z}') placé à la base de la couche en mouvement (roulante, parfois considéré comme liquide).

La vitesse v eulérienne en chaque point du matériau est décomposée en

$$v(x, y, z) = u\vec{x} + w\vec{z} \quad \text{ou parfois : } v(x, y, z) = u'\vec{x}' + w'\vec{z}'. \quad (3.4)$$

En écrivant

$$Q(x, t) = \int_{-\infty}^{h(x)} u(x, z, t) dz, \quad (3.5)$$

le flux au travers de la surface verticale passant par x et de normale \vec{x} , la loi de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.6)$$

où $h(x, t)$ est la hauteur du tas à la verticale du point x au temps t .

D'autre part, en introduisant l'« énergie cinétique » (moyenne du carré de la vitesse horizontale sur une coupe verticale) :

$$E(x, t) = \int_{-\infty}^{h(x)} u^2(x, z, t) dz, \quad (3.7)$$

et la force (moyenne sur l'épaisseur de la composante horizontale de la force)

$$P = \int_{-\infty}^{h(x)} F_x dz, \quad (3.8)$$

la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{\rho} P. \quad (3.9)$$

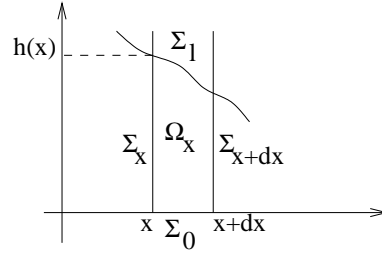


FIG. 3.4 – Volume élémentaire (matériel) considéré pour étudier la conservation de la masse

Preuve de la relation (3.6) :

Localement, la conservation de la masse s'écrit $\nabla \cdot v = 0$.

Si on intègre cette relation sur le domaine matériel (qui bouge avec les particules), on a

$$\int_{\Omega_x} \nabla \cdot v = 0 \Leftrightarrow \int_{\partial\Omega_x} v \cdot n = 0.$$

Il faut ensuite décomposer cette seconde intégrale sur chacune des parties du bord, afin de les calculer :

$$\int_{\Omega_x} v \cdot n = - \int_{\Sigma_x} u(x, z, t) dz + \int_{\Sigma_{x+dx}} u(x + dx, z, t) dz + \int_{\Sigma_0} w(x, 0, t) dx + \int_{\Sigma_\ell} v \cdot n = 0.$$

Il reste enfin à calculer le dernier terme de l'égalité précédente.

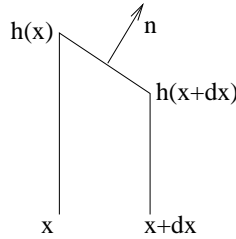


FIG. 3.5 – Calcul de la normale au volume élémentaire

On a $\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{\nu}\|} \vec{\nu}$, avec $\vec{\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\|\vec{\nu}\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}$.

L'équation de la surface libre Σ_ℓ s'écrit : $z = h(x, t)$. En dérivant cette relation, on obtient l'égalité

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}$$

ou encore

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} u.$$

On peut donc calculer l'intégrale (à l'ordre 1) :

$$\int_{\Sigma_\ell} v \cdot n ds \simeq \frac{\sqrt{dx^2 + (h(x+dx) - h(x))^2}}{\sqrt{1 + \frac{\partial h^2}{\partial x}}} \left(-u \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} u \right) = dx \frac{\partial h}{\partial t}.$$

En définissant Q comme dans (3.5), on obtient alors l'équation (3.6).

Preuve de la relation (3.9) : La relation de la quantité de mouvement s'écrit localement :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = g + \nabla \cdot \sigma.$$

On considère maintenant deux volumes élémentaires :

- Le premier (V_a non matériel) à bords latéraux fixes, mais dont la surface supérieure suit le mouvement des particules ;
- le second qui est le volume matériel ($V_m = \Omega_x$) utilisé dans le paragraphe précédent.

On va intégrer la conservation de la quantité de mouvement, sur la première composante et sur chacun des deux volumes. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_m} u &= \int_{V_m} \frac{\partial u}{\partial t} + \int_{\Sigma_\ell} u(v \cdot n) - \int_{\Sigma_x} u^2 + \int_{\Sigma_{x+dx}} u^2 \\ &= - \int_{\Sigma_x} \sum_j \sigma_{j1}(x) + \int_{\Sigma_{x+dx}} \sum_j \sigma_{j1}(x+dx) + \int_{\Sigma_0} \sum_j \sigma_{j2} + \int_{\Sigma_\ell} (\sigma n) \cdot \vec{x} \\ &\equiv dx \int_0^{h(x)} F_1(z) dz. \end{aligned}$$

Un aparté : du vent sur la dune.

Le terme $(\sigma n) \cdot x$ est nul sur la surface libre si on considère une pression uniforme sur cette surface, ce qui va être le cas dans la suite. Cependant, si on veut prendre en compte une force de cisaillement, par exemple du vent, c'est par ce terme que le couplage sera pris en compte.

D'autre part, sur le volume V_a :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a} u = \int_{V_a} \frac{\partial}{\partial t} u + \int_{\partial V_a} u(v \cdot n)$$

où v représente ici la vitesse du bord du volume. Comme les bords latéraux de ce volume sont fixes, on obtient ainsi d'une part

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a} u \simeq \frac{\partial}{\partial t} dx \int_0^{h(x)} u(z) dz = \frac{\partial Q}{\partial t} dx.$$

et d'autre part

$$\int_{V_a} \frac{\partial}{\partial t} u + \int_{\partial V_a} u(v \cdot n) = \int_{V_a} \frac{\partial}{\partial t} u + \int_{\Sigma_\ell} u(v \cdot n) ds.$$

En retranchant les égalités obtenues sur V_a et V_m , on obtient

$$\int_0^{h(x)} u^2(x, z, t) dz - \int_0^{h(x)} u^2(x+dx, z, t) dz + dx \frac{\partial Q}{\partial t} = dx \int_0^{h(x)} F_1(z) dz.$$

Ce qui amène à l'égalité (3.9), en définissant $P = \rho \int_0^{h(x)} F_1(z) dz$.

On peut maintenant remarquer que le système d'équations formé par (3.6) et (3.9) n'est pas fermé, puisqu'on dispose de deux équations mais que l'on a quatre inconnues (h , Q , E et P).

Profil de vitesse dans la couche roulante

Afin de réduire le nombre d'inconnues et de fermer le système, on va supposer un profil de vitesse dans la couche roulante, ainsi que la forme des efforts agissant sur le système, ce qui nous donnera les deux conditions manquantes.

Pour cela, on maintenant utiliser le repère local, qui sera plus naturel pour écrire les relations :

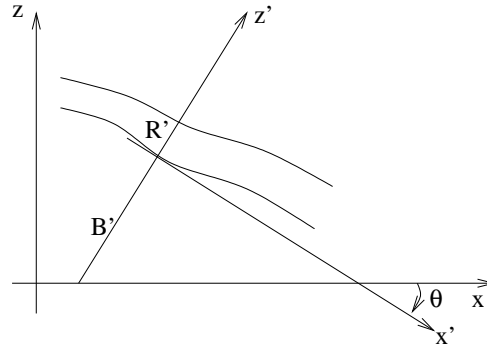


FIG. 3.6 – Passage au repère local dans la couche roulante

On va supposer de plus que dans la couche roulante $u' \gg w'$, $\frac{\partial}{\partial z'} \gg \frac{\partial}{\partial x'}$, et en particulier $\frac{\partial \theta}{\partial x'} \ll 1$.

Ainsi les équations de conservation (3.6) et (3.9) s'écrivent de la même façon dans le repère local.

On cherche ensuite un profil de vitesse dans la couche roulante du type

$$u'(z') = U' f\left(\frac{z' - B'}{R'}\right)$$

en écrivant la hauteur totale du tas h' comme étant la somme de la hauteur de la base fixe (B'), et de la couche roulante (R').

$$h'(x') = B'(x') + R'(x') \quad (3.10)$$

avec

- U' vitesse tangentielle de la surface libre ($U'(x')$ variant lentement avec x') ;
- R' hauteur de la couche roulante ;
- B' hauteur de la couche statique ;
- $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, f croissante de telle sorte que f envoie $[0, 1]$ dans lui-même.

Plusieurs profils de vitesse ont été envisagés par différents auteurs :

- Cas 1 : Profil constant ($f(0) = 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$). Il s'agit d'une approximation amenant aux équations de shallow water. Dans ce cas, la solution vérifie une équation d'Euler si P est bien choisi (conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans la couche en mouvement, c'est à dire qu'il n'y a pas d'échange entre les couches).
- Cas 2 : fluide visqueux, profil quadratique : $u'(z') = \frac{g \sin \theta}{2\nu} (2z'R' - z'^2)$, ce qui donne

$$\begin{cases} f(u) = u - u^2 \\ U' = \frac{g \sin \theta}{2\nu} R'^2 \end{cases}$$

– Cas 3 : matériaux granulaires où on considère souvent que le profil est linéaire, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} f(u) = u \\ U' = \frac{g \sin \theta}{d} R' \equiv \Gamma' R' \end{cases}$$

où d est le diamètre moyen des grains.

C'est ce cas que nous allons étudier plus précisément. Lorsque l'on remplace ce profil de vitesse dans la définition du flux et de l'énergie (sachant que la vitesse est nulle dans la couche statique), on obtient

$$\begin{aligned} Q' &= \Gamma' R'^2 \int_0^1 f(z') dz' = \frac{1}{2} \Gamma' R'^2 \\ E' &= \Gamma' R'^3 \int_0^1 f(z')^2 dz' = \frac{1}{3} \Gamma'^2 R'^3 \end{aligned}$$

On obtient ainsi le système (en considérant Γ' constant, et en oubliant le « ' » pour des raisons de simplicité) :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \Gamma R \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \Gamma R \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{1}{\rho \Gamma R} P. \end{cases} \quad (3.11)$$

Si on écrit le système plutôt avec les inconnues B et R , le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{1}{\rho \Gamma R} P \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \Gamma R \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{1}{\rho \Gamma R} P. \end{cases} \quad (3.12)$$

Remarque importante : le terme $\frac{1}{\rho \Gamma R} P$ apparaît donc clairement comme un terme d'échange entre les deux couches. Il reste maintenant à modéliser ce terme.

Etudes des forces : Dans le cas du modèle de shallow water ou d'un fluide visqueux, on considère que les lois de conservation sont aussi vérifiées dans la couche roulante, ce qui permet de définir P ($P = \rho g R (\sin \theta - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \theta)$ pour shallow water, ce qui signifie que la pression hydrostatique compense le poids). Dans le cas du tas de sable, il n'y a pas de conservation dans chaque couche puisqu'il peut y avoir échange entre les deux couches, ce qui donne une liberté pour décrire les efforts.

Différentes approches ont été proposées. En particulier, Douady et al. [DAD99] propose de considérer les efforts suivants :

- le poids $\rho g R \sin \theta$;
- une force de friction entre les deux couches, du type $-\rho g R \cos \theta \mu$ où μ représente le coefficient de friction.

On peut alors écrire le second membre sous la forme

$$\frac{1}{\rho \Gamma R} P = \frac{g}{\Gamma} \cos \theta (\tan \theta - \mu)$$

et on va considérer μ variable : $\mu = \mu(R, \theta)$.

Le système complet s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{g}{\Gamma} \cos\theta (\tan\theta - \mu(R, \theta)) \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \Gamma R \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{g}{\Gamma} \cos\theta (\tan\theta - \mu(R, \theta)). \end{cases} \quad (3.13)$$

Le coefficient de frottement $\mu(R, \theta)$ est choisi de sorte à respecter quelques propriétés physiques, dont par exemple, l'existence d'un angle de déclenchement des avalanches θ_{start} et d'un angle d'arrêt des avalanches θ_{stop} , avec $\theta_{start} > \theta_{stop}$. Les auteurs proposent de choisir :

– Si $\tan\theta \leq \mu_s$, alors

$$\mu(R, \theta) = \mu_d(R) + (\tan(\theta) - \mu_d(R)) \exp\left(-\frac{R}{R_0}\right),$$

– Si $\tan\theta \geq \mu_s$, alors

$$\mu(R, \theta) = \mu_d(R) + (\mu_s - \mu_d(R)) \exp\left(-\frac{R}{R_0}\right),$$

avec

$$\mu_d(R) = \mu_m + (\mu_s - \mu_m) \left(\frac{R}{R_m} - 1\right)^2.$$

R_0 est la taille caractéristique de la couche roulante autour de laquelle se situe la transition entre l'état statique et l'état roulant, R_0 a été choisit égal à $R_0 = \frac{R_m}{10}$, μ_s est la tangente de l'angle à partir duquel se déclenche les avalanches $\mu_s = \tan(\theta_{start}) = \tan(\theta_4)$ (voir figure 3.7).

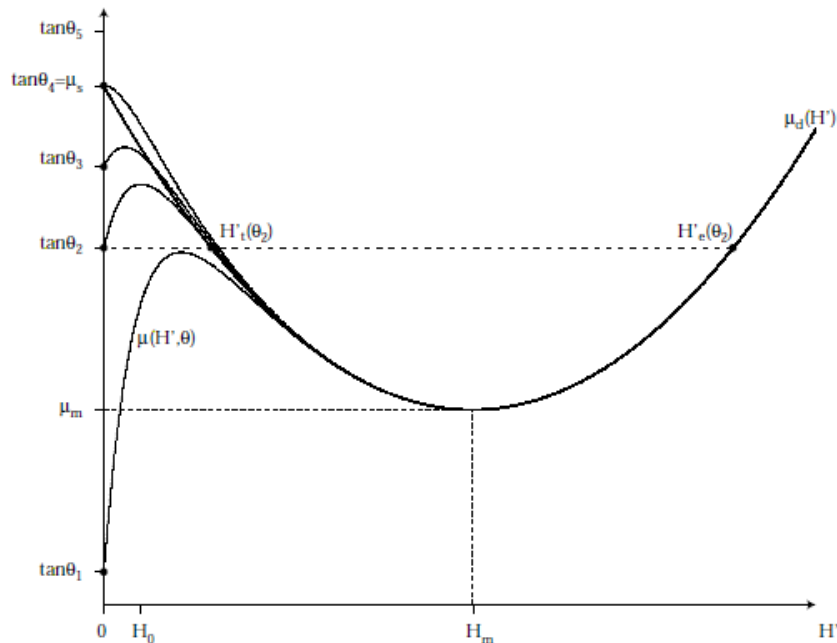


FIG. 3.7 – Modèle pour la force de friction en fonction de l'épaisseur de la couche roulante (notée H ici). (Figure tirée de [DAD99])

Commentaires :

- Si $\theta \leq \theta_4$ et $R = 0$ alors il n'y a pas d'avalanche, et la position d'équilibre est stable.
- Si $\theta > \theta_4 = \theta_{start}$ alors $R = 0$ est une position d'équilibre instable : si on augmente un peu R , alors $\mu = \tan\theta$ chute brutalement à $\mu_s = \tan\theta_{start}$, et il y a déclenchement d'une avalanche.
- pour tous les angles θ tels que $\tan\theta < \mu_{stop}$ alors il y a une stabilisation vers $R = 0$.

Ce modèle donne de bons résultats pour la description des avalanches, et a de nombreuses variantes, notamment pour ce qui concerne la description des échanges entre les deux couches.

3.2.2 La variante BCRE

Indépendamment du modèle précédent, Bouchaud et al. [BCRE94], De Gennes [BRG98], proposent une autre famille de modèles, qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} + V \frac{\partial R}{\partial x} = D \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \tilde{\Gamma}(R, B, \dots) \\ \frac{\partial B}{\partial t} = -\tilde{\Gamma}(R, B, \dots) \end{cases} \quad (3.14)$$

où

- V : vitesse d'advection (constante) de la couche roulante ;
- D : coefficient de diffusion lissant les fluctuations de la hauteur de la couche roulante ;
- $\tilde{\Gamma}$ couplage qui modélise la conversion entre grains mobiles et grains statiques.

Les différences entre ces modèles se situent principalement autour de la description des échanges entre les couches, ainsi de la vitesse d'advection V .

Modèle 1 : Bouchaud et al. [BCRE94] ont tout d'abord proposé d'écrire la loi de la couche statique sous la forme :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\beta(\theta - \theta_{stop})$$

(β est une constante) ce qui signifie que les grains se déposent si l'angle local du tas est plus petit que l'angle de repos θ_{stop} (car alors $\frac{\partial B}{\partial t} \geq 0$), et se mettent en mouvement dans le cas contraire ($\frac{\partial B}{\partial t} \leq 0$). Ceci permet alors d'écrire le terme de couplage sous la forme

$$\tilde{\Gamma} = aR(\theta - \theta_{stop}).$$

Modèle 2 : Le terme de diffusion $D \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$ a été supprimé dans les modèles suivants parce qu'il est d'ordre inférieur [dG95, BRG98].

De plus, si B est suffisamment grand, seul les grains de la partie inférieure de la couche roulante interagissent avec le lit statique, ce qui implique que $\tilde{\Gamma}$ est indépendant de R . On peut alors prendre

$$\tilde{\Gamma} = a(\theta - \theta_{stop})$$

Si $\theta - \theta_{stop} \ll \theta_{stop}$, en prenant $a = g \cos\theta / \Gamma$, on obtient un système d'équation comparable à (3.13), la différence la plus importante étant que la vitesse d'advection est maintenant supposée constante.

Défaut de ces modèles : la vitesse d'advection étant constante, la description du front d'avalanche n'est pas satisfaisant (forme, amplitude, ...).

On peut améliorer le modèle BCRE en écrivant que la vitesse de propagation du front est proportionnelle et opposée à la pente ∇h [HK99, PZ01] :

$$V = -\nu \nabla h \quad (\nu \text{ constante}).$$

Comme dans le modèle initial de Bouchaud et al., le couplage entre les deux couches est choisi du type :

$$\tilde{\Gamma} = aR(\theta - \theta_{stop})$$

De plus, comme la variation de l'angle local par rapport à l'angle de déclenchement de l'avalanche est petit ($\theta - \theta_{stop} \ll \theta_{stop}$), on peut approcher l'égalité précédente par

$$\tilde{\Gamma} = -\gamma R \left(1 - \frac{|\nabla h|^2}{k^2}\right)$$

où k et γ sont des constantes, dépendants des propriétés physiques du sable. Le modèle de BCRE ainsi enrichi devient

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} + \nabla \cdot (-\nu \nabla h) R = -\gamma R \left(1 - \frac{|\nabla h|^2}{k^2}\right) + w \\ \frac{\partial B}{\partial t} = \gamma R \left(1 - \frac{|\nabla h|^2}{k^2}\right) \end{cases} \quad (3.15)$$

où le terme w représente une source extérieure de sable (ce terme peut être ajouté de manière analogue dans le modèle de Saint-Venant). Ce modèle a été étudié par différents auteurs, et des simulations numériques ont été réalisées [FFV06].

3.2.3 Du modèle de BCRE au modèle de Prigozhin

Après un adimensionnement correct de l'équation précédente, on peut écrire un nouveau système d'équations modélisant le sable dans de grandes structures (dunes) pour de grandes échelles de temps et d'espace. C'est ce que nous allons décrire brièvement dans ce paragraphe.

Étape 1 : adimensionnement.

Le terme de source w est homogène à une longueur sur un temps, le terme γ est homogène à l'inverse d'un temps, de même que le terme ν . On va considérer $\bar{\omega}$ la quantité moyenne de sable apportée par unité de temps.

Les grandeurs caractéristiques du problème sont :

- $L_R = \frac{\bar{\omega}}{\gamma}$: épaisseur caractéristique de la couche roulante ;
- $L_P = \frac{\nu}{\gamma}$: compétition entre la couche stable et la couche roulante ;
- L : taille de la pile.

On a également $T = \frac{L}{\bar{w}}$ qui est le temps pour produire un tas de hauteur L

On fait l'adimensionnement suivant : $x' = \frac{1}{L}x$, $h' = \frac{1}{L}h$, $R' = \frac{1}{L_R}R$, $w' = \frac{w}{\bar{w}}$, $t' = \frac{1}{T}t$. Avec ces nouvelles variables, le système devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{L_P}{L^3} \nabla \cdot (R \nabla h) = L_R w - R \left(1 - \frac{|\nabla h|^2}{k^2}\right) \\ \frac{\partial B}{\partial t} = R \left(1 - \frac{|\nabla h|^2}{k^2}\right). \end{cases} \quad (3.16)$$

On fait ensuite les hypothèses :

$$L_R \ll L_P \ll L.$$

On note $\mu = \frac{L_P}{L}$ et on suppose $\frac{L_R}{L} = o(\mu) = \nu \lambda(\nu)$, avec $\lim_{\nu \rightarrow 0} \lambda(\nu) = 0$.

On définit

$$m = \nu R, \quad \psi(u) = 1 - \frac{u^2}{k^2},$$

les équations (3.16) deviennent (car $B \equiv h$) :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = m \frac{\psi(|\nabla h|)}{\nu} \\ \lambda \frac{\partial m}{\partial t} - \nabla \cdot (m \nabla h) = w - \frac{m \psi(|\nabla h|)}{\nu} \end{cases} \quad (3.17)$$

Pour des raisons techniques, on régularise ce système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = m \frac{\psi(|\nabla h|)}{\nu} + \varepsilon_h \Delta h \\ \lambda \frac{\partial m}{\partial t} - \nabla \cdot (m \nabla h) = w - \frac{m \psi(|\nabla h|)}{\nu} + \varepsilon_m \Delta m \end{cases} \quad (3.18)$$

avec $\lim_{\nu \rightarrow 0} \varepsilon_h(\nu) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \varepsilon_m(\nu) = 0$.

On peut montrer qu'alors, lorsque $\nu \rightarrow 0$ la solution (m, h) du système précédent converge [PZ01, PZ03] vers la solution du problème (ou au moins pour une discrétisation en temps) :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (m \nabla h) = w \\ m \geq 0, \quad |\nabla h| \leq k, \quad m(|\nabla h| - k) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

qui est l'équation étudiée par Prigozhin.

3.2.4 Présentation et étude du modèle de Prigozhin

Nous avons particulièrement étudié le modèle que nous venons de présenter, et nous allons en refaire une présentation directe, sans faire appel au modèle de BCRE.

Considérons la surface d'un tas de sable constituée d'un matériau granulaire (sable par exemple). Les propriétés du matériau granulaire déterminent l'angle maximal de stabilité de ce tas, noté α . La position du tas est décrite par sa hauteur $h(t, x)$ en un point $x \in \Omega$ du sol, à l'instant t .

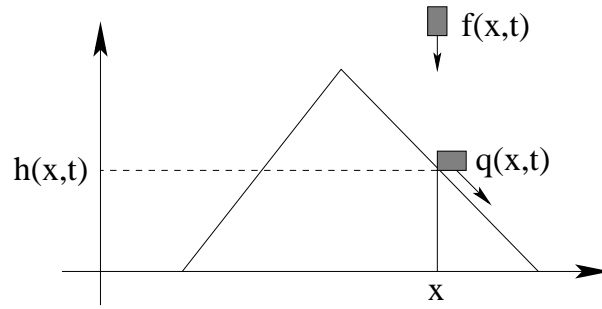


FIG. 3.8 – Modélisation de l'évolution d'un tas de sable

A l'instant initial, la forme du tas est donnée par $h(0, x) = h_0(x)$, pour tout point $x \in \Omega$ du sol. On s'intéresse à l'évolution de la forme du tas en fonction d'une source de distribution du matériau $f = f(t, x)$ donnée (voir figure 3.8).

On suppose que :

- le flux de matériau est confiné dans une couche mince à la surface du tas ;
- la densité volumique du matériau est constante ;
- les effets dynamiques sont négligeables (grande structure et grandes échelles de temps comme pour le cas de dunes par exemple).

Ainsi, on peut écrire la conservation du volume sous la forme

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot q = f \quad \text{dans } \Omega \quad (3.20)$$

où q est la projection horizontale du flux de matériau.

En négligeant les efforts d'inertie et en supposant que le flux de matériau est orienté le long de la plus grande pente, on a :

$$q = -m \nabla h \quad (3.21)$$

où $m = m(x, t) \geq 0$ est une fonction scalaire inconnue. On peut toutefois dire que la densité de flux m et la hauteur du tas h ont les propriétés suivantes :

- l'angle de la surface du tas n'est jamais supérieur à l'angle maximal de stabilité, c'est à dire :

$$|\nabla h(t, x)| \leq \gamma = \tan(\alpha). \quad (3.22)$$

- De plus, il n'y a pas de flux de matériau lorsque la pente est peu inclinée, ceci se traduit par

$$|\nabla h(t, x)| < \gamma \Rightarrow m(t, x) = 0. \quad (3.23)$$

Ces conditions peuvent s'apparenter à des conditions de type Signorini en mécanique du contact (ou à certains problèmes de plasticité).

Pour ce qui est des conditions au bord, elles sont essentiellement de deux types :

- soit on suppose qu'il existe un obstacle (mur) qui empêche le matériau de s'échapper, dans ce cas on choisira les conditions de Neumann homogène

$$m \nabla h \cdot \nu = 0 \quad \text{sur le bord } \partial\Omega; \quad (3.24)$$



FIG. 3.9 – Condition de type Signorini liant la densité de flux et la pente locale

- soit on suppose que la hauteur du tas est nulle sur le bord (condition de Dirichlet homogène, bord d'une table).

Le problème complet peut alors s'écrire (les inconnues sont m et h)

$$\begin{cases} a- & \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (m \nabla h) = f & \text{dans } Q = (0, T) \times \Omega \\ b- & m \geq 0; |\nabla h| \leq \gamma; m(|\nabla h| - \gamma) = 0 & \text{dans } Q \\ c- & \text{Conditions au bord} & \text{sur } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega \\ d- & h(0, x) = h_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.25)$$

Ce système a été étudié par divers auteurs, dont notamment L. C. Evans [EFG97] et L. Prigozhin [BP06]. Dans [ER98], ce modèle est aussi vu comme la limite continue d'un modèle discret stochastique, à base d'automates cellulaires.

Méthode numérique de résolution

L'objectif de l'étude est de mettre au point une méthode numérique pour résoudre le problème de Prigozhin.

Définissons

$$K_\gamma = \{z \in W^{1,\infty}(\Omega), |\nabla z| \leq \gamma\} \quad (3.26)$$

et \mathbb{I}_{K_γ} la fonction caractéristique de K_γ :

$$\mathbb{I}_{K_\gamma}(z) = 0 \text{ si } z \in K_\gamma, +\infty \text{ sinon.} \quad (3.27)$$

Discretisons tout d'abord l'équation (3.25-a) par un schéma d'Euler implicite. En notant Δt le pas de temps, $h^n(x)$ la solution approchée au temps $t = n\Delta t$ pour $n \in \mathbb{N}$, on est ramené à l'étude d'une suite d'équations stationnaires

$$\begin{aligned} & h^0 \text{ donné ;} \\ & \forall n \geq 0, \text{ Connaissant } h^n, f^n, \text{ trouver } h^{n+1} \text{ tel que} \\ & (Id + \partial \mathbb{I}_{K_\gamma})h^{n+1} \ni h^n + \Delta t f^n \end{aligned} \quad (3.28)$$

où $\partial \mathbb{I}_{K_\gamma}$ représente le sous-différentiel de \mathbb{I}_{K_γ} , et $f^n = f(n\Delta t, \cdot)$.

On en déduit ensuite que $h^{n+1} = (Id + \partial\mathbb{I}_{K_\gamma})^{-1}(h^n + \Delta t f^n)$ ou encore que h^{n+1} est la projection orthogonale pour la norme $L^2(\Omega)$ de $z^n = h^n + \Delta t f^n$ sur K_γ . Ceci peut également s'écrire :

$$J(h^{n+1}) = \inf_{h \in K_\gamma} J(h) \quad (3.29)$$

avec $J(h) = \frac{1}{2} \|z^n - h\|^2$.

Afin de calculer cette projection orthogonale sur K_γ , nous avons écrit un problème de minimisation dual

$$G(w) = \inf\{G(q), q \in H_{div}(\Omega)\} \quad (3.30)$$

où $H_{div}(\Omega) = \{q \in (L^2(\Omega))^2, \operatorname{div} q \in L^2(\Omega), q \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$, et

$$G(q) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} q)^2 + \int_{\Omega} z^n \operatorname{div} q + \int_{\Omega} |q|. \quad (3.31)$$

Il n'est pas du tout clair qu'il existe un élément w dans $H_{div}(\Omega)$ qui réalise le minimum de G . De plus, la fonctionnelle G étant uniquement convexe (non strictement), l'unicité d'un tel w n'est pas non plus assurée.

Cependant, nous sommes capable d'exhiber une suite $(w_p)_p$ dans $H_{div}(\Omega)$ telle que, quand p tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |w_p| &\rightarrow \int_{\Omega} h^{n+1} (z^n - h^{n+1}) \\ \operatorname{div}(w_p) &\rightarrow h^{n+1} - z^n \quad \text{dans } L^2(\Omega) \end{aligned}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} G(w_p) = \sup_{w \in H_{div}(\Omega)} G(w) = - \min_{h \in K(\gamma)} J(h).$$

(pour la preuve de ce résultat, voir [14]).

Il reste encore à écrire puis résoudre une approximation du problème dual sur un sous-espace de dimension finie. En d'autres termes, en définissant $V_N \subset V = H_{div}(\Omega)$ un sous-espace de V de dimension finie N tel que :

$$\|\sigma - r_N(\sigma)\| \leq \frac{C}{N} \|\sigma\|_V \quad \text{et} \quad \|\operatorname{div}(\sigma - r_N(\sigma))\| \leq \frac{C}{N} \|\sigma\|^{L^2} \quad (3.32)$$

pour tout σ dans V (typiquement, V_N est construit à partir des éléments finis de Raviart-Thomas de plus bas degré), et où r_N désigne la projection orthogonale de V sur V_N , il est clair que le problème de minimisation convexe défini sur V_N par

$$G(w_N) = \inf\{G(\sigma_N), \sigma_N \in V_N\} \quad (3.33)$$

admet au moins une solution $w_N \in V_N$. Alors, en utilisant le fait que $G(w_N) \leq G(r_N(w_p))$ pour tout N et tout p , on peut montrer que lorsque $N \rightarrow \infty$,

$$\operatorname{div}(w_N) \rightarrow h^{n+1} - z^n$$

et

$$-G(w_N) \rightarrow J(h^{n+1}) = \min_{z \in K_\gamma} J(z).$$

Enfin, pour approcher numériquement la solution de (3.33) à chaque temps $t = i\Delta t$, il est nécessaire de minimiser une fonctionnelle convexe mais non différentiable du type :

$$G : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w_N \mapsto G(w_N) = \frac{1}{2}(Aw_N, w_N) - (b, w_N) + \sum_{j=1}^N |w_j| \quad (3.34)$$

où A est symétrique positive (mais non définie positive) et b est un vecteur de \mathbb{R}^N .

La minimisation de cette fonctionnelle est effectuée grâce à un algorithme de type Gauss-Seidel non linéaire, qui peut être écrit de la façon suivante :

- Initialisation par un vecteur $q_0 \in \mathbb{R}^N$, et pour tout $k \geq 0$ jusqu'à convergence :
- Choisir un certain nombre de fois une direction canonique e_j de \mathbb{R}^N et trouver ρ_{jk} minimisant :

$$\varphi_{jk} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\rho \mapsto G(q_k + \rho e_j)$$

- Prendre $q_{k+1} = q_k + \omega \rho_{jk} e_j$ où ω est un paramètre de sur-relaxation.

Remarque : Lorsque φ_{jk} est différentiable, ρ_{jk} peut être déterminé par un algorithme de Newton (avec seulement quelques itérations), et dans le cas contraire, ρ_{jk} peut être déterminé « à la main ».

L'étude théorique de la convergence de ce schéma de minimisation ainsi que l'étude de la convergence de la solution du problème discrétisé vers la solution du problème continu se trouve dans [14] (voir également [GLT]).

Résultats numériques

Ceci nous a permis de simuler numériquement le comportement d'un tas de sable en présence d'une source extérieure de sable. Dans toutes les simulations présentées ici, nous avons choisi un paramètre de relaxation $\omega = 1,2$, et test d'arrêt $\varepsilon = 10^{-5}$ (le critère d'arrêt de l'algorithme de minimisation s'écrit $\|q_{k+1} - q_k\|_{\ell^2(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$).

Dans le premier exemple, la source de sable $f(x, t)$ est une constante égale à 1, pour tout temps t pour $x \in \Omega = (0, 1)^2$. Pour ces données, la surface du tas $h(x, t)$ peut être calculé de façon exacte. La simulation numérique a été réalisée sur une grille quadrangulaire 60×60 pour la discrétisation spatiale de Ω , avec un paramètre de discrétisation du temps de $\Delta t = 0,001$, et d'un angle de stabilité α tel que $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Nous avons alors trouvé une erreur sur la variable primale h égale à

$$\max_n \{h(\cdot, t_n) - h_N(\cdot, t_n)\}_{0, \infty, \Omega} / |u|_{0, \infty, \Omega \times (0, T)} \leq 0,0033$$

où h_N représente la solution trouvée par l'algorithme. Cette erreur relative est donc du même ordre de grandeur que le pas de discrétisation.

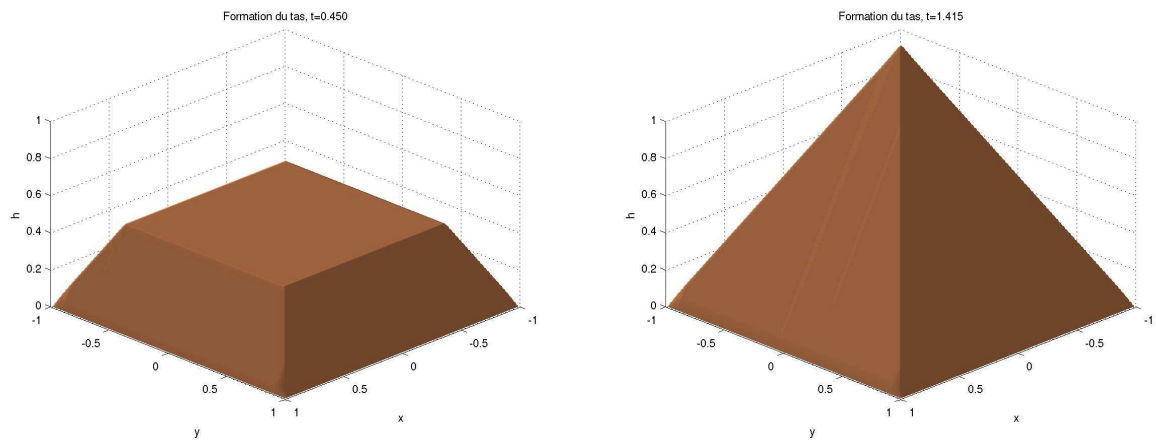


FIG. 3.10 – Simulation de l'évolution d'un tas de sable sur une table

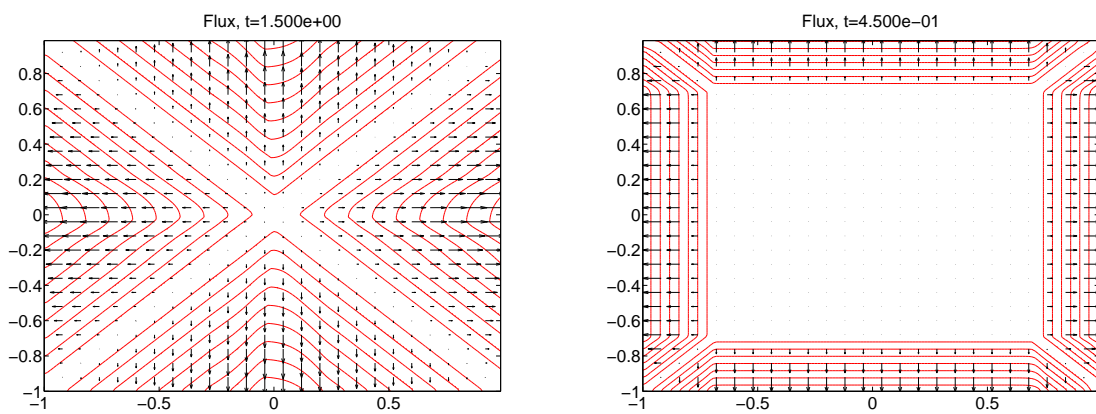


FIG. 3.11 – Flux de sable à la surface du tas (cas d'une table)

La figure 3.10 montre le tas au temps $t = 0,45$ et au temps $t = 1,415$ lorsque la solution devient stationnaire et égale à la fonction distance au bord. La figure 3.11 montre le flux de sable à la surface du tas. On peut observer que ce flux est bien parallèle au gradient de la surface, et s'annule sur la diagonale de Ω .

Dans le second exemple, la surface libre initiale est égale à 1, et la source de sable est constante, et est une mesure négative située au point $x_0 = (0; 0, 4)$. Les conditions au bord sont du type Neumann homogène, c'est à dire $q \cdot n = m \frac{\partial h}{\partial n} = 0$, ce qui permet de simuler la présence d'un mur sur la frontière. Même si l'étude théorique n'a pas encore été réalisée, les résultats qui se trouvent sur la figure 3.12 montrent la précision de la méthode. Par exemple, l'erreur sur la loi de la conservation du volume (masse) $|\int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) dx dt - \int_{\Omega} h_N(T, x) dx|$ est toujours inférieur à 10^{-4} pour tout $T \leq 4$.

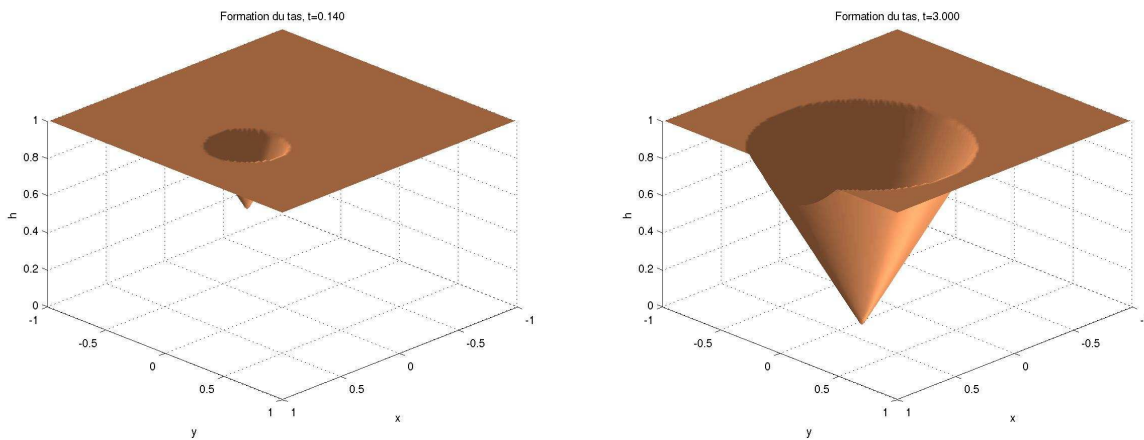


FIG. 3.12 – Simulation de l'évolution d'un tas de sable contre un mur

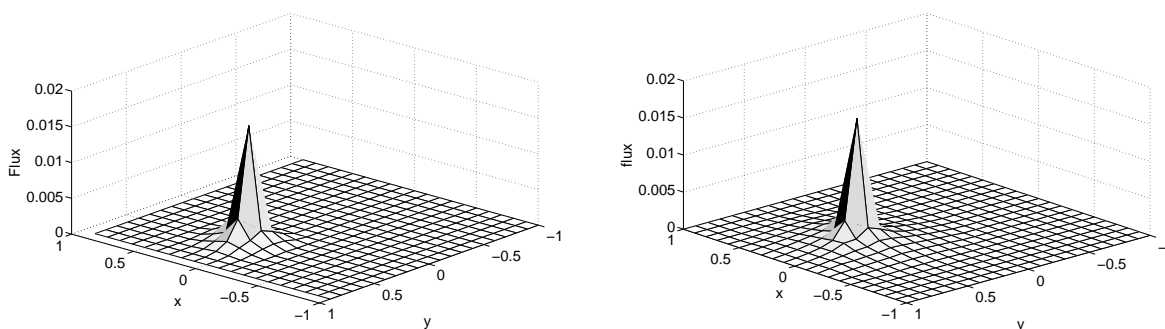


FIG. 3.13 – Flux de sable à la surface du tas (cas d'un mur)

La figure 3.13 montre que le flux de sable est bien concentré autour de x_0 est à une singularité du type $\frac{1}{|x-x_0|}$ comme le prévoit la théorie. De plus le flux s'annule sur le bord du domaine, même pour $t \geq 3$ où la hauteur du tas n'est plus nulle sur ce bord (et donc que les conditions aux limites sont bien vérifiées). D'autres expériences se trouvent dans [14].

Directions de recherche.

Plusieurs directions de recherche restent à explorer, notamment dans le cadre du projet ANR jeunes chercheurs :

- nous travaillons avec l'étudiant en thèse Julien Herbaut sur la modélisation de l'influence du vent sur une dune de sable. Ceci est relativement difficile à réaliser, en particulier parce que le modèle tel qu'il est écrit actuellement est purement géométrique et n'intègre pas le concept de force. Cependant, en revenant aux modèles plus riches (Saint-Venant en particulier), et en effectuant un développement asymptotique adéquat, il me semble possible d'écrire un tel modèle.

De plus, en suivant les idées de physiciens, les modèles que nous avons pu écrire, même s'ils ressemblent beaucoup aux modèles précédents, ne sont plus de même nature. En effet, l'introduction de termes de type transport nous empêche d'utiliser les techniques développées dans le cas précédent qui étaient basées sur la dualité.

- un autre thème que nous développons avec Jérôme Fortin (et l'étudiant de master 2 Ould Bah Hanani) dans le cadre du programme soutenu par l'ANR est le passage mésoscopique (échelle discrète du grain) au macroscopique (modèle continu). En effet, il existe des modèles qui décrivent le comportement des matériaux granulaires en considérant le mouvement de chaque grain, à partir de la connaissance des interactions qui existent entre ceux-ci, qui sont de type contact unilatéral avec frottement de Coulomb. Ces modèles sont aussi appelés modèles éléments discrets.

Il est absolument nécessaire, si l'on veut comprendre et écrire des modèles continus convenables, de pouvoir faire le lien entre les deux échelles et de déterminer, essentiellement à partir d'expériences numériques, les variables qui sont prédominantes. Nous travaillons actuellement à la rédaction d'un article sur ce sujet. De plus, un étudiant post-doctorant dont le financement est assuré par l'ANR doit venir nous épauler sur le sujet, à partir de novembre 2007.

3.3 Assemblage par la mesure

3.3.1 Introduction

L'objectif de ce travail est la mise en œuvre d'algorithmes permettant l'assemblage de pièces manufacturées. En effet, l'écart entre les pièces théoriques dessinées en bureau d'étude et les pièces telles qu'elles sortent des usines peuvent rendre leur assemblage difficile. Ce travail a commencé au début des années 2000, par une collaboration avec le centre commun de recherche d'EADS à Suresnes. Il s'est poursuivi au sein du groupe Tolérants, qui regroupait des industriels et des chercheurs en informatique, mathématiques, mécanique et sciences sociales (ergonomie du travail). Ce groupe de travail avait pour but d'analyser et d'améliorer le processus d'assemblage de pièces manufacturées en analysant chaque composante de ce processus, allant de l'analyse des conséquences d'une conduite de changement de procédés dans une entreprise (par des chercheurs en sciences sociales) à la détection sur une chaîne de montage d'une dérive de la qualité de fabrication, ou de la mise en œuvre de techniques permettant, dès la conception des pièces dans un bureau d'étude, de déterminer les jeux possibles entre les pièces, tout en étant à la fois économiquement réalisable et en donnant une bonne qualité à l'objet assemblé.

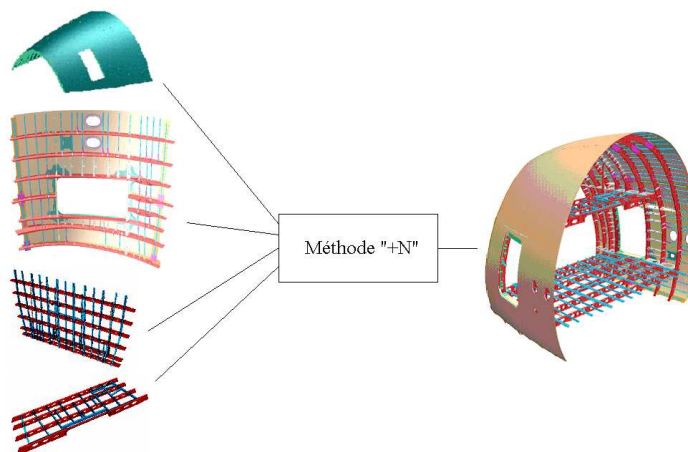


FIG. 3.14 – Assemblage par la mesure

3.3.2 Description de la problématique

Ce premier projet, d'une durée de trois ans nous a permis de financer la thèse de Sylvain Lefebvre que j'ai co-encadré à 50 % avec Olivier Goubet. L'objectif de ce travail peut être résumé de la façon suivante :

Étant donné une pièce à assembler T décrite par un ensemble de N points (T_i , pour $i = 1 \dots N$), et de N domaines de tolérances Ω_i centrées autour des T_i , il faut trouver le déplacement rigide qui amène « au mieux » sur T une pièce V décrite par N points (V_i pour $i = 1 \dots N$).

Mathématiquement, on peut traduire ce problème en : « Trouver le déplacement rigide D , mini-

misant la fonctionnelle

$$J(D) = \sum_{i=1}^N \|DV_i - T_i\|^2 \quad (3.35)$$

sous la contrainte $DV_i \in \Omega_i$ pour tout $i = 1 \dots N$ ».

DV_i peut aussi s'écrire $DV_i = RV_i + \tau$ où R est une matrice de rotation, et τ un vecteur de translation.

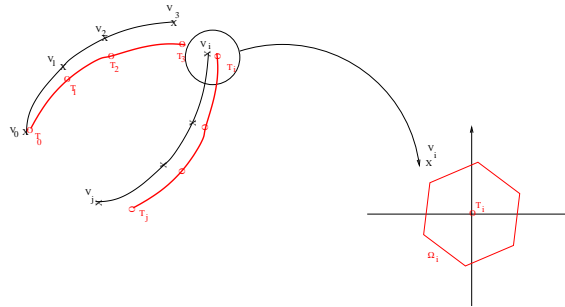


FIG. 3.15 – Illustration de l'assemblage par la mesure

Ce problème est difficile pour différentes raisons :

- Le nombre de degrés de liberté est relativement faible (3 en dimension 2, 6 en dimension 3). Par contre, le nombre de contraintes est beaucoup plus important (typiquement, N est compris entre 50 et 100).
- Il n'est pas certain que le problème admette une solution qui vérifie toutes les contraintes. Il faudra alors trouver une méthode qui vérifie « au mieux » l'ensemble des contraintes, la définition de « au mieux » étant bien entendu à définir avec l'industriel.
- Ce problème n'est pas un problème d'optimisation convexe car l'ensemble des rotations n'est pas un espace vectoriel ou affine convexe.

3.3.3 Méthode de résolution

Nous avons mis en œuvre différentes méthodes pour résoudre ce problème, fondées sur la théorie de la dualité ou de la pénalisation entre autres en particulier parce que si on se place dans le cas de petites rotations, le problème devient convexe. La méthode la plus intéressante est une méthode à pas fractionnaires. Elle consiste à traiter le problème de façon itérative, en séparant le problème en deux étapes, la première considérant la contrainte de rigidité, la seconde considérant la contrainte de qualité ($DV_i - T_i \in \Omega_i$ pour tout i).

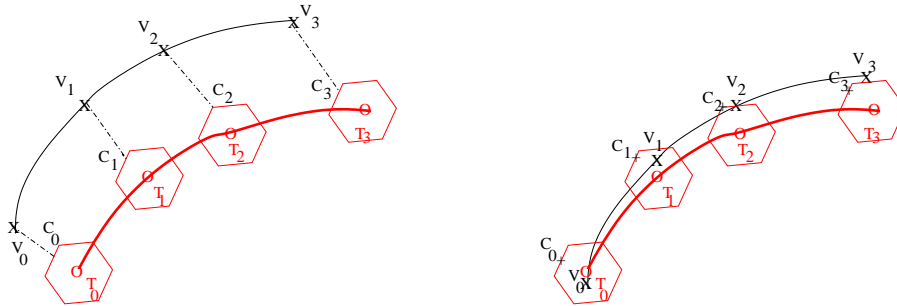
L'algorithme peut s'écrire ainsi (supposons pour simplifier que $\sum_{i=1}^N V_i = 0$) :

- Initialisation de l'algorithme en prenant le premier déplacement nul $D_0 = 0$;
- Pour $k \geq 0$ jusqu'à convergence :
 - Première demi-étape : on considère les « points cibles » C_i , qui sont les projections des points $D_k V_i$ sur les domaines de tolérances Ω_i , pour i allant de 1 à N . (ici, on ne prend en compte que la contrainte de qualité $DV_i \in \Omega_i$, en oubliant la contrainte de rigidité) ;

- Deuxième demi-étape : Calcul du déplacement rigide D_{k+1} qui minimise :

$$E(D) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|DV_i - C_i\|^2.$$

Ici, on ne considère que la contrainte de rigidité, en oubliant les Ω_i .



Etape 1 : calcul des points cibles C_i

Etape 2 : calcul du déplacement rigide.

FIG. 3.16 – Méthode à pas fractionnaire pour résoudre le problème de l'assemblage

Nous avons pu montrer que cet algorithme est bien posé au sens où il génère une solution à chaque étape, qu'il engendre une suite qui décroît l'énergie E définie ci-dessus, et que la suite ainsi définie converge. Ce travail fait l'objet d'une publication en cours d'écriture [19] et Sylvain Lefebvre devrait bientôt soutenir sa thèse sur ce sujet.

3.3.4 Résultats numériques

Voyons ici quelques résultats sur quatre exemples académiques en dimension 2.

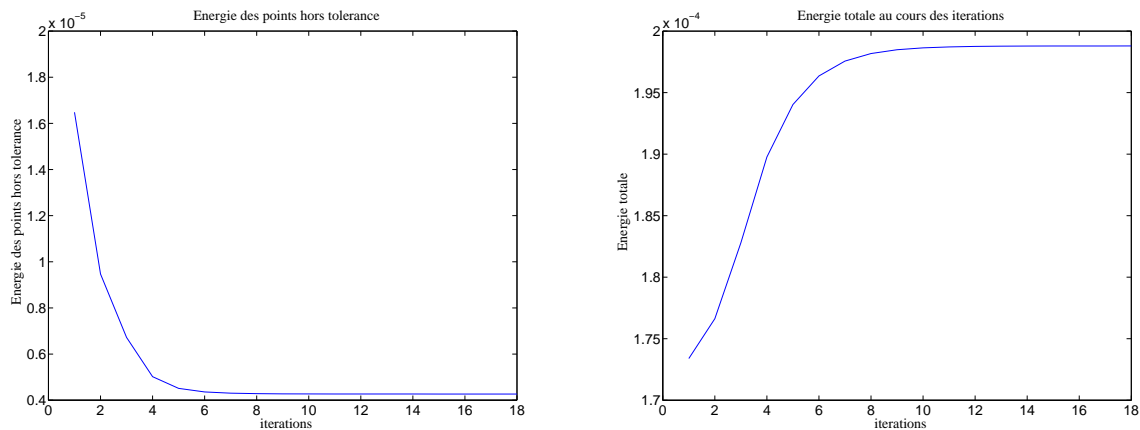


FIG. 3.17 – Energie des points hors tolérance, Energie totale

Le premier exemple est constitué d'un assemblage de 2 pièces T et V à assembler par quatre points, qui sont les quatre sommets d'un carré de côté de longueur 1 (voir figure 3.19). On trace sur la

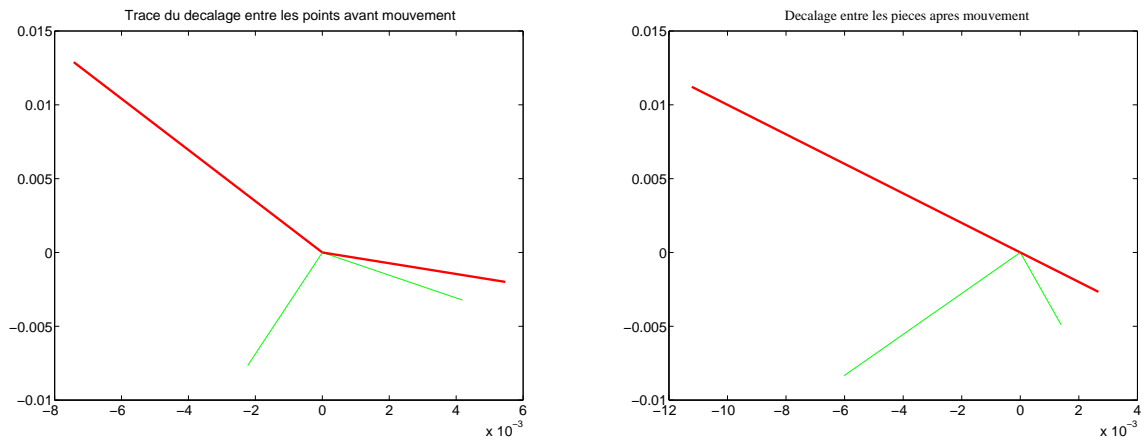


FIG. 3.18 – Distances entre points Tronçon et points Voilure

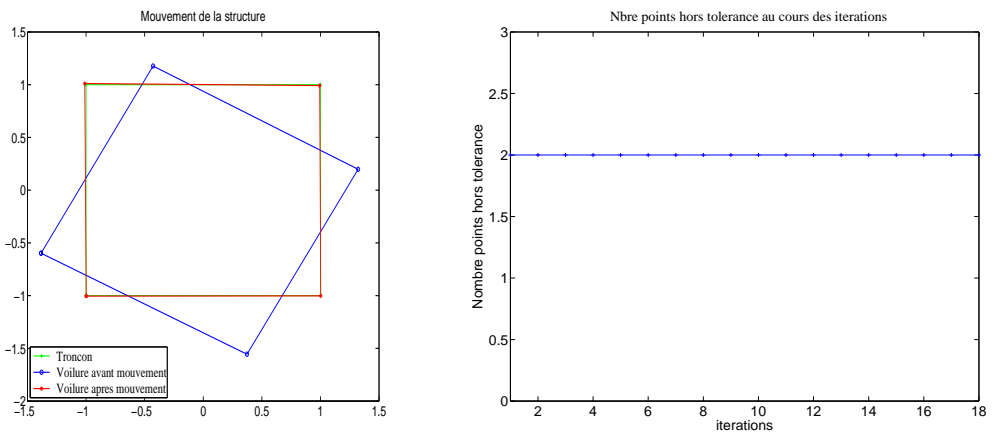


FIG. 3.19 – Mouvement de la structure, points hors tolérance au cours des itérations

figure 3.18 à gauche l'erreur avant optimisation de l'assemblage, c'est-à-dire $T_i - V_i$ pour $i = 1, \dots, 4$. Les domaines de tolérance sont des carrés de côté de longueur respectivement : $\delta_1 = 0.05$; $\delta_2 = 0.04$, $\delta_3 = 0.07$ et $\delta_4 = 0.039$. Les points V_i qui ne respectent pas la tolérance sont représentés par des segments en rouge-traits gras, les autres sont en verts-lignes fines. La figure de gauche représente l'erreur après une première étape de moindre carré. On représente sur la figure 3.17 l'énergie E (à gauche) et J (à droite). Comme on a pu le montrer, l'énergie E décroît au cours des itérations. Par contre, afin de ramener les points les plus éloignés proche de leurs domaines de tolérance, on est obligé d'éloigner les mieux situés. Cela se paye au niveau de la fonctionnelle J , qui est l'erreur au sens des moindres carrés.

Dans cet exemple, on observe que deux points hors tolérance se trouvent diamétralement opposés, et que par conséquent on ne peut pas trouver de solution. Tout ceux qui ont déjà monté une armoire le savent, lorsqu'on tente de faire rentrer un ergot dans le trou correspondant, il y a toujours un autre ergot qui s'éloigne et ne veut pas rentrer !

La figure 3.19 montre la structure dans sa position initiale et finale (à gauche), tandis qu'à droite est représenté le nombre de points hors tolérance au cours des itérations.

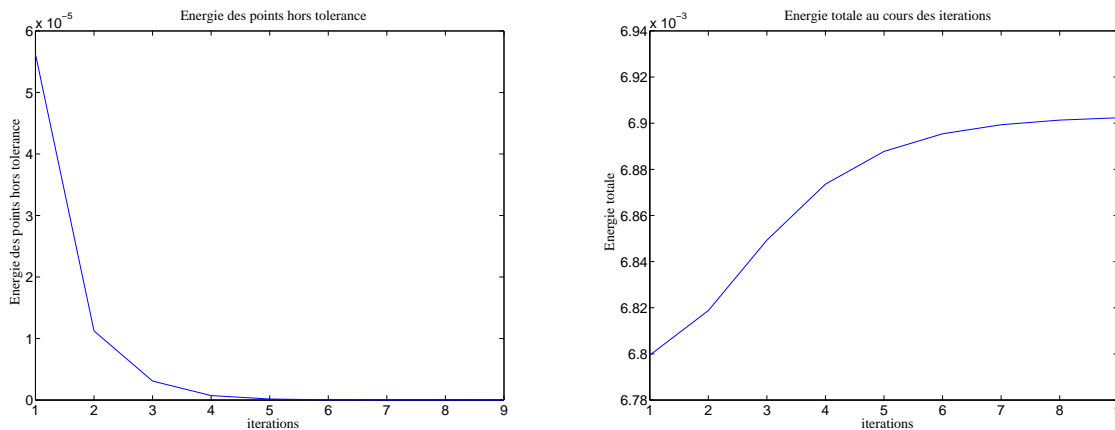


FIG. 3.20 – Energie des points hors tolérance, Energie totale

Le second exemple est un cas où il existe une solution vérifiant l'ensemble des contraintes. La figure 3.21 montre que trois points vérifient la contrainte après l'étape de moindres carrés, et qu'à la fin du processus, l'ensemble des points se trouvent dans leur zone de tolérance.

La figure 3.20 montre que, comme précédemment l'énergie E décroît au cours des itérations tandis que l'énergie de moindres carrés croît.

La figure 3.22 est particulièrement intéressante : on remarque sur la courbe de droite qu'à la première itération un second point est sorti de sa tolérance, pour qu'ensuite un point puisse rentrer à la sixième itération et que tous les points vérifient la contrainte au bout de la neuvième itération.

L'exemple suivant est plus représentatif d'une situation industrielle, puisqu'il est constitué d'une cinquantaine de points (voir figure 3.25). Comme toujours, la figure 3.23 montre que l'énergie E

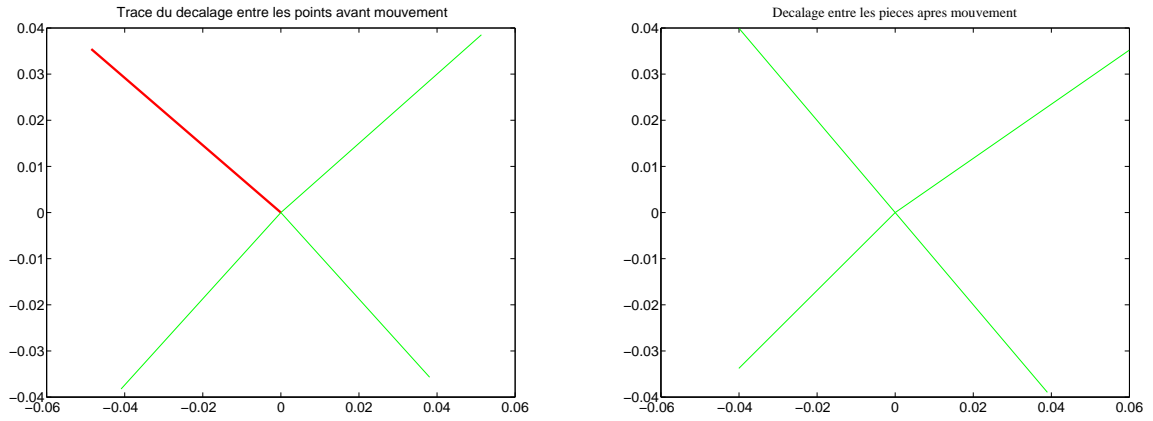


FIG. 3.21 – Distances entre points Tronçon et points Voilure

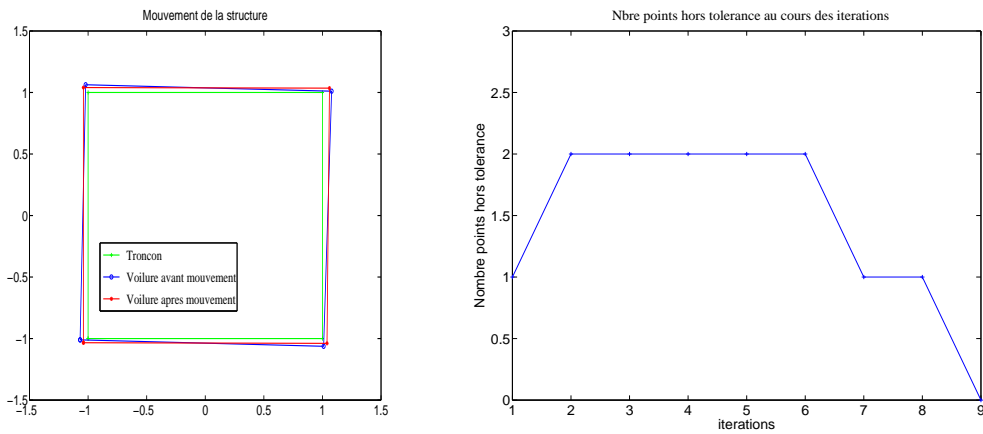


FIG. 3.22 – Mouvement de la structure, points hors tolerance au cours des iterations

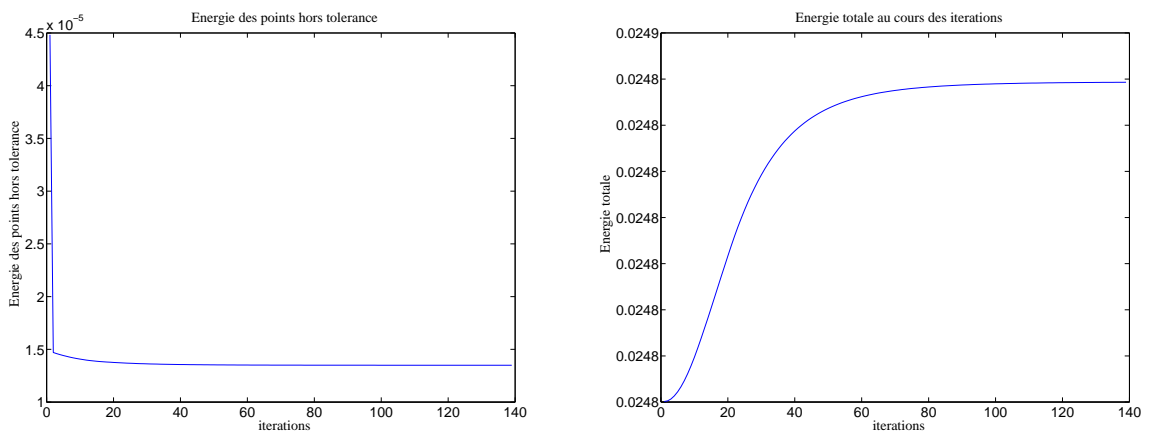


FIG. 3.23 – Energie des points hors tolerance, Energie totale

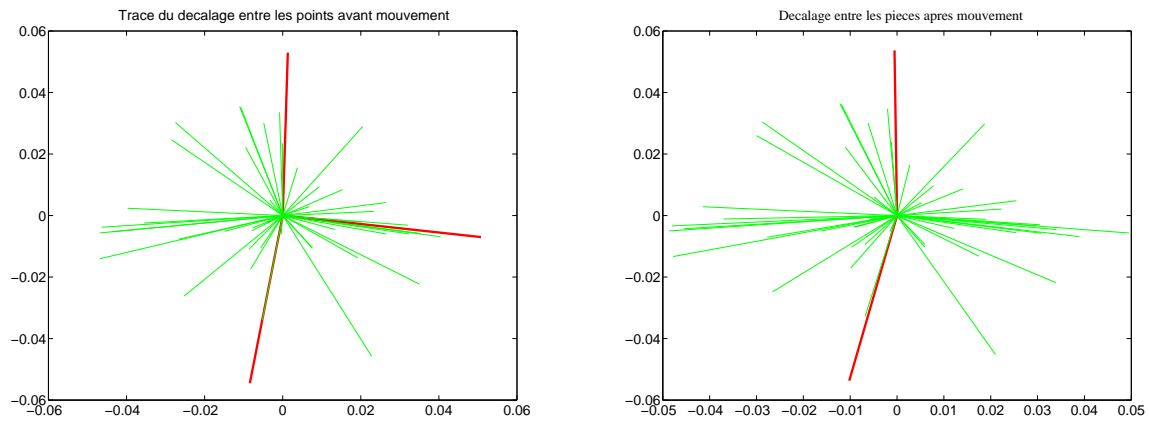


FIG. 3.24 – Distances entre points Tronçon et points Voilure

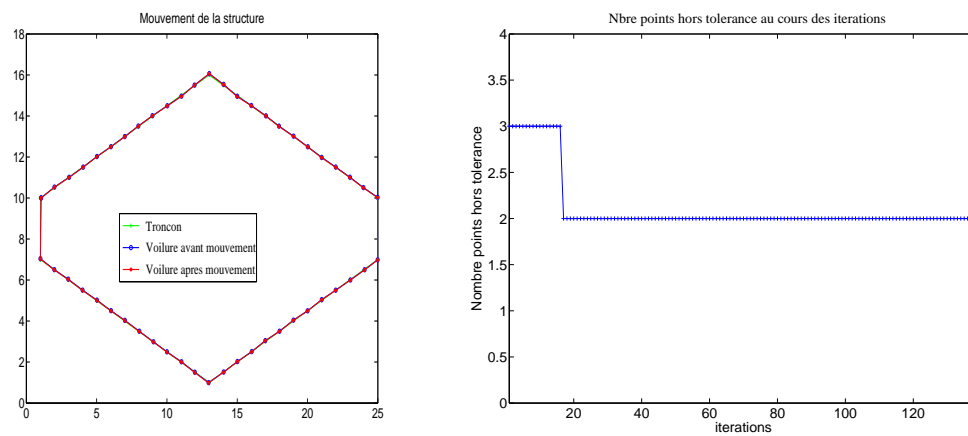


FIG. 3.25 – Mouvement de la structure, points hors tolérance au cours des itérations

décroît au cours des itérations mais que l'énergie de moindres carrés J augmente. On observe sur la figure 3.24 qu'il y a trois points hors tolérance au début du processus (après une première étape de moindres carrés) et qu'on n'arrive pas à rentrer plus d'un seul point supplémentaire dans les tolérances. On peut remarquer que ces deux points hors tolérance sont diamétralement opposés.

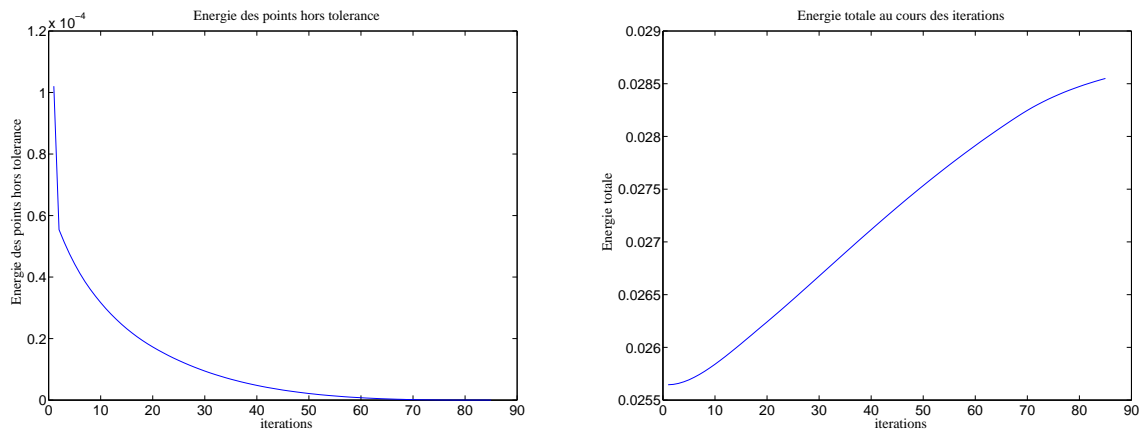


FIG. 3.26 – Energie des points hors tolérance, Energie totale

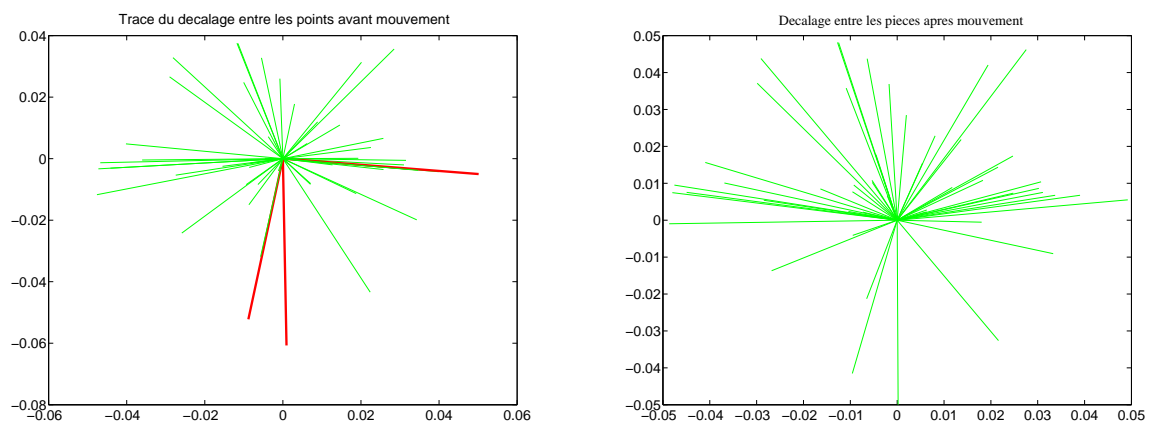


FIG. 3.27 – Distances entre points Tronçon et points Voilure

Le dernier exemple est une variation du précédent où il existe une solution qui rentre tous les points dans leur tolérance. On peut remarquer sur la partie gauche de la figure 3.27 que les points hors tolérances sont du même côté, ce qui permet dès la première étape de savoir que l'on pourra améliorer les résultats. Il ne reste qu'un seul point hors tolérance après la dixième itération (voir figure 3.28 à droite) mais il faut encore attendre la 85ème itération pour avoir une solution.

Cet algorithme est donc relativement performant, rapide (le mouvement à chaque itération n'est que la solution d'un problème de moindres carrés). Il a été comparé avec succès à d'autres types d'algorithme (génétique, basé sur la dualité ou la pénalisation).

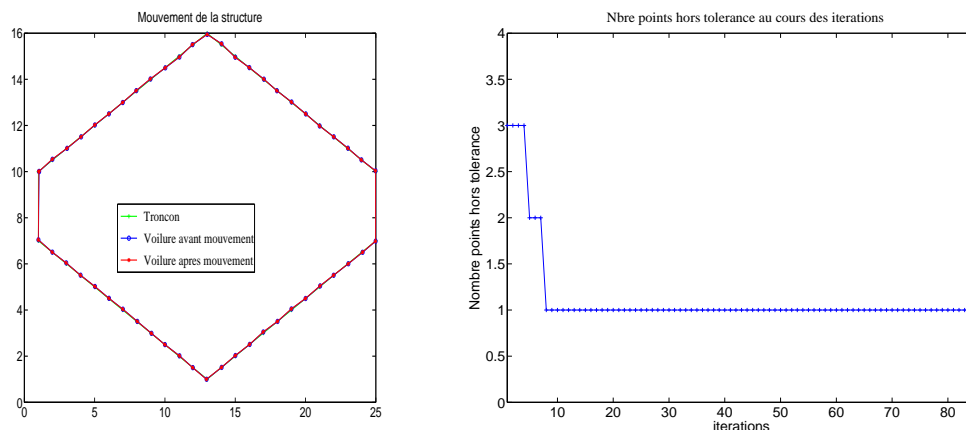


FIG. 3.28 – Mouvement de la structure, points hors tolérance au cours des itérations

3.3.5 Directions de recherche.

Nous poursuivons ce travail avec Benoit Bartoux, actuellement en thèse financée par une bourse BDI CNRS-Région, avec un contrat d'accompagnement d'Airbus Méaulte. L'objectif est maintenant de prendre en compte des contraintes entre les pièces plus sophistiquées, de type géométrique (alignement entre pièces, alignement de surfaces, ...) ou mécanique (bon comportement d'un assemblage à certaines sollicitations).

De plus, lors de la première étude, nous n'avons abordé que le cas de deux pièces à assembler. Mais dans la pratique, il est plus intéressant de mesurer l'ensemble des pièces, d'optimiser leurs positions relatives pour enfin les assembler. L'avantage est double : à la fois cela permet d'augmenter le nombre de degré de liberté afin de garantir la qualité de l'ensemble, mais cela permet aussi de prédire avant la phase d'assemblage si celui-ci va être possible, générant ainsi un conséquent gain de temps, et donc de la productivité.

Chapitre 4

Propriétés qualitatives des équations aux dérivées partielles

4.1 Introduction

Ces dernières années, je me suis particulièrement intéressé à la résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires. La plupart du temps, ces travaux ont été le fruit du hasard des rencontres. Ce qui m'a toujours conduit dans ces études a été d'écrire des algorithmes de résolution pour ces problèmes qui préservent les propriétés importantes des équations, ou de la physique de ces équations (conservation de la masse, de l'énergie, conservation du principe du maximum, ...).

Trois études font partie de cet axe de recherche et je vais décrire ici les deux premières brièvement :

- Calcul des solutions explosives aux bords d'équations non linéaires ;
- Propriétés des attracteurs de l'équation de Schrödinger ;
- Solutions d'un problème de type Ginzburg-Landau (voir [4]).

4.2 Propriétés qualitatives de l'attracteur de l'équation de Schrödinger

4.2.1 Description de la problématique.

L'objectif de cette étude est l'étude des propriétés qualitatives des attracteurs de l'équation de Schrödinger faiblement amortie [1] :

$$u_t + \alpha u + iu_{xx} + i|u|^2u = f, \quad (4.1)$$

où l'inconnue $u(t, x)$ est définie sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{T}$ à valeurs dans \mathbb{C} . Ceci signifie que u est périodique en x . Le paramètre α est le paramètre d'amortissement et f représente une force externe.

Il est connu que lorsque $f \in L^2(\mathbb{T})$, cette équation admet un attracteur \mathcal{A} , qui attire toutes les trajectoires. De plus, si la solution $u \in H^1(\mathbb{T})$ alors cet attracteur est un compact de $H^2(\mathbb{T})$. Par conséquent, cette équation a un effet régularisant asymptotique en grand temps.

Nous avons voulu étudier ce phénomène pour l'équation de Schrödinger discrétisée à la fois en temps et en espace. Pour ce faire, les défis étaient multiples :

- Il faut définir un algorithme de résolution suffisamment précis (afin de pouvoir capter les bons phénomènes) mais rapide (les phénomènes étudiés apparaissent en temps long) ;
- Il faut pouvoir définir la régularité d'une solution discrète. En effet, puisque la discrétisation en espace a été faite à l'aide d'une méthode de différences finies, on obtient une solution approchée sous la forme d'un nuage de points.

Pour répondre à la première question, nous avons choisi d'utiliser un schéma de Crank-Nicholson astucieux en espace et en temps, et des différences finies en espace. Une propriété indispensable de ce schéma est qu'il conserve les principaux invariants de l'équation, dans le cas conservatif $\alpha = 0$ et $f = 0$.

Afin de pouvoir répondre à la seconde question, nous avons mis au point une méthode originale, utilisant soit la transformée de Fourier, soit les multigrilles (ou la transformée en ondelettes). Le problème est le suivant : soit $U \in \mathbb{C}^N$ correspondant aux valeurs d'une fonction aux points $j\Delta x$. Comment vérifier si cet échantillonnage correspond à une fonction de H^1 ?

Si on avait accès à cette information, nous aurions juste à vérifier si la suite :

$$\alpha_N = \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=1}^N (u_{j+1} - u_j)^2$$

reste bornée lorsque $N \rightarrow \infty$. Malheureusement, avec des données numériques, on ne peut seulement accéder qu'à des valeurs de N grandes, mais bornées.

Nous avons alors choisi la parade suivante : soit une fonction périodique qui peut être écrite sous la forme d'une série de Fourier :

$$u(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \hat{u}(k) e_k(x), \quad (4.2)$$

où $e_{2k}(x) = \sin(2k\pi x)$ pour $k \geq 1$, et $e_{2k+1}(x) = \cos(2k\pi x)$, pour $k \geq 0$. La régularité de u est liée à la décroissance des coefficients de Fourier sur les grandes fréquences.

Nous pouvons utiliser le critère suivant, classique dans l'analyse multiniveau du signal [Mal98]. Une fonction u qui est dans L^2 est aussi dans H^s avec $s > 0$ si et seulement si

$$\sum_{N=1}^{+\infty} N^{2s-1} \|u - u_N\|_{L^2}^2 < +\infty. \quad (4.3)$$

où $u_N = \sum_{|k| > N} \hat{u}(k) e_k(x)$. Ce critère permet donc de déterminer la régularité s du signal u en fonction de la vitesse de convergence vers 0 de la suite (u_N) .

Finalement, il reste à appliquer ce critère à notre nuage de points. Pour cela, il suffit d'utiliser la transformée de Fourier Discrète (DFT)

$$U = (U_j)_{1 \leq j \leq N} \xrightarrow{DFT} y_k = \sum_{j=1}^N U_j e^{-ikj\Delta x}, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Ensuite $DFT(U_N - U_{\frac{N}{2}})$ représente $\widetilde{y}_k = \sum_{j=\frac{N}{4}+1}^{\frac{3N}{4}} U_j e^{-ikj\Delta x}$. Et enfin

$$V = U_N - U_{\frac{N}{2}} \xleftarrow{DFT^{-1}} \widetilde{y}_k$$

U_N joue le rôle de u , $U_{\frac{N}{2}}$ la première approximation de U_N , et les autres sont calculées récursivement.

On peut utiliser le même type de méthode avec une transformée en ondelettes à la place de la transformée de Fourier. Dans le cas où on utilise une ondelette B-spline de degré 2 (ou des éléments finis P1 hiérarchiques), on est ramené à faire une décomposition multigrilles. Dans ce cas, toutes les régularités $s > 0$ ne sont pas accessibles, on ne peut atteindre que les régularités $s < s_0$ où s_0 est le nombre de moments non nuls de l'ondelette ($s_0 = 2$ dans le cas des multigrilles).

Afin de vérifier l'efficacité de cette méthode, nous avons tout d'abord choisi d'essayer de retrouver la régularité des fonctions suivantes, échantillonnées sur 128 points régulièrement répartis sur l'intervalle $[0, 1]$:

$$- f_1(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 1 & \text{if } x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

$$- f_2(x) = |x - \frac{1}{2}|$$

$$- f_3(x) = x^2(1-x)^2$$

$$- f_4(x) = \sin(2\pi x).$$

On obtient ainsi que $f_l \in H_{\Delta x}^s$ pour chaque l avec :

	analyse de Fourier	approche Multigrilles
f_1	s=0.6049	s=0.50
f_2	s=1.6357	s=1.50
f_3	s=3.7917	s=2.00
f_4	s=10.000	s=1.9834

Nous obtenons donc des résultats satisfaisants, ce qui nous a permis d'étudier les solutions de l'équation de Schrödinger discrète, avec différentes données (voir [1]). Un cas intéressant est celui où $\alpha = 0.001$, f est une fonction de L^2 très oscillante, et la donnée initiale est la fonction de Heaviside. Dans ce cas, nous obtenons une solution qui converge vers une fonction qui a la régularité attendu, c'est à dire que l'attracteur est dans H^2 (voir figure 4.1).

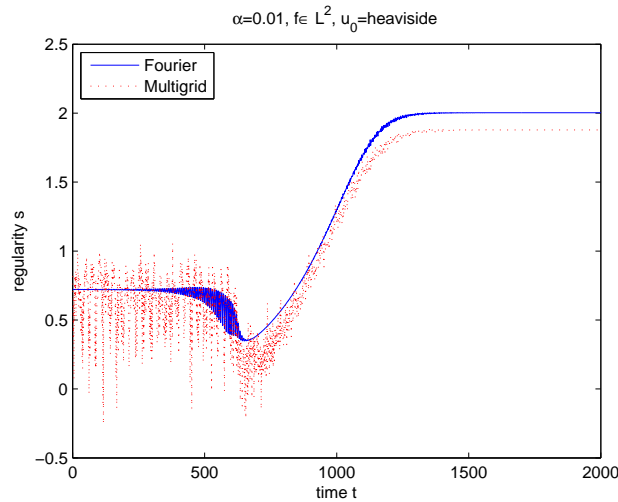


FIG. 4.1 – Régularité de $u(t, \cdot)$ avec $\alpha = 0.01$, $f \in L^2$, u_0 Heaviside.

4.2.2 Directions de recherche.

Nous travaillons actuellement, notamment au sein du groupe MASOH, soutenue par un projet INRIA 3+3 méditerranée et qui regroupe des chercheurs des universités de Picardie, l'équipe du projet SIMPAF de l'INRIA Lille, de l'Université de Grenade, de Marrakech et de Monastir, sur l'extension de ces résultats à d'autres équations d'onde où des résultats sur la régularité des attracteurs ne sont pas connus. Souvent, dans ces équations, un problème supplémentaire apparaît car les propriétés des attracteurs de ces équations sont intéressantes lorsque le domaine spatial d'étude est non borné, ce qui est difficilement réalisable numériquement. Pour pallier ce problème, nous devons avoir recours à un autre type de conditions aux limites, les conditions aux limites absorbantes. Ces conditions aux limites permettent de travailler sur un domaine compact tout en gardant les propriétés des solutions du problème initial. Malheureusement, ce type de conditions n'est pas toujours facile à écrire, et il reste encore un important travail à faire pour répondre à ces questions.

4.3 Calcul des solutions explosives aux bords d'équations non linéaires

4.3.1 Description de la problématique.

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la résolution d'équations non linéaires du type :

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = +\infty & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.4)$$

où f est une fonction vérifiant certaines conditions (appelées conditions de Keller et Osserman), Ω est un ouvert borné, régulier de \mathbb{R}^n , et $u = +\infty$ sur $\partial\Omega$ signifie $u(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow \partial\Omega$.

L'objectif de cette étude était d'affaiblir autant que possible les conditions classiques de Keller [Ke57] et Osserman [Os57] pour avoir existence d'une solution explosive, et d'étudier numériquement ce qui se passe lorsque ces conditions ne sont pas remplies.

Nous avons choisi diverses fonctions f , du type puissance ($f(u) = u^2$) et qui vérifient les conditions de Keller et Osserman, ou du type $f(u) = u^2(1 + \cos(u))$ qui ne vérifient pas ces conditions. Ce projet a été financé par un programme Egide Brancusi, ce qui nous a permis de travailler en collaboration avec des collègues Roumains.

L'intérêt de ce type d'étude est la détermination et l'étude des propriétés de la plus grande solution possible à l'équation $\Delta u = f(u)$.

L'approximation des solutions du problème (4.4) se fait en plusieurs étapes.

Tout d'abord, il convient de remplacer $+\infty$ sur le bord de $\partial\Omega$ par une valeur finie N , et de contrôler l'erreur commise par une telle approximation. On en est alors amené à résoudre l'équation :

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) & \text{dans } \Omega \\ u = N & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.5)$$

Ensuite, afin de résoudre le problème non linéaire, après avoir testé plusieurs méthodes, nous avons choisi d'utiliser l'algorithme qui sert à faire l'étude théorique des solutions de l'équation (4.4). Cet algorithme s'appuie sur la méthode des sous et sur solutions. Il peut être résumé de la façon suivante :

Considérons $\Lambda_N = \sup_{u \in [0, N]} f'(u)$, on construit l'algorithme itératif :

$$\begin{aligned} &u^0 = 0 \\ &\text{pour } k \geq 0, \\ &\begin{cases} (\Delta - \Lambda_N Id)u^{k+1} = f(u^k) - \Lambda_N u^k & \text{dans } \Omega \\ u^{k+1} = N & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6)$$

On peut montrer que cet algorithme converge, et contrôler l'erreur commise après une discrétisation. Il convient ici de préciser que la convergence de cet algorithme est intimement liée au principe du maximum, et que par conséquent la discrétisation de ce problème doit vérifier également cette propriété (pour plus de précisions, voir [2]).

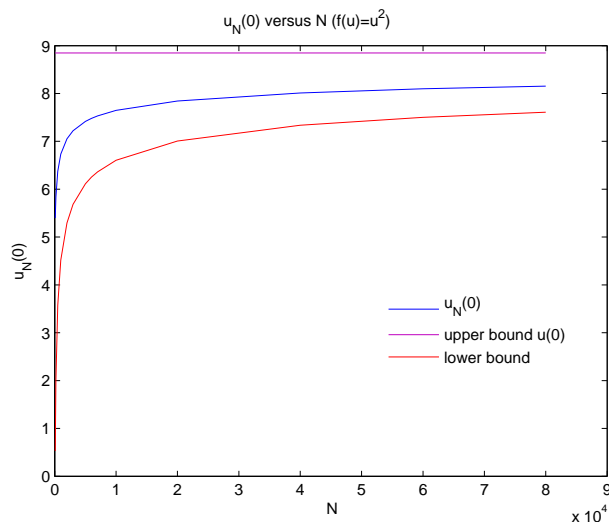


FIG. 4.2 – Solution explosive dans le cas où $f(u) = u^2$

Résultats numériques. Tous les résultats présentés ici se trouvent également dans [2]. Nous avons tout d’abord montré que dans le cas où $f(u) = u^2$, la solution numérique obtenue avait bien le bon comportement, notamment au voisinage du bord (voir figure 4.2).

Ensuite, nous avons étudié les propriétés des solutions dans le cas où $f(u) = u^2(1 + \cos(u))$. Nous avons tout d’abord montré qu’il existait une infinité de solutions à l’équation 4.4, et nous en avons approché quelques-unes (voir figure 4.3).

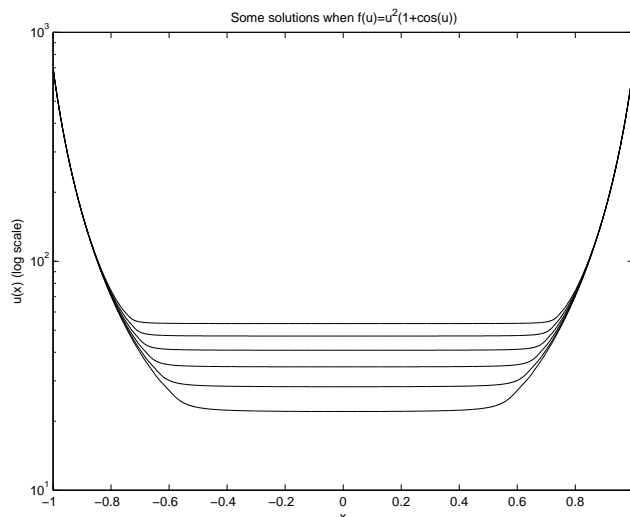


FIG. 4.3 – Solution explosive dans le cas où $f(u) = u^2(1 + \cos(u))$

Dans ce cas, nous avons pu observer que toutes les solutions avaient le même comportement asymptotique, comme prévu par la théorie.

4.3.2 Directions de recherche.

Nous travaillons actuellement sur le flot des solutions explosives sur le bord de l'équation parabolique [18]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ u(t, x) = +\infty & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \quad (4.7)$$

la fonction u_0 pouvant éventuellement être égale à $+\infty$. Remarquons tout d'abord qu'une solution du problème elliptique (4.4) est une solution stationnaire du problème parabolique (4.7). L'objectif est ici d'étudier les propriétés des solutions : existence, unicité, propriétés qualitatives et convergence vers une solution stationnaire.

Au niveau numérique, il est tout à fait possible d'utiliser les algorithmes développés dans le cas elliptique après une discrétisation en temps du type Euler de la partie temporelle de l'équation. Toutefois, il est plus efficace d'utiliser une méthode à pas fractionnaire, que nous allons expliciter.

Découpons l'intervalle de temps $(0, T)$ en sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}[$ avec $t_i = i \times \Delta t$, pour $i = 0, \dots, N_t - 1$, et $\Delta t = \frac{T}{N_t}$. Remplaçons la donnée $+\infty$ sur le bord du domaine par une valeur finie N choisie à l'avance. Il est alors possible d'approcher la solution du problème (4.7) sur chaque sous-intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}[$ par (une approximation $U(t_i, \cdot)$ de la solution $u(t_i, \cdot)$ au temps t_i étant connue) :

- Sur $[t_i, t_{i+1}[$, résoudre en chaque point $x \in \Omega$ l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + f(v) = 0 & \text{dans } [t_i, t_{i+1}] \\ v(t_i, \cdot) = U(t_i, \cdot) \end{cases} \quad (4.8)$$

- Sur le même pas de temps, résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \Delta U = 0 & \text{dans } [t_i, t_{i+1}] \times \Omega \\ U(t, \cdot) = N & \text{sur } [t_i, t_{i+1}] \times \partial\Omega \\ U(t_i, \cdot) = v(t_{i+1}, \cdot) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.9)$$

Remarques :

- Cette suite de problèmes est nettement plus facile que le problème initial. En effet, le premier sous-problème n'est autre qu'une simple équation différentielle, qui peut même être résolue à la main de façon exacte, selon la forme de f . Et même lorsque cela n'est pas possible, une méthode de Runge-Kutta est très efficace pour résoudre ce problème. Le second sous-problème est également très classique, puisqu'il s'agit d'une simple équation de la chaleur linéaire.
- Cette méthode est connue sous le nom de méthode de splitting [Bao03]. Elle est d'ordre 1. Il en existe une version plus précise (d'ordre 2). Pour cela, il suffit de résoudre la première équation sur le demi-pas de temps $[t_i, t_{i+1/2}]$ avec $t_{i+1/2} = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}$, puis la seconde sur le pas de temps $[t_i, t_{i+1}]$, et enfin de nouveau la première sur le demi-pas de temps $[t_{i+1/2}, t_{i+1}]$.

Afin d'achever ce travail, il reste encore à contrôler les différentes approximations utilisées, ce qui nous permettra de faire une étude numérique sur les propriétés qualitatives des solutions de cette équation.

Deuxième partie

Parcours professionnel

Chapitre 5

Parcours professionnel

5.1 Coordonnées

Nom :	Serge Dumont
Date de naissance :	Né le 2 novembre 1969 à Uzès (Gard)
Situation :	marié, 2 enfants
Adresse professionnelle :	LAMFA UPJV CNRS UMR 6140 Université de Picardie Jules Verne Faculté de mathématiques et d'informatique 33, rue Saint-Leu 80 039 Amiens Cedex
Adresse personnelle :	16, rue André Chenier 80 000 Amiens
Adresse électronique :	serge.dumont@u-picardie.fr
Page Web :	http://www.mathinfo.u-picardie.fr/dumont/
Section CNU :	26 (depuis mai 2006, 60 auparavant)

5.2 Parcours professionnel

- **Maître de Conférences** de l'Université de Picardie Jules Verne, depuis Septembre 1997.
- **Attaché Temporaire d'Enseignements et de Recherche** à l'Université de Picardie Jules Verne, de septembre 1995 à août 1997.
- **Docteur de l'université de Montpellier 2**, spécialité : Analyse Appliquée.

Thèse de doctorat « *Ondelettes, homogénéisation périodique et élasticité* »

dirigée par Michel Jean et Frédéric Lebon,

soutenue le 16 janvier 1996 (félicitations du jury).

Financement : Allocation de recherche, monitorat de l'enseignement supérieur.

- **DEA** de mathématiques et mécanique théorique
Université de Montpellier 2, Mémoire : « *Ondelettes et EDP : étude bibliographique* »
dirigée par Frédéric Lebon obtenue en juin 1992, mention bien.

5.3 Activités d'enseignement

- Optimisation : chargé de cours et de TD, en 2003-2004 dans le DEA d'Analyse Appliquée (Université de Picardie), depuis septembre 2004 dans le master de mathématiques (Université de Picardie), cours commun 1ère et 2ème année.
- Mécanique des milieux continus : chargé de cours et de TD au sein de la maîtrise de mathématiques (Université de Picardie), puis dans le DEA d'Analyse Appliquée (Université de Picardie).
- Modélisation : chargé de cours dans la préparation à l'agrégation de mathématiques (Université de Picardie), depuis septembre 2000.
- Programmation : chargé de cours en master de mathématiques, première année. Objectif : initiation à des logiciels de mathématiques, maple, matlab, scilab.
- Analyse matricielle : chargé de TD en troisième année de licence de mathématiques, depuis septembre 2004, puis cours depuis 2007.
- Mécanique du point : chargé de TD en deuxième année de DEUG, de 1992 à 1995 à l'Université de Montpellier 2, de 1995 à 2003 à l'Université de Picardie.

Autres responsabilités d'enseignement :

- Je suis responsable des stages du master 2 “ Analyse Appliquée et Modélisation ” de la faculté de mathématique et d'informatique.
- J'ai été responsable de la maîtrise de mathématiques, mention ingénierie mathématique en 1999-2001 et 2002-2003 (trois années).

5.4 Activités d'encadrement et de recherche

Co-encadrement de thèse : Toutes les thèses que je co-encadre ont fait l'objet d'une autorisation par le Conseil Scientifique.

1. Je co-encadre la thèse de Sylvain Lefebvre (50% avec Olivier Goubet) sur le problème du balancement spatial, thèse qui sera soutenue en 2007 (financement bourse région, situation actuelle du doctorant : ATER à l'IUT de Brives).
2. Je co-encadre la thèse de Benoit Bartoux (50% avec Olivier Goubet) sur le problème de l'assemblage par la mesure (financement : bourse BDI CNRS-région, contrat d'accompagnement Airbus).

3. Je co-encadre la thèse de Julien Herbaut (50% avec Nouredine Igbida) sur la modélisation du comportement d'un tas de sable (financement : bourse MENRT).

Encadrements de stages de DEA ou master 2 des étudiants :

Sauf mention contraire, tous ces étudiants sont issus du master deuxième année (ou anciennement DEA) d'Analyse et de Modélisation Mathématique d'Amiens.

1. Ould Bah Hanani, sur une approche micro-macro pour la modélisation du comportement des matériaux granulaires, de février à juillet 2007 (50% avec Jérôme Fortin).
2. Benoit Bartoux, sur une pré-étude technique de l'assemblage simultané à N éléments, de février à juillet 2006 (50% avec Olivier Goubet), financé par Airbus Méaulte.
3. Franck Poaty, sur une approche probabiliste pour la modélisation du comportement d'un tas de sable, février à juillet 2006 (50% avec Nouredine Igbida).
4. Nicolas Holleville, sur l'approximation numérique du comportement d'un tas de sable, février à juillet 2005 (50% avec Nouredine Igbida).
5. Lucius Ramifidisoa, sur la génération assistée de gamme d'assemblage en aéronautique, février à juillet 2003 (50% avec Gilles Dequen).
6. Sylvain Lefebvre, sur un problème d'assemblage en aéronautique, mars à septembre 2002 (33% avec Olivier Goubet et Hugo Falgarone), ce mémoire de DEA a eu lieu en collaboration avec le centre commun de recherche d'EADS de Suresne, et a été financé par celui-ci.
7. Rémi Durand, sur le thème : Ondelettes et conditions aux limites – Etude bibliographique, mars à septembre 2002 (100%).

Encadrements de postdoctorants :

1. Youssef Ouafik, *modélisation, analyse et simulation numérique du comportement d'un matériau granulaire*, de novembre 2007 à novembre 2008, (avec Jérôme Fortin).

5.5 Valorisation, Relations avec le monde industriel et socio-économique

5.5.1 Projet GrainDeSable

Suite à un travail débuté en 2002, je suis le porteur d'un projet qui a obtenu le soutien de l'ANR (programme Jeune Chercheur no. JC05-41831). Ce projet, d'un montant de 54 000 euros, comprenant 7 participants, prévoit notamment l'emploi d'un post-doctorant pour une durée d'un an (à compter d'Octobre 2007). Ce travail consiste en l'étude numérique et théorique du comportement d'un tas de sable. J'ai déjà co-encadré (50%) deux étudiants de master 2 sur ce sujet. Une thèse financée par une bourse ministérielle que je co-encadre à 50% a commencé.

5.5.2 Projet Tolérants

Je travaille également à un projet qui a obtenu le soutien d'HTSC (Hommes, Technologies et Systèmes Complexes), dans le cadre du contrat de plan Etat-Région. Mon travail dans ce projet consiste à concevoir des algorithmes permettant l'assemblage au mieux des pièces imparfaites à partir de leurs mesures (balancement spatial), cet assemblage devant répondre à certaines contraintes (géométriques, ...). J'ai notamment co-encadré en 2002 Sylvain Lefebvre lors de son stage de DEA en 2002 (33% en collaboration avec EADS-CCR), puis lors de sa thèse (50%) qu'il devrait soutenir dans un avenir proche au sein de notre laboratoire. En 2005, j'ai co-encadré le stage de fin d'étude de Benoit Bartoux, alors étudiant à l'ISTIL de Lyon. Ce stage a été effectué à l'usine d'Airbus Méaulte et portait sur le balancement spatial. Ce stage s'est poursuivi par une thèse financée par une bourse BDI-CNRS Région que je co-encadre à 50% et qui est accompagnée d'un contrat de recherche entre le LAMFA et Airbus Méaulte (78 000 euros sur trois ans), dont je suis co-responsable.

5.5.3 Projet Brancusi : Conditions aux bords explosives, soutenu par Egide (no. 08915PG)

Ce travail consiste en l'étude des propriétés qualitatives des solutions explosives d'équations aux dérivées partielles non linéaires, tant au niveau théorique que numérique. Ce projet m'a amené à effectuer deux séjours d'une semaine en Roumanie (Université de Craiova) du 21 au 28 avril 2005 et du 12 au 16 septembre 2006. Un article sur le sujet est publié dans *Advances in non linear studies* [2].

5.5.4 Action intégrée : Dissipation et asymptotique, soutenue par le CNRS

Ce projet consiste en l'étude des propriétés qualitatives (régularité) des solutions de l'équation de Shrödinger. Ce projet m'a amené à effectuer deux séjours d'une semaine au Maroc (Université de Marrakech) du 12 au 19 Septembre 2005 et du 28 octobre au 4 novembre 2006. Un article sur le sujet va paraître [1].

5.5.5 Projet MASOH, soutenu par l'INRIA

MASOH (modélisation analyse et simulation des ondes hydrodynamiques) est un projet INRIA Méditerranée 3+3 qui vise à la compréhension des phénomènes de propagation d'ondes hydrodynamiques et à la réalisation de codes de simulation numérique pour ces problèmes. Il fédère académiquement autour de cette thématique des chercheurs des équipes : Laboratoire de Mathématiques Paul Painlevé (Lille 1), LAMFA (UPJV), Departamento de Matemática aplicada de Granada (Espagne), Département de Mathématiques de l'Université de Monastir (Tunisie), Equipe EDP et Calcul Scientifique la FSTg de Marrakech (Maroc). Dans ce cadre, j'ai fait un séjour au sein de l'Université de Monastir du 23 février au 1^{er} mars 2007, et un autre est prévu du 1^{er} au 8 septembre 2007.

5.5.6 GdR MeGe

J'ai participé à l'élaboration du projet de GdR MeGe (Couplages multiphysiques et multi-échelles en mécanique géo-environnementale), dirigé par O. Millet (LEPTAB, Université de La Rochelle), F. Nicot (CEMAGREF, Grenoble) et D. Kondo (LML, Université de Lille 1). Je suis responsable de la communication et du site web avec Jérôme Fortin. A ce titre, j'ai réalisé le site web du GdR, accessible à l'adresse <http://www.univ-lr.fr/gdr-mege/>.

5.5.7 Projet FLUPARTI

Je participe au projet FLUPARTI, soutenu par la région Picardie et qui vise à étudier la stabilité des digues cotières sous l'effet de la houle. Ce projet, d'une durée de trois ans, réunit des membres du LAMFA (mathématiciens), du LTI (mécaniciens) de l'UPJV, ainsi que des physiciens de l'UTC et du CEMAGREF. Le financement de la région Picardie prévoit en particulier le financement d'une thèse.

5.6 Responsabilités collectives

5.6.1 Commissions de spécialistes

J'ai été membre titulaire élu et assesseur de la 60ème section de l'Université de Picardie de 2000 à 2004. Ensuite, et jusqu'en mai 2006, j'ai été membre suppléant de cette commission et membre extérieur suppléant de la commission de spécialistes 60ème section de l'Université de Montpellier II. J'ai eu à démissionner de ces commissions suite à mon changement de section CNU en mai 2006.

je suis actuellement en 26ème section.

5.6.2 Communication du laboratoire

Depuis 2002, je suis responsable communication du LAMFA. A ce titre, j'organise les journées portes ouvertes (lycéens, enseignants du secondaire, public, ...) ainsi que les manifestations liées à la fête de la science. Je m'occupe également des prépublications du laboratoire. De plus, je suis devenu correspondant régional de la SMAI depuis février 2007.

5.6.3 Co-organisation de groupes de travail

- Bestfit : ce groupe de travail bi-mensuel est commun aux laboratoires de mathématiques, d'informatique (LaRIA) et d'Automatique (CREA) d'Amiens. Le sujet d'étude en est l'optimisation (convexe/non convexe, discret/continu).
- GTA3 : ce groupe de travail hebdomadaire est interne à l'équipe d'analyse appliquée d'Amiens. L'objectif de ce groupe de travail est de faire connaître à l'ensemble de l'équipe les sujets de recherche de chacun de ses membres afin de favoriser les collaborations. Ce groupe existe depuis 2000, et je le co-organise depuis septembre 2003.

5.6.4 Organisation de journées au sein du laboratoire

- De 2000 à 2005, je co-organisais annuellement une journée du laboratoire intitulée “ Calcul Scientifique et Modélisation Mathématique ”. Nous en sommes actuellement à la septième édition. Cette journée a une renommée régionale avec la participation des mécaniciens et mathématiciens de l’Université Technologique de Compiègne et du laboratoire de mathématiques de Lille.
- J’ai organisé avec Nouredine Igbida une journée sur le thème des matériaux granulaires au sein du LAMFA, le 13 mars 2006.

5.6.5 Divers

J’ai été membre élu du conseil de gestion de l’UFR de mathématiques et d’informatique de l’Université de Picardie de septembre 2003 à mars 2005.

5.7 Rayonnement et récompenses

J’ai participé à deux jurys de thèse :

- Abdelghafour Atlas, *Analyse mathématique et numérique du comportement des solutions d’équations d’ondes hydrodynamiques, modèle de type Boussinesq et KdV*, soutenue le 26 juin 2006 à l’Université de Picardie.
- Thi.-Tho-Vong Nguyen, *De la température aux sources de chaleur*, soutenue le 18 avril 2001 à l’université de Montpellier 2.

Je réfère des articles pour la revue Journal of Applied Mechanics et pour les Mathematical Reviews.

Je suis récipiendaire de la PEDR depuis octobre 2006.

Chapitre 6

Liste de Publications

Bibliographie

6.1 Revues internationales à comité de lecture

- [1] *Discrete Schrödinger equations and dissipative dynamical systems*, M. Abounouh, J.P. Chehab, **S. Dumont**, O. Goubet, H. Al Moatassine, Communications on Pure and Applied Analysis, à paraître.
- [2] *Back to the Keller-Osserman Condition for Boundary Blow up Solutions*, **S. Dumont**, L. Dupaigne, O. Goubet, V. Radulescu, Advances in Non Linear Studies **7** (2007), 271-298.
- [3] *Mesh free method and boundary conditions*, **S. Dumont**, O. Goubet, T. Ha-Duong, P. Villon, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006 ; 67 :989-1011.
- [4] *Regularity of minimizing maps with values in S^2 and some numerical simulations*, P. Courilleau, **S. Dumont**, R. Hadiji, Advances in Mathematical Sciences and Applications, vol. 10, no. 2, pp. 711-733, 2000.
- [5] *A numerical tool for periodic heterogeneous media, application to interface in Al/SiC Composites*, **S. Dumont**, F. Lebon, A. Ould Khaoua, Journal of Applied Mechanics, vol. 67, no. 1, pp 214-217, 2000.
- [6] *Wavelets-Galerkin method for plane elastostatics*, **S. Dumont**, F. Lebon, Computational and Applied Mathematics, Vol. 18, no. 2, pp. 127-142, 1999.
- [7] *Wavelets-Galerkin method for periodic heterogeneous media*, **S. Dumont**, F. Lebon, Computers and Structures, Vol. 61, no. 1, pp. 55-65, Juillet 1996.
- [8] *Representation of plane elastostatics operators in Daubechies wavelets*, **S. Dumont**, F. Lebon, Computers and Structures, Vol. 60, no. 4, pp. 561-569, Mai 1996.

6.2 Chapitres d'ouvrages

- [9] *Méthodes sans maillage et conditions aux limites*, **S. Dumont**, Traité MIM : Alternatives et extensions à la méthode des éléments finis, Hermès, pp. 383-424, 2006.
- [10] *Application of the wavelet-element method to linear random materials*, **S. Dumont**, F. Lebon, Lecture notes in applied and computational mechanics, vol 14, pp. 329-338 (Eds. Frémond et Maceri), Springer, 2004.

6.3 Revues nationales à comité de lecture

- [11] *Wavelets and PDE's : on two examples in mechanics*, **S. Dumont**, F. Lebon, Thi-To-Vong N'Guyen, *Revista Ciencias Matematicas*, vol. 19, pp. 75-88, 2001.

6.4 Articles soumis

- [12] *Sparse polynomial approximations of the Poisson equation over hypercubes*, C. De Luigi, **S. Dumont**, S. Maire, *Applied Numerical Mathematic*, soumis.
- [13] *Effective properties of Linear random Materials : Application to AL/SiC and Resin/Glass composites*, **S. Dumont**, F. Lebon, *Computational Mechanics*, en révision.
- [14] *Back on a Dual Formulation for the growing sandpile problem*, **S. Dumont**, N. Igbida, *European Journal of Applied Mathematics*, soumis.

6.5 Notes internes

- [15] *Modélisation de l'évolution d'un tas de sable : rhéologie des écoulements de surface*, **S. Dumont**, J. Fortin, note interne, prépublication du LAMFA no. 2008-05.
- [16] *Ondettes et équations aux dérivées partielles*, **S. Dumont**, F. Lebon, Note interne du LMGC no. 93-1, Octobre 1993.

6.6 Thèse

- [17] *Ondettes, Homogénéisation périodique et Elasticité*, **S. Dumont**, Thèse, Université Montpellier II, Janvier 1996.

6.7 Articles en cours de rédaction

- [18] *Boundary blow up solution for a non linear parabolic problem*, **S. Dumont**, L. Dupaigne, O. Goubet, N. Igbida.
- [19] *An algorithm for constrained best-fit alignment*, **S. Dumont**, O. Goubet, S. Lefebvre.
- [20] *Rheology of granular materials with a Discrete Elements Method*, **S. Dumont**, J. Fortin.

6.8 Communications avec actes

- [21] International conference on numerical computation in geotechnical engineering, *Numerical Modeling of Granular Material using DEM*, M. Guessasma, J. Fortin, **S. Dumont**, K. Aït Mokhtar, Skikda, 27-29 Octobre 2008.

- [22] 9th US National Congress on Computational Mechanics, *Rheology of granular materials with a Discrete Elements Method*, J. Fortin, **S. Dumont**, O.-B. Hanani, p. 237, San Francisco, 22-26 juillet 2007.
- [23] 8ème Colloque National en Calcul des Structures, *Méthodes sans maillage et matériaux aléatoires* **S. Dumont**, F. Lebon, **2**, pp. 383-388, mai 2007.
- [24] 7ème Colloque National en Calcul des Structures, *Méthodes sans maillage et conditions aux limites*, **S. Dumont**, O. Goubet, Tuong Ha-Duong, P. Villon, **2**, pp. 197-204, mai 2005.
- [25] 5ème Colloque National en Calcul des Structures, *Une nouvelle technique de prise en compte des conditions aux limites pour les méthodes sans maillage : application à la transformée en ondelettes*, **S. Dumont**, P. Villon, **2**, pp. 651-658, mai 2001.
- [26] SMIRT-16, *A wavelet-element method (WEM) for strongly heterogeneous linear and non linear media*, **S. Dumont**, F. Lebon, Washington DC, août 2001.
- [27] European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, *Wavelet-Galerkin method, Application to interface in composites*, **S. Dumont**, F. Lebon, p. 318, Barcelone, 11-14 sept. 2000.
- [28] European Conference on Computational Mechanics Solids, *A numerical study of randomly defined materials*, **S. Dumont**, F. Lebon, Munich, 31 août-3 sept. 1999.
- [29] 4ème International Congress on Industrial and Applied Mathematics, *Wavelet-Galerkin method, application to interface in composites*, **S. Dumont**, F. Lebon, A. Ould Khaoua, Edimbourg, Ecosse, juillet 1999.
- [30] 3ème Biennial Joint Conference on Engineering Systems Design and Analysis, *Wavelets and periodic homogenization*, **S. Dumont**, F. Lebon, Proc. ESDA, vol.6, pp. 229-236, ASME, New York, juillet 1996.
- [31] 2ème Colloque National en Calcul des Structures, *Elasticité et ondelettes : formulations mathématiques et mise en oeuvre numérique*, **S. Dumont**, F. Lebon, P. Alart, pp. 827-832, Hermès, mai 1995.

6.9 Communications sans acte ou avec actes à diffusion restreinte

- [32] Journée "Modélisation des Structures avec les méthodes sans maillage", organisée par l'association de Calcul des Structures et Modélisation (CSMA), *Ondelettes et conditions aux limites*, UTC Compiègne, mars 2001.
- [33] Journée "Alternatives à la méthode des éléments finis", organisée par l'association de Calcul des Structures et Modélisation (CSMA), *Les méthodes à base d'ondelettes en mécanique du solide*, Perpignan, 5 décembre 1997.
- [34] EUROMECH Colloquium 356, Transform methods in solid mechanics, *Wavelet-Galerkin method in elastostatics*, **S. Dumont**, F. Lebon, Munich, octobre 1996.

6.10 Séjours à l'étranger

1. Université de Purdue (USA), du 21 octobre au 3 novembre 2007, dans le cadre du projet "Water-waves" de collaboration LAMFA/Université de Purdue, projet soutenu par le CNRS.
2. Université de Monastir (Tunisie), du 23 février au 1^{er} mars 2007, dans le cadre du projet INRIA MASOH.
- 3-4 Université de Craiova (Roumanie), dans le cadre du programme Européen d'échange "Brancusi" no. 08915PG, du 21 au 27 avril 2005, et du 4 au 10 septembre 2006.
- 5 Université de Marrakech (Maroc), dans le cadre de l'action intégrée "Dissipation et asymptotique", soutenue par le CNRS, du 12 au 19 septembre 2005.
- 6-7 Université de Marrakech (Maroc), dans le cadre d'un accord CNRS/CNRST, sur le thème "couplage fluide-sable", du 28 octobre au 4 novembre 2006 et du 1 au 8 septembre 2007.
- 8 Université Polytechnique de Barcelone, au sein du laboratoire LACAN, sous la direction de A. Huerta, du 3 au 5 juillet 2006.

6.11 Séminaires sur invitation

1. Séminaire "Applied Mathematics" de l'Université de Purdue (USA), 26 octobre 2007, titre : *The problem of growing sandpiles : models and numerical simulations.*
2. Séminaire au groupe de travail KPZ, Université d'Orléans, 22 février 2007, titre : *Modélisation d'un tas de sable.*
3. Séminaire à l'école d'ingénieur de Monastir (ENIM), 26 février 2007, titre : *Modélisation d'un tas de sable.*
4. Séminaire au Laboratoire LACAN, Université Polytechnique de Barcelone, 3 juillet 2006, titre : *Boundary conditions and mesh free methods.*
5. Séminaire de l'équipe "Analyse numérique" du laboratoire de mathématiques de l'Université Paris Sud (Orsay), 20 janvier 2005, titre : *Méthodes sans maillage et conditions aux limites.*
6. Séminaire du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université Technologique de Compiègne, 19 octobre 2004, titre : *Contribution aux méthodes sans maillage.*

Chapitre 7

Bibliographie

Bibliographie

- [A01] A. A. Aradian, *Quelques problèmes de dynamiques d'interfaces molles*, thèse de doctorat, Université Paris 6, 2001.
- [Ba73] I. Babuska, *The finite element method with Lagrange multipliers*, *Numer. Math.*, **20**, 179-192, Springer-Verlag, 1973.
- [BBO03] I. Babuska, U. Barnerjee, J. E. Osborn, *Survey of meshless and generalized finite element methods : a unified approach*, *Acta Numerica*, 1-125, 2003.
- [BP06] J. W. Barret, L. Prigozhin, *Dual formulation in Critical State Problem*, *Interfaces and Free Boundaries*, **8**, 349-370, 2006.
- [Bao03] W. Bao and D. Jacksch, *An explicit unconditionally stable numerical method for solving damped nonlinear Schrödinger equation with focusing nonlinearity*, *SIAM J. Numer. Anal.*, **41**, 1406, 2003.
- [Bey92] G. Beylkin, *On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets*, *SIAM J. Anal. Num.*, **29**, 1716–1740, 1992.
- [BCR91] G. Beylkin, R. Coifman, V. Rokhlin, *Fast wavelet transform and numerical Algorithms I*, *Comm. Pure and Applied Math.*, **44**, 141-193, 1991.
- [B01] D. Bonamy, *Phénomènes collectifs dans les matériaux granulaires*, thèse de doctorat, Université Paris XI, 2001.
- [BCRE94] J.-P. Bouchaud, M. E. Cates, J. Ravi Prakash, S. E. Edwards, *A model for the dynamics of sandpile surfaces*, *J. Phys. Fr.* 1, **4**, 1383, 1994.
- [BRG98] T. Boutreux, E. Raphael, P. G. de Gennes, *Surface flows of granular materials : a modified picture for thick avalanches*, *Phys. Rev. E*, **58**, 4692, 1998.
- [BTV99] P. Breitkopf, G. Touzot, P. Villon, *Méthodes alternatives aux éléments finis : collocation diffuse à double grille*, 4th Colloque National en Calcul des Structures, **45**, 485-560, 1992.
- [CDF92] A. Cohen, A. Daubechies, J. C. Feauveau, *Biorthogonal bases of compactly supported wavelets*, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **45**, 485-560, 1992.
- [DK92] W. Dahmen, A. Kunoth, *Multilevel preconditionning*, *Numer. Math.*, **63**, 315-344, 1992.
- [Dau88] I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, *Comm. in pure and appl. Math.*, **41**, 909–998, 1988.
- [dG95] P. G. de Gennes, *Dynamique superficielle d'un matériau granulaire*, *C. R. Acad Sci Paris Série II*, **321**, 501, 1995.

- [Des99] G. Deslaurier, S. Dubuc, D. Lemire, *Une famille d'ondelettes bi-orthogonale sur l'intervalle obtenue par un schéma d'interpolation itérative*, Ann. Sci. Math. Québec, **23**, no. 1, 37–48, 1999.
- [DAD99] S. Douady, B. Andréotti, A. Daerr, *On granular surface flow*, The Europ. Physical J. B, **11**, 131-142, 1999.
- [ET73] I. Ekeland, R. Temam, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod-Gauthier-Villars, 1973.
- [EFG97] L. C. Evans, M. Feldman, R.F. Gariepy, *Fast/Slow diffusion and collapsing sandpile*, J. Differential Equations, **137**, 166-209, 1997.
- [ER98] L. C. Evans, F. Rezakhanlou, *A stochastic model for sandpiles and its continuum limits*, Comm. Math. Phys., **197**, no2, 325-345, 1998.
- [FFV06] M. Falcone, S. Finzi Vita, *A finite difference approximation of a two-layer system for growing sandpiles*, SIAM J. Sci. Comput., **28**, 1120-1132, 2006.
- [F00] J. Fortin, *Simulation numérique de la dynamique des systèmes multicorps appliquée aux milieux granulaires*, thèse de doctorat, Université de Lille 1, 2000.
- [Glo95] R. Glowinski, V. Girault, *Error analysis of a fictitious domain method applied to a Dirichlet problem*, Japan . Industr. Appl. Math., **12**, 485–514, 1995.
- [GLT] R. Glowinski, J.-L. Lions et R. Trémollières, *Analyse numérique des inéquations variationnelles*, Dunod, Paris, 1976.
- [Gris85] P. Grisvard, *Elliptic problems in non-smooth domains*, Pitman advanced publishing program, Boston, 1985.
- [HK99] K. P. Hadeler, C. Kuttler, *Dynamical model for granular matter*, Granular Matter, **2**, 9, 1999.
- [HH63] Z. Hashin, S. Shtrikman, *A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials*, Journal of Mechanics and Physics of Solids, **11**, 127-140, 1963.
- [Ke57] J. Keller, *On solutions to $\Delta u = f(u)$* , Communications on Pure and Applied Math, **10**, 503-510, 1957.
- [Kun01] A. Kunoth, *Wavelet Techniques for the fictitious domain–Lagrange multiplier approach*, Numer. Algorithms, **27**, no. 3, 291–316, 2001.
- [M89] S. Mallat, *Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of L^2* , Transaction of the American Mathematical Society, vol. 315, p. 69-87, Sept. 1989.
- [Mal98] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, Academic press, 1998.
- [M94] J.-J. Moreau, *Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials*, Eur. J. Mech. A/Solids, **13**, 93, 1994.
- [Nit74] J.A. Nitsche, *Convergence of nonconforming methods*, Proc. Sympos. Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, 1974.
- [Os57] R. Osserman, *On the inequality $\Delta u \geq (f(u))$* , Pacific J. Math., **7**, 1641-1647, 1957.

- [PZ01] L. Prigozhin, B. Zaltzman, *Two continuous models for the dynamics of sandpile surfaces*, Physical Reviews E, **63**, 2001.
- [PZ03] L. Prigozhin, B. Zaltzman, *On the approximation of the dynamics of sandpile surfaces*, Portugaliae Mathematica, **60**, fasc. 2, 2003.
- [Prud02] S. Prudhomme, F. Pascal, J.T. Oden, A. Romkes, *Review of a priori error estimation for discontinuous Galerkin methods*, Technical report n. RT00-02, Mathematical lab., Paris-Sud University, 2002.
- [R06] J. Rahmoun, *Modélisation du comportement des matériaux granulaires par des approches discrètes et continues*, Université de Lille 1, 2006.
- [RBDA05] M. Renouf, D. Bonamy, F. Dubois, P. Alart, *Numerical simulation of two-dimensional steady granular flows in rotating drum : On surface flow rheology*, Physics of Fluids, **17**, 2005.
- [SH89] S.B. Savage, K. Hutter, *The motion of a finite mass of granular material down a rough incline*, J. Fluid Mech., **199**, 177-215, 1989.
- [To91] S. Torquato, *Random heterogeneous media : Microstructure and improved bounds on effective properties*, Applied Mechanics Review, **44**, 37–76, 1991.
- [Wen79] W.L. Wendland, E. Stephan, G.C. Hsiao, *On the integral equation method for the plane mixed boundary value problems of the Laplacian*, Math. Method Appl. Sci., **1**, no. 3, 265–321, 1979.
- [Wel95] R.O. Wells Jr., X. Zhou, *Wavelets solutions for the Dirichlet problems*, Numer. Math., **70**, 379–396, 1995.