

UNIVERSITE MONTPELLIER II

— SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC —

THESE

Présentée à l'Université de Montpellier Sciences et Techniques du Languedoc
pour obtenir le diplôme de DOCTORAT

SPECIALITE : Mathématiques appliquées et applications des mathématiques
Formation Doctorale : Mathématiques et Mécanique Théorique

ONDELETTES HOMOGENEISATION PERIODIQUE ET ELASTICITE

par
Serge DUMONT

Soutenue le 15 Janvier 1996 devant le jury composé de :

MM. Olivier MAISONNEUVE, Professeur, Montpellier II	Président
Pascal AUSCHER, Professeur, Université de Picardie	Examinateur
Michel JEAN, Directeur de Recherche, LMGC Montpellier	Directeur de Thèse
Frédéric LEBON, Maître de Conférences, Montpellier II	Examinateur
Pierre SUQUET, Directeur de Recherche, LMA Marseille	Examinateur
Claude SURRY, Professeur, ENISE Saint-Etienne	Rapporteur
Pierre VILLON, Professeur, UTC Compiègne	Rapporteur

Rapporteurs :

MM. Jacques LIANDRAT, Professeur, Aix-Marseille 2
Claude SURRY, Professeur, ENISE Saint-Etienne
Pierre VILLON, Professeur, UTC Compiègne

à Agnès

Remerciements

Cette étude a été réalisée dans le Laboratoire de Mécanique et Génie Civil de l'Université Montpellier II, et je tiens à souligner tout d'abord combien a été fructueuse la collaboration avec les membres de ce laboratoire, dont en particulier Frédéric Lebon, sans qui tout ce travail n'aurait pu être mené à bien. Son soutien, son appui constant ainsi que sa gentillesse m'ont été d'un grand secours lors des moments difficiles.

Je remercie également Michel Jean, qui a accepté de diriger cette thèse et pour qui j'ai la plus grande admiration, autant pour ses qualités humaines que scientifiques.

Je ne dois pas oublier Olivier Maisonneuve, le directeur de ce laboratoire, qui a accepté de faire partie du jury malgré son emploi du temps, et qui m'a beaucoup fait progresser au niveau de la présentation de mon travail.

Trois personnes ont accepté de juger ce travail, Jacques Liandrat, Claude Surry et Pierre Villon, je leur exprime ici toute ma gratitude pour le travail qu'ils ont fait, et les apports qu'ils m'ont amené.

Depuis le début de l'année scolaire, je travaille dans l'Université de Picardie d'Amiens, ce qui n'a pas été sans provoquer quelques complications. Que toutes les personnes qui m'ont aidé lors de cette mutation trouvent ici l'expression de ma gratitude.

A Montpellier, je tiens à remercier Frédéric qui a accompli toutes les tâches administratives à ma place (et Dieu sait qu'elles sont nombreuses !); Gilles, l'ingénieur système, qui n'a pas hésité à venir me secourir, même le week-end, lorsque j'étais en difficulté avec la machine; et enfin notre très efficace et discrète secrétaire Mademoiselle Boulet qui m'a aidé dans les nombreuses démarches administratives.

A Amiens, je tiens à remercier Pascal Auscher qui a bien voulu juger cette thèse et à travers lui toutes les personnes qui, à Amiens, ont aidé à mon intégration dans cette Université.

Enfin, je garderai un souvenir inoubliable de tous les bons moments passés avec les thésards du L.M.G.C. dont bon nombre font partie de mes amis.

Les dernières pensées de ces remerciements iront à mes proches amis et famille, ainsi qu'à ma tendre Agnès qui ont eu à supporter ma mauvaise humeur ou mes doutes, et sans qui tout ceci n'aurait pas été possible.

Table des matières

Notations	7
Introduction générale	13
1 Les ondelettes	17
Introduction	19
1 Historique et rappels	21
1.1 La transformée continue en ondelettes	21
1.2 La transformée discrète en ondelettes	23
1.3 L'analyse multirésolution	25
1.4 Les ondelettes de Daubechies sur \mathbb{R}	27
1.5 Les ondelettes périodiques en dimension 1	32
1.6 Les ondelettes périodiques en dimension 2	35
1.6.1 Bases de $L_p^2(Y)$	36
1.6.2 Bases de $(L_p^2(Y))^2$	38
1.7 Ondelettes et caractérisation des espaces fonctionnels	39
1.8 Conclusion	43
2 Représentation de l'opérateur d'élasticité en bases d'ondelettes	45
2.1 Introduction	45
2.2 Discrétisation de l'opérateur d'élasticité	47
2.2.1 Introduction	47
2.2.2 Le tenseur de rigidité en élasticité plane linéarisée	48
2.2.3 Mise en oeuvre de la méthode de Galerkin	50
2.2.4 Calcul des coefficients de la matrice d'élasticité	52
2.2.5 Remarques sur la structure de la matrice	55

2.3	Calcul des intégrales entre produits de dérivées d'ondelettes	56
2.3.1	Algorithme pyramidal	58
2.3.2	Les intégrales entre produits de dérivées d'ondelettes	62
2.4	Applications numériques	66
2.4.1	Test de validation	66
2.4.2	Résultats et commentaires	67
2.5	Conclusion	75
Conclusion		77
2 L'homogénéisation périodique		79
Introduction		81
1 Principe de l'homogénéisation périodique		83
1.1	Position du problème	83
1.1.1	Milieu homogène équivalent (m.h.é.)	84
1.1.2	Cas d'un matériau périodique	86
1.1.3	Les fonctions rapidement oscillantes	87
1.2	Méthode des moyennes	88
1.2.1	Présentation de la méthode	89
1.2.2	Loi de comportement du matériau homogène équivalent	90
1.3	Développements asymptotiques	95
1.3.1	Présentation de la méthode	95
1.3.2	Loi de comportement du matériau homogène équivalent	97
1.4	Conclusion	98
2 Méthode de Galerkin–Ondelettes pour l'homogénéisation périodique		99
2.1	Introduction	99
2.2	La discrétisation	100
2.2.1	La matrice d'élasticité	100
2.2.2	Choix d'une solution particulière	101
2.2.3	Calcul du second membre	105
2.3	Calcul des coefficients macroscopiques	108
2.4	Exemples numériques	108
2.4.1	Exemple analytique	109
2.4.2	Exemple d'un matériau bicouche	113

2.4.3	Exemples de matériaux de type fibres–matrice	116
2.4.4	Remarques générales	128
2.5	Conclusion	131
Conclusion		133
3 L'élasticité bidimensionnelle linéarisée		135
Introduction		137
1 Formulation mathématique du problème		139
1.1	Écriture du problème	139
1.1.1	Introduction	139
1.1.2	Domaines fictifs	139
1.2	Traitement des conditions aux limites	143
1.2.1	La pénalisation	143
1.2.2	Le Lagrangien	143
1.2.3	Le Lagrangien augmenté	146
1.3	Écriture du problème sous forme variationnelle	147
1.3.1	Recherche de point-selle	147
1.3.2	Unicité de la solution	149
1.4	Conclusion	153
2 Méthode de Galerkin–ondelettes pour l'élasticité linéarisée		155
2.1	Introduction	155
2.2	La discrétisation	156
2.2.1	Calcul des coefficients d'ondelettes de la mesure surfacique	156
2.2.2	La matrice d'élasticité	161
2.2.3	Le second membre	165
2.3	Résolution numérique: la méthode d'Uzawa	167
2.4	Exemples numériques	168
2.5	Conclusion	180
Conclusion		181

Conclusion générale	183
Annexes	189
Annexe I	191
Annexe II	197
Bibliographie	205

Notations

1 – Ensembles

\mathbb{N} Entiers naturels

\mathbb{Z} Anneau des entiers relatifs

\mathbb{R} Corps des nombres réels

Ω Sous-domaine ouvert de \mathbb{R}^2 : $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$

Λ_j Sous-ensemble de \mathbb{N}^2 (j dans \mathbb{N}^*) défini par :

$$\Lambda_j = \left\{ (k_1, k_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 0 \leq k_1 \leq 2^j - 1 ; 0 \leq k_2 \leq 2^j - 1 \right\}$$

on définira sur Λ_j la variable \underline{k} : $\underline{k} = (k_1, k_2) \in \Lambda_j$

2 – Espaces fonctionnels

$L^2(\mathbb{R})$ Ensemble des fonctions réelles, de carré sommable,
muni du produit scalaire : $(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx$
et de norme $\| \cdot \|$ associée au produit scalaire.

$L^2_{loc}(\mathbb{R})$ Ensemble des fonctions réelles, de carré localement intégrable.

$L_p^2(0, 1)$ Ensemble des fonctions 1-périodiques, de carré localement intégrable.
 $L_p^2(0, 1) = \left\{ v \in L_{loc}^2(\mathbb{R}) : v(x+1) = v(x) \quad p.p. \right\}$
 muni du produit scalaire : $(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$
 et de norme $\| \cdot \|$ associée au produit scalaire.
 $L_p^2(0, 1)$ peut être aussi défini comme $L^2(\mathbb{T})$ où \mathbb{T} est le tore \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

— Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , on définit :

$\mathcal{C}^s(\Omega)$ ($s \in \mathbb{R}_*^+$) Espace de Hölder :

On décompose $s = n + r$ où $n \in \mathbb{N}$ et $r \in]0, 1[$. Alors $\mathcal{C}^s(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions f , n fois continument différentiables, et telle qu'il existe une constante c telle que :

$$\left\| \frac{d^n f}{dx^n}(x) - \frac{d^n f}{dx^n}(y) \right\| \leq c \|x - y\|^r \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}$$

— Soit Y le carré $]0, 1[\times]0, 1[\subset \mathbb{R}^2$, on définit :

$L_p^2(Y)$ = $\left\{ v \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2) : v(x_1 + i_1, x_2 + i_2) = v(x_1, x_2) \quad p.p., \forall (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$
 muni du produit scalaire : $(f, g) = \int_Y f(x_1, x_2) g(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

Espaces de Sobolev

$H^s(\mathbb{R}^N)$ ($s \in \mathbb{R}$) Espace de Sobolev :

$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) : (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$
 muni du produit scalaire : $(f, g)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi$

où $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est l'espace des distributions, dual de :

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \forall m, n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |x^m D^n f| = 0 \right\}$

$H^1(\mathbb{R}^N)$ Si $s = 1$, $H^s(\mathbb{R}^N)$ coïncide avec l'espace :

$$H^1(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x_d} \in L^2(\mathbb{R}^N), \quad 1 \leq d \leq N \right\}$$

muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} = \int_{\mathbb{R}^N} \left[u(x) v(x) + \sum_{d=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_d}(x) \frac{\partial v}{\partial x_d}(x) \right] dx$$

$H_p^1(Y)$ = $\left\{ v \in L_p^2(Y) \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x_1} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2) \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2) \right\}$

muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H_p^1} = \int_Y \left[u(x) v(x) + \sum_{d=1}^{d=2} \frac{\partial u}{\partial x_d}(x) \frac{\partial v}{\partial x_d}(x) \right] dx$$

V = $\left(H_p^1(\Omega) \right)^2$ muni de son produit scalaire :

$$(u, v)_V = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left[u_i(x) v_i(x) + \sum_{d=1}^{d=2} \frac{\partial u_i}{\partial x^d}(x) \frac{\partial v_i}{\partial x^d}(x) \right] dx$$

et de sa norme $\|\cdot\|_V$ associée.

— Soit ω un ouvert inclu dans Ω , de frontière $\partial\omega$ décomposée en deux parties $\partial\omega_D$ et $\partial\omega_F$ telles que $\partial\omega = \partial\omega_D \cup \partial\omega_F$ et $|\partial\omega_D| > 0$ ($|\partial\omega_D| = \int_{\partial\omega_D} ds$). On définit :

γ_D Application trace de $\left(H^1(\omega) \right)^2$ sur $\left(H_{00}^{1/2}(\partial\omega_D) \right)^2$;

γ_F Application trace de $\left(H^1(\omega) \right)^2$ sur $\left(H_{00}^{1/2}(\partial\omega_F) \right)^2$;

— Sur la partie $\partial\omega_D$ de la frontière de ω , on définit :

\mathcal{M}_1 = $\left(H_{00}^{1/2}(\partial\omega_D) \right)^2$ et son dual :

\mathcal{M}'_1 = $\left(H^{-1/2}(\partial\omega_D) \right)^2$ pour la dualité :

$$\langle w, \mu_1 \rangle_1 = \int_{\partial\omega_D} w \mu_1 ds$$

\mathcal{M}_1 est muni du produit scalaire : $(u, v)_{\partial\omega_D} = \int_{\partial\omega_D} uv \, ds$

\mathcal{M}_1 est muni de la norme : $\|w\|_{\mathcal{M}_1} = \inf \{ \|v\|_V \quad : \quad \gamma_D(v) = w \}$

\mathcal{M}'_1 est muni de la norme : $\|\mu_1\|_{\mathcal{M}'_1} = \sup_{w \in \mathcal{M}_1} \frac{\langle w, \mu_1 \rangle_1}{\|w\|_{\mathcal{M}_1}}$

3 – Divers

χ_Ω Fonction caractéristique de Ω :

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases}$$

δ_{kl} Symbole de Kronecker :

$$\delta_{kl}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

$\mathcal{M}_p(f)$ Moment d'ordre p d'une fonction f :

$$\mathcal{M}_p = \int_{\mathbb{R}} x^p f(x) \, dx$$

Transformée de Fourier continue

La transformée de Fourier continue d'une fonction f intégrable est définie par :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\omega t} \, dt$$

Cette définition s'étend s'étend aux fonction de $L^2(\mathbb{R})$.

Avec certaines hypothèses sur sur f , on a les propriétés suivantes :

1- Inversion :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{2i\pi\omega t} d\omega$$

2- Effet d'une translation :

$$Si \quad f(\cdot - b) = \tau_b(f) \quad alors \quad \hat{\tau}_b(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{-2i\pi b\omega}$$

3- Effet d'une dilatation :

$$Si \quad f\left(\frac{\cdot}{a}\right) = D_a(f) \quad alors \quad \hat{D}_a(\omega) = a \hat{f}(a\omega)$$

4- Effet d'une dilatation-translation :

$$Si \quad f_{ab}(t) = f\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad alors \quad \hat{f}_{ab}(\omega) = a \hat{f}(a\omega) e^{-2i\pi b\omega}$$

4 – Récapitulation des différents types d'ondelettes

On récapitule dans le tableau suivant les ondelettes définies sur les différents espaces fonctionnels. On rappelle également la notation utilisée pour chaque analyse multirésolution, ainsi que leur dimension.

Espace fonctionnel	Fonction d'échelle	Ondelette (s)	Analyse multirésolution	Dimension
$H^1(\mathbb{R})$	φ_{jk}	ψ_{jk}	V_j	$+\infty$
$H_p^1(0, 1)$	ϕ_{jk}	Ψ_{jk}	\mathcal{V}_j	2^j
$H_p^1(Y)$	$\Phi_{j\underline{k}}$	$\Psi_{j\underline{k}}^1; \Psi_{j\underline{k}}^2; \Psi_{j\underline{k}}^3$	\mathcal{V}_j^2	2^{2j}
$(H_p^1(Y))^2$	$\Phi_{j\underline{k}}^1 = (\Phi_{j\underline{k}}, 0)^t$ $\Phi_{j\underline{k}}^2 = (0, \Phi_{j\underline{k}})^t$	$\Psi_{j\underline{k}}^{11}; \Psi_{j\underline{k}}^{21}; \Psi_{j\underline{k}}^{31}$ $\Psi_{j\underline{k}}^{12}; \Psi_{j\underline{k}}^{22}; \Psi_{j\underline{k}}^{32}$	\mathbf{V}_j	2^{2j+1}

Introduction générale

En mécanique des solides, la résolution de problèmes complexes de taille croissante exige la conception d'algorithmes particulièrement performants, robustes et précis. Les méthodes utilisées jusqu'à présent peuvent être décomposées en deux grandes familles :

— La méthode des éléments finis est la plus utilisée depuis l'avènement de l'informatique. Elle présente plusieurs avantages. En effet, la connaissance de la valeur exacte de la solution aux noeuds permet un traitement simple des conditions aux limites (par pénalisation par exemple). Son principe même permet son adaptation à tous les types de géométries, y compris les plus complexes. L'inconvénient est que la création du maillage reste très coûteuse et difficile, en dimension 3 notamment . De plus, la mise en oeuvre de méthodes de raffinement local ou de remaillage n'est pas sans poser quelques problèmes (respect de critères de taille, critère de raffinement [62], détection des zones à fort gradient [78]). L'idée principale des techniques alternatives est alors de tenter de supprimer la notion de maillage, comme c'est le cas par exemple avec la méthode des éléments diffus [80].

— Une autre méthode couramment utilisée (pour l'homogénéisation périodique en particulier) est basée sur l'analyse de Fourier [64]. Un de ses intérêts réside dans le fait que l'inverse de l'opérateur d'élasticité étant connu dans cette base, cela permet entre autres la mise en oeuvre d'algorithmes itératifs de résolution dans le cas de matériaux hétérogènes [52]. Par contre, elle n'est pas adaptée à tous les types de géométrie, ce qui la cantonne au traitement de problèmes périodiques. De plus, la non localisation dans l'espace physique des fonctions de base entraîne des instabilités à proximité des singularités (phénomène de Gibbs), lesquelles singularités ne sont pas localisables à la simple vue des coefficients de Fourier.

L'utilisation de la transformée discrète en ondelettes apparaît alors comme une alternative à ces deux méthodes, tentant d'une part d'en conserver les avantages, et d'autre part, d'en minimiser les inconvénients.

— La localisation des ondelettes, à la fois dans l'espace physique et dans l'espace spectral, permet de limiter les phénomènes de Gibbs (ce qui diminue le nombre de coefficients nécessaires pour une bonne approximation) et de détecter les singularités locales ainsi que leurs types, directement à la lecture des coefficients d'ondelettes (ce qui permettra d'élaborer des critères de raffinement plus simples qu'avec les éléments finis).

— La structure même d'une base d'ondelettes (translations et dilatations d'une seule fonction) la rend bien adaptée à l'étude de phénomènes où différentes échelles entrent en jeu, ce qui est le cas de l'homogénéisation périodique.

— En revanche, il n'existe toujours pas de base simple sur des géométries autres que le carré (ou le rectangle), mais l'utilisation des domaines fictifs où les conditions aux limites sont introduites par des méthodes de type pénalisation-Lagrangien ou de viscosité peut permettre de pallier ce défaut.

Depuis quelques années, la transformée en ondelettes a d'ailleurs été utilisée pour résoudre plusieurs types d'équations aux dérivées partielles à inconnue scalaire. En effet, dès les années 1980, J. Liandrat, V. Perrier et Ph. Tchamitchian [22], [23], [24], ont traité à l'aide d'ondelettes splines l'équation de Burgers périodique (équation aux dérivées partielles non linéaire à inconnue scalaire). Nous avons traité des problèmes unidimensionnels à coefficients continus à la fois grâce aux techniques présentées par les auteurs précédents ainsi qu'avec les techniques de Galerkin [13]. Depuis, des équations aux dérivées partielles plus complexes, de type Navier–Stokes [9], [10], [34], ou de Poisson [67], [68], [77], [73] ont été abordées pour des problèmes bi ou tridimensionnels. A notre connaissance, il n'existe que peu de travaux sur les équations d'élasticité en mécanique (inconnues vectorielles, couplage des équations), ce qui sera l'objet de ce mémoire.

Notre contribution est de plusieurs ordres :

— dans un premier temps, faisant suite aux travaux de G. Beylkin [4] sur les opérateurs, nous montrons comment représenter l'opérateur d'élasticité en base d'ondelettes de Daubechies.

— nous montrons ensuite qu'il est possible d'appliquer la technique précédente à des problèmes d'homogénéisation périodique. Nous montrons qu'il est alors nécessaire d'introduire des techniques complémentaires de type viscosité afin d'imposer des conditions particulières à la solution.

— nous montrons enfin que l'on applique une méthode de Galerkin–ondelettes à des problèmes d'élasticité sur des ouverts quelconques en la couplant avec une technique de domaines fictifs. Ce problème est un point clef pour la résolution de nombreux problèmes en mécanique des solides (plasticité, grandes déformations, frottement, ...).

L'organisation de ce mémoire se fera comme suit :

Un rappel des différentes ondelettes existantes sera fait dans une première partie en insistant plus particulièrement sur les ondelettes de Daubechies [11] qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire. Ces ondelettes étant à support compact, elles permettent l'utilisation d'algorithmes rapides qui seront décrits par la suite. Nous étudierons enfin comment s'écrit la projection du tenseur d'élasticité dans un tel type de bases (qui aura une structure par bande si l'on utilise des ondelettes à support compact), et nous validerons la technique par le traitement d'un exemple où une solution analytique existe.

Dans la deuxième et troisième partie de ce mémoire, nous montrons qu'il est possible d'utiliser des bases d'ondelettes en mécanique du solide. Pour ce faire, nous avons choisi de nous intéresser à deux domaines de l'élasticité, l'homogénéisation périodique linéarisée en dimension 2, fondamental pour l'étude des matériaux hétérogènes linéaires ou non linéaires, où les phénomènes à différentes échelles entrant en jeu semblent particulièrement adaptés à l'utilisation d'une telle méthode. Nous traiterons également un problème d'élasticité linéarisée avec conditions aux limites, qui est un point clef pour la résolution de presque tous les problèmes non linéaires (lois de comportement complexes, lois de frottement ou d'interfaces,

couplage thermo-mécanique, ...), et où le traitement des conditions aux limites pourra être étudié avec plus de précisions. Chacune de ces deux études fera l'objet d'une partie qui sera décomposée en deux chapitres, le premier traitant des problèmes et rappels théoriques, le second s'intéressant aux aspects numériques.

Partie 1

Les ondelettes

Introduction

La théorie des ondelettes est récente —les premiers résultats datent du début des années 80— et en plein essor, il suffit d’observer le nombre d’articles publiés sur le sujet chaque année et la création d’une revue spécialisée pour s’en convaincre [3], [11], [18], [22], [24], [31]. Elle est de plus en plus utilisée, et dans plusieurs domaines (traitement du signal ou de l’image, mécanique des fluides). Par conséquent, il n’existe pas une seule transformée en ondelettes, mais plusieurs, chacune étant adaptée à un domaine d’application particulier.

Pour le traitement du signal, on utilise en général la transformée continue en ondelettes qui présente la particularité de transformer le signal en image, permettant de mieux étudier les singularités. A cause de cette redondance d’informations, ces ondelettes sont par contre totalement inexploitable pour résoudre des équations aux dérivées partielles (en mécanique des fluides notamment). Dans ce cas, il est nécessaire d’utiliser des bases orthogonales ou biorthogonales : ce sont les transformées discrètes en ondelettes.

Les bases orthogonales d’ondelettes sont nombreuses et ont chacune des propriétés bien différentes. Les ondelettes splines, qu’on utilise notamment pour traiter des problèmes de mécanique des fluides [3], [22], [23], sont basées sur l’utilisation des polynômes, ce qui permet de les rapprocher de la méthode des éléments finis. Le fait qu’elles ne soient pas à support compact nous ont fait préférer les ondelettes de Daubechies où des algorithmes rapides peuvent être utilisés. La construction de ces ondelettes s’établit à partir de la connaissance d’une suite de longueur finie qui sera l’unique donnée dont nous aurons besoin.

Selon le type de problème à étudier, on peut avoir besoin d’ondelettes ayant des propriétés bien particulières (ondelettes splines et à support compact), on utilise alors des bases biorthogonales (une fonction pour décomposer, sa duale pour reconstruire) qui offrent un choix plus large, mais sont d’un maniement plus lourd puisque nécessitant la connaissance de deux fonctions au lieu d’une seule. Le sujet des ondelettes biorthogonales ne sera pas traité dans ce mémoire.

Cette partie s'organisera comme suit :

Dans un premier chapitre, on rappellera rapidement au travers d'un historique les différents types d'ondelettes ainsi que leurs principales propriétés, dont notamment la localisation des singularités des fonctions analysées, qui nous permettra de mettre en oeuvre un algorithme de raffinement local. Puis, nous définirons plus précisément les ondelettes qui seront utilisées par la suite, les ondelettes de Daubechies [11].

Dans un second chapitre, suite aux travaux de G. Beylkin [4] nous montrerons comment peut être calculée la projection de l'opérateur d'élasticité dans une base d'ondelettes grâce à un algorithme de décomposition–recomposition : l'algorithme pyramidal de Mallat [26]. Nous présenterons enfin les premiers résultats obtenus sur un exemple analytique, lesquels permettront de valider cette méthode et de pouvoir optimiser les différents paramètres entrant en jeu (ordre de l'ondelette, niveau d'approximation, etc.).

Chapitre 1

Historique et rappels

1.1 La transformée continue en ondelettes

La **transformée en ondelettes**, telle qu'elle existe aujourd'hui, a été définie pour la première fois en 1981 par J. Morlet, ingénieur chez Elf-Aquitaine, afin d'analyser des signaux issus de la recherche pétrolière [32]. Les outils dont il disposait à cette époque étaient principalement basés sur l'analyse de Fourier. Cette analyse, localisée dans l'espace spectral, est très mal localisée dans l'espace physique. Pour pallier ce défaut, il est possible d'utiliser des fenêtres glissantes, mais ceci n'est pas sans poser quelques problèmes. J. Morlet eut alors l'idée de considérer une fonction analysante h , bien localisée à la fois dans l'espace physique et dans l'espace de Fourier, et d'y appliquer des translations et des dilatations. La famille analysante est donc du type :

$$h_{ab}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

La transformée en ondelettes d'un signal f s'écrit :

$$f_{ab} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(t) h\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (1.2)$$

On peut montrer que si l'ondelette h vérifie la condition d'admissibilité :

$$C_h = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\hat{h}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty \quad (1.3)$$

(ce qui entraîne notamment que $\hat{h}(0) = \int_{\mathbb{R}} h(t)dt = 0$, donc que h est une fonction oscillante), alors on peut reconstruire le signal à partir de ses coefficients d'ondelettes :

$$f(x) = \frac{1}{C_h} \int_{\mathbb{R}^2} f_{ab} h_{ab}(x) \frac{dadb}{a^2} \quad (1.4)$$

En 1984, A. Grossmann [16] a fixé le cadre mathématique de cette théorie, et l'a reliée à des théories sur l'interpolation datant des années 60.

Exemple : l'ondelette de Morlet

Cette ondelette, définie par la fonction :

$$h(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t) \quad (1.5)$$

ne vérifie pas la condition $\hat{h}(0) = 0$ (on a $\hat{h}(0) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{25}{2}}$), mais ce nombre très "petit" (de l'ordre de 10^{-5}) permet tout de même d'obtenir une formule de reconstruction approchée.

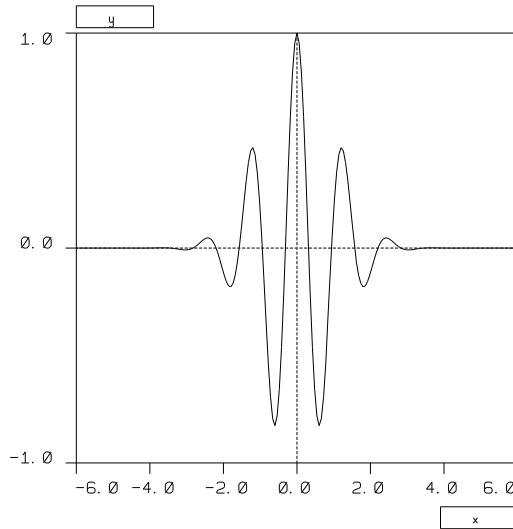


Figure 1.1 : L'ondelette de Morlet

Un autre type d'ondelette, très utilisée en traitement du signal, est la dérivée d'ordre n d'une gaussienne ($n \geq 2$) :

$$K_n(t) = \frac{d^n}{dt^n} (e^{-\frac{t^2}{2}}) . \quad (1.6)$$

L'inconvénient majeur de la transformée continue en ondelettes est la transformation d'un signal (de dimension 1) en image (de dimension 2), d'où une redondance d'information

qui serait totalement inexploitable dans le cadre de la résolution d'équations aux dérivées partielles.

1.2 La transformée discrète en ondelettes

En 1985, Y. Meyer [28] eut l'idée de discrétiser les paramètres a et b sur un réseau dyadique $a = 2^{-j}$, $b = 2^{-j}k$ ($j, k \in \mathbb{Z}$), et de tenter d'obtenir des bases hilbertiennes de $L^2(\mathbb{R})$ du type :

$$\left\{ \psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}}. \quad (1.7)$$

La formule de décomposition d'une fonction f s'écrit alors :

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \psi_{jk}) \psi_{jk}(x). \quad (1.8)$$

La structure de cette base est donc extrêmement simple, constituée de translations et de dilatations d'une seule fonction appelée **ondelette**. De plus, le caractère localisé de la fonction ψ permettra d'analyser une fonction f "à l'échelle 2^{-j} " et "autour du point $x = 2^{-j}k$ ", ce qui entrainera des propriétés liant la régularité locale d'une fonction et ses coefficients d'ondelettes [18], [19] (*cf.* §1.7).

Une telle fonction ψ est connue depuis le début du siècle (1909), il s'agit du système de Haar [17], construit à partir de la fonction ψ définie par (*fig. 1.2*):

$$\psi(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 < x < 1/2 ; \\ 1 & \text{si } 1/2 < x < 1 ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.9)$$

Ces fonctions forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$, mais leur faible régularité entraine une mauvaise localisation de $\hat{\psi}$ dans l'espace de Fourier, ce qui a pour conséquence une convergence lente vers zéro des coefficients (f, ψ_{jk}) lorsque j tend vers $+\infty$.

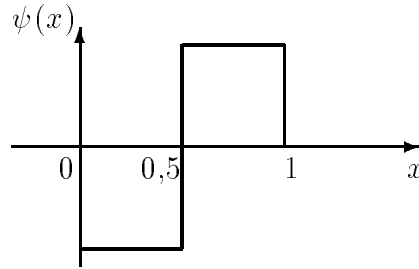


Figure 1.2 : L'ondelette de Haar

Illustration :

Etudions la convergence vers zéro de la suite $\{f_j\}_j$ définie par $f_j = \sqrt{2^j} \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(2^j x)dx$.

La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à f en $x = 0$ donne à l'ordre q :

$$f_j = \sqrt{2^j} \sum_{p=0}^q \left[f^{(p)}(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{x^p}{p!} \psi(2^j x) dx \right] + \int_{\mathbb{R}} R(x) \psi(2^j x) dx \quad (1.10)$$

avec :

$$R(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^q}{q!} f^{(q+1)}(t) dt. \quad (1.11)$$

En notant $\mathcal{M}_p = \int_{\mathbb{R}} x^p \psi(x) dx$ le moment d'ordre p de ψ , et r_j le reste, on obtient :

$$f_j = \sum_{p=0}^q \frac{f^{(p)}(0) \mathcal{M}_p}{p! (2^j)^{p+1}} + r_j \quad \text{où} \quad |r_j| < \frac{C}{(2^j)^{q+2}} \quad (1.12)$$

La convergence de la suite des coefficients d'ondelettes $\{f_j\}_j$ vers zéro est donc réglée par le premier moment non nul de ψ .

L'ondelette de Haar a son premier moment non nul, ce qui explique les difficultés numériques liées à la lente convergence des coefficients. On sera ainsi amené à la définition d'une ondelette ayant une certaine régularité.

En 1985, Y. Meyer [28] a construit une ondelette telle que $\hat{\psi}$ soit nulle sur un voisinage de 0 (ce qui entraîne que tous les moments de ψ sont nuls) qui soit de plus dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact), ce qui entraîne que ψ est dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide. Malheureusement,

cette construction ne permet pas d'obtenir d'autres ondelettes, en particulier à support compact. Il en est de même pour la construction de P.G. Lemarié présentée l'année suivante [25].

1.3 L'analyse multirésolution

En 1987, S. Mallat établit une construction permettant d'obtenir différents types d'ondelettes. Elle est basée sur la notion d'**analyse multirésolution**. Donnons-en tout d'abord une définition exacte :

Définition 1 Une **analyse multirésolution** de $L^2(\mathbb{R})$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ ayant les propriétés :

- (i) $V_j \subset V_{j+1}$ pour tout j dans \mathbb{Z} ;
- (ii) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$; $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$;
- (iii) Pour tout f dans $L^2(\mathbb{R})$, j dans \mathbb{Z} , on a :

$$f \in V_j \iff f(2 \cdot) \in V_{j+1} ;$$
- (iv) Pour tout f dans $L^2(\mathbb{R})$, k dans \mathbb{Z} , on a :

$$f \in V_0 \iff f(\cdot - k) \in V_0 ;$$
- (v) Il existe une fonction $\varphi \in V_0$ telle que la famille $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ des translations entières de φ soit une base de V_0 .

L'analyse multirésolution consiste donc en une suite de sous-espaces vectoriels $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ emboîtés (prop. (i)). La propriété (ii) signifie que la projection d'une fonction f dans un espace V_j permet d'obtenir des détails de l'ordre de 2^{-j} de cette fonction. On obtiendra donc une approximation de plus en plus fine de f lorsque j augmente, celle-ci convergeant vers f lorsque j tend vers $+\infty$ (prop. (ii)). Enfin, la propriété (iv) donne la structure de l'espace V_0 : il doit contenir toutes les translations entières des fonctions f de V_0 , ceci nous permettant de construire une base de V_0 à partir de la fonction d'échelle φ ayant la même structure (prop. (v)).

Conséquence :

• Si φ est une fonction telle que l'ensemble de ses translations entières $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base de l'espace V_0 , alors, d'après l'égalité (iii), la famille $\{\varphi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base de V_j pour tout $j \in \mathbb{Z}$. La fonction φ est appelée **fonction d'échelle**, et d'après la propriété (iii), il existe une suite $\{h(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que :

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \varphi(2x - n). \quad (1.13)$$

• Pour tout j dans \mathbb{Z} , on appelle W_j le supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (1.14)$$

alors on peut construire, à partir de la fonction d'échelle φ , une **ondelette** associée, notée ψ , et telle que :

$$W_j = Vect \{ \psi_{jk}, k \in \mathbb{Z} \} \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z} \quad (1.15)$$

et d'après la propriété (iii), il existe une suite $\{g(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que :

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) \varphi(2x - n). \quad (1.16)$$

Ces filtres $\{h(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{g(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, appelés **filtres miroirs en quadrature**, sont d'un intérêt fondamental dans la théorie des ondelettes. Ils servent dans la mise en oeuvre de l'algorithme de calcul rapide des coefficients d'ondelettes d'une fonction [5], pour le calcul de la valeur en un point donné de l'ondelette [37], et de la projection d'opérateurs différentiels [4] (calcul de produits scalaires entre l'ondelette et ses dérivées).

• D'après la définition des espaces V_j et W_j , on a la propriété :

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = V_{j_0} \bigoplus_{j \geq j_0} W_j. \quad (1.17)$$

Ce qui nous permet de décomposer une fonction f de la façon suivante :

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \varphi_{j_0 k}) \varphi_{j_0 k}(x) + \sum_{j \geq j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \psi_{jk}) \psi_{jk}(x) \quad (1.18)$$

où les coefficients :

- $(f, \varphi_{j_0 k})$ sont les **coefficients d'approximation** (j_0 est le niveau d'approximation);
- $(f, \psi_{j k})$ sont les **coefficients de détails**.

La notion d'analyse multirésolution a notamment permit d'obtenir les bases d'ondelettes splines [3], utilisées pour la résolution d'équations aux dérivées partielles [22], [23], [24]. Le principal défaut de ces ondelettes est de ne pas être à support compact, ce qui peut engendrer des problèmes numériques (largeur de bande des matrices des opérateurs, ...). De plus, les filtres $\{h(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{g(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sont de longueur infinie, donc l'algorithme rapide de décomposition-recomposition de S. Mallat ne peut être mis en oeuvre que de façon approchée.

1.4 Les ondelettes de Daubechies sur \mathbb{R}

En 1988, I. Daubechies [11] introduit des **ondelettes à support compact** par la recherche de filtres $\{h(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de longueur finie. Nous utiliserons ces ondelettes au cours de cette étude. Du fait de la finitude des filtres, les algorithmes pyramidaux de décomposition-recomposition seront particulièrement performants, et le choix de la longueur de ces filtres nous donnera des ondelettes plus ou moins régulières, de support plus ou moins grands. La construction de ces ondelettes est basée sur le théorème suivant [11] :

Théorème 1 Soit $\{h(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite telle que :

$$(i) \quad \sum_n |h(n)| |n|^\varepsilon < +\infty \text{ pour un certain } \varepsilon > 0 ;$$

$$(ii) \quad \sum_n h(n - 2k) h(n - 2\ell) = \delta_{k\ell} ;$$

$$(iii) \quad \sum_n h(n) = \sqrt{2} .$$

Supposons de plus que la fonction définie par $m_0(\xi) = 2^{-1/2} \sum_n h(n) e^{-2i\pi n \xi}$ puisse être écrite sous la forme :

$$m_0(\xi) = \left[\frac{1}{2} (1 + e^{2i\pi \xi}) \right]^N \left[\sum_n f(n) e^{2i\pi n \xi} \right]$$

où la fonction f vérifie :

$$(iv) \quad \sum_n |f(n)| |n|^\varepsilon < +\infty \text{ pour un certain } \varepsilon > 0 ;$$

$$(v) \quad \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \sum_n f(n) e^{2i\pi n \xi} \right| < 2^{N-1} .$$

On définit :

$$g(n) = (-1)^n h(1 - n) ;$$

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j \in \mathbb{N}^*} m_0(2^{-j} \xi) ;$$

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_n g(n) \varphi(2x - n) ,$$

alors la famille $\{\varphi_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ définie par $\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$ forme une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$ et la famille $\{\psi_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est la base d'ondelettes associée.

Commentaires :

- La construction de φ à l'aide de sa transformée de Fourier est directement basée sur la notion d'analyse multirésolution, et notamment sur l'inclusion de l'espace V_0 dans V_1 , ce qui permet l'existence de la suite $\{h(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, et de la fonction m_0 par transformation de Fourier.

- L'égalité (i) permet d'obtenir la convergence du produit définissant la transformée de Fourier de l'ondelette, les égalités (iv) et (v) donne la régularité de ce produit, (iii) permet d'obtenir $\hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$, et (ii) traduit l'orthogonalité par translation de φ .

Le corollaire suivant permet de déduire une base d'ondelettes à support compact à partir de cette construction.

Corollaire 1 *Si de plus la suite $\{h(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite finie (c'est à dire que $h(n) = 0$ pour $n < N^-$ et $n > N^+$) alors la base orthonormée d'ondelettes associée est à support compact, et :*

$$\text{support} (\varphi) \subset [N^-, N^+] ; \tag{1.19}$$

$$\text{support} (\psi) \subset \left[\frac{1}{2}(1 - N^- - N^+), \frac{1}{2}(1 - N^- + N^+) \right] . \tag{1.20}$$

Récapitulation :

Si l'on choisit, dans le corollaire précédent, $N^- = 0$ et $N^+ = 2M - 1$ ($M > 0$), on peut définir la fonction d'échelle et l'ondelette de Daubechies d'ordre M comme suit :

— Il existe une suite de réels $\{h(n)\}_{n=0,\dots,2M-1}$ vérifiant les égalités :

$$\sum_{n=0}^{2M-1} h(n) = \sqrt{2} ; \quad (1.21)$$

$$\sum_{n=0}^{2M-1} h(n)h(n+2k) = \delta_{0,k} \quad \forall k \in \mathbb{Z} . \quad (1.22)$$

— La **fonction d'échelle** φ est définie par :

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{2M-1} h(n)\varphi(2x-n), \quad \forall x \in \mathbb{R} . \quad (1.23)$$

— L'**ondelette associée** ψ est définie par :

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{2M-1} g(n)\varphi(2x-n), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.24)$$

avec :

$$g(n) = (-1)^n h(2M-1-n) \quad n = 0, \dots, 2M-1. \quad (1.25)$$

— La fonction d'échelle φ vérifie les propriétés suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1 ; \quad (1.26)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\varphi(x-k) dx = \delta_{0,k} \quad \forall k \in \mathbb{Z} ; \quad (1.27)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x-k) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} ; \quad (1.28)$$

$$\text{Support} (\varphi) \subset [0, 2M-1]. \quad (1.29)$$

— L'ondelette ψ vérifie les propriétés suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \psi(x) dx = 0 \quad \text{pour } 0 \leq n \leq M - 1 ; \quad (1.30)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) \psi(2^j x - k) dx = \delta_{0,k} \delta_{0,j} \quad \forall j, k \in \mathbb{Z} ; \quad (1.31)$$

$$\text{Support}(\psi) \subset [0, 2M - 1] \quad (1.32)$$

(On a décalé la suite $\{g(n)\}_{n=0,\dots,2M-1}$ afin que les supports de φ et de ψ soient identiques).

Remarques :

- Dans l'analyse multirésolution engendrée par la fonction d'échelle d'ordre M , V_0 contient l'espace des polynômes d'ordre strictement inférieur à M .

- La fonction d'échelle φ n'est pas orthogonale par échelle contrairement à ψ , c'est à dire que l'on n'a pas $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \varphi(2^j x) dx = 0$ pour $j \in \mathbb{Z}$.

- L'ondelette d'ordre 9 est nettement plus régulière que celle d'ordre 3, les coefficients d'ondelettes $\langle f, \psi_{jk} \rangle_{\mathbb{R}}$ d'une fonction f convergent donc plus vite vers zéro lorsque j tend vers $+\infty$, mais son support est plus grand (le support de l'ondelette d'ordre 9 est inclus dans $[0,17]$, celui de l'ondelette d'ordre 3 dans $[0,5]$), donc le nombre de coefficients non nuls de la matrice d'un opérateur discrétisé dans la base d'ondelettes d'ordre 9 sera plus grand que dans celle d'ordre 3. On sera donc amené à faire un compromis dans le choix de l'ondelette.

- L'équation de normalisation (1.26) nous servira pour calculer les coefficients d'ondelettes. En effet, si l'on considère une fonction f suffisamment régulière, alors, si l'on choisit un niveau d'approximation j suffisamment grand, on peut faire l'approximation :

$$f_{jk} = (f, \varphi_{jk}) = \frac{1}{2^{j/2}} f\left(\frac{x+c}{2^j}\right) \quad (1.33)$$

($c = \int_{\mathbb{R}} x \varphi(x) dx$), cette approximation étant d'autant meilleure que le nombre de moments nuls de ψ sont élevés (c'est une application directe de la formule de Taylor).

Ces bases d'ondelettes sur $L^2(\mathbb{R})$ ne nous permettent pas de résoudre des équations aux dérivées partielles sur des domaines bornés avec conditions aux limites. Dans un premier

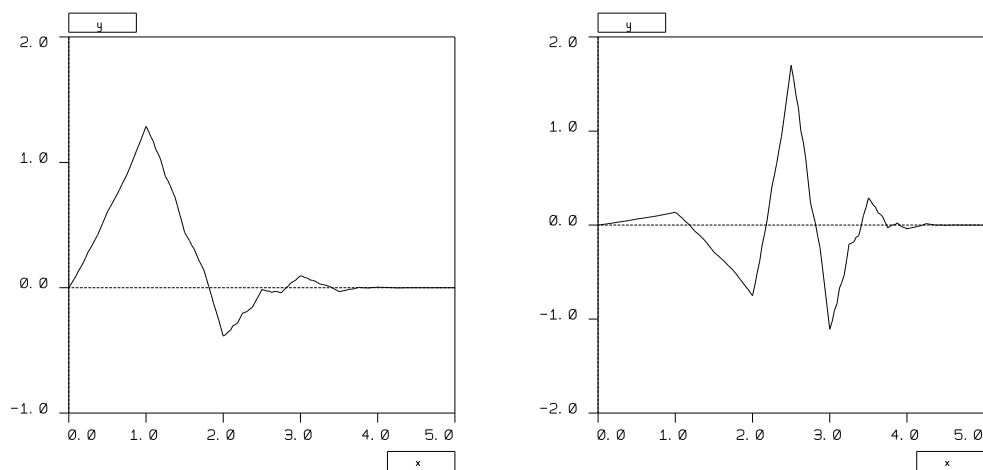


Figure 1.3 : Graphe de la fonction d'échelle et de l'ondelette d'ordre 3

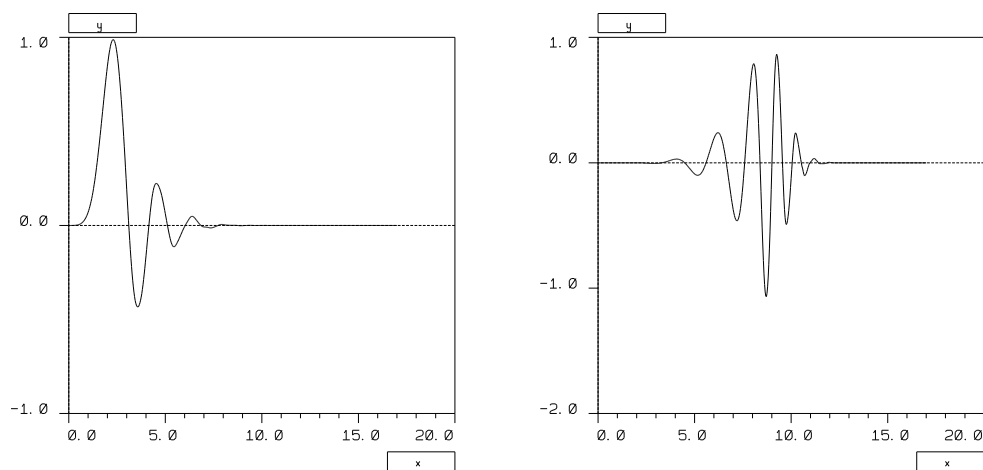


Figure 1.4 : Graphe de la fonction d'échelle et de l'ondelette d'ordre 9

temps, Meyer [30] a élaboré des ondelettes périodiques par "périodisation" des bases de $L^2(\mathbb{R})$. Elles forment des bases de l'espace $L_p^2(0, 1)$, constitué de l'ensemble des fonctions localement de carré intégrable et périodiques de période 1, ainsi que de l'espace de Sobolev $H_p^1(0, 1)$ correspondant.

On peut également définir des analyses multirésolutions de ces espaces, et des algorithmes rapides de décomposition-recomposition [33], ce qui rend possible l'utilisation de ces ondelettes pour la résolution de problèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires périodiques, en mécanique des fluides notamment [23], [24], [34]. Elles feront l'objet du paragraphe suivant.

En 1989, Y. Meyer et S. Jaffard [20] ont aussi recherché des ondelettes sur des bornés de \mathbb{R}^N . Ces ondelettes ne sont pas invariantes par échelle, surtout si le borné n'est pas d'une géométrie simple. Mais loin du bord, l'invariance est conservée.

Ces bases permettent de caractériser les espaces homogènes $H_0^s(\Omega)$ et $\mathcal{C}_0^r(\Omega)$ (si Ω est le borné de \mathbb{R}^N), homogène signifiant que les fonctions appartenant à ces espaces vérifient des conditions de Dirichlet homogènes sur le bord $\partial\Omega$.

En 1993, A. Cohen, I. Daubechies et P. Vial [8] ont élaboré des bases d'ondelettes sur l'intervalle $[0, 1]$ à partir de celles de Daubechies sur \mathbb{R} décrites plus haut. L'idée de la construction est de remplacer les ondelettes dont le support ont une intersection non vide avec le bord par des polynômes, tout en gardant l'orthogonalité. Cette construction ne se généralise malheureusement pas à des ouverts de \mathbb{R}^N de formes quelconques (un triangle par exemple).

1.5 Les ondelettes périodiques en dimension 1

Nous serons amené, au cours de cette étude, à traiter des problèmes périodiques. Nous allons donc construire, à partir des fonctions définies ci-dessus, des ondelettes périodiques formant une analyse multirésolution de $L_p^2(0, 1)$ où $L_p^2(0, 1)$ est l'ensemble des fonctions 1-périodiques définie par :

$$L_p^2(0, 1) = \left\{ v \in L_{loc}^2(\mathbb{R}) : v(x+1) = v(x) \quad p.p. \right\} \quad (1.34)$$

(on peut aussi définir $L_p^2(0, 1)$ par $L_p^2(0, 1) = L^2(\mathbb{T})$ où \mathbb{T} est le tore \mathbb{R}/\mathbb{Z}).

On construit ces bases orthonormées de $L_p^2(0, 1)$ par "périodisation" des bases d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$ [30]. On définit la nouvelle fonction d'échelle "périodisée" ϕ_{jk} à partir de φ par :

$$\phi_{jk}(x) = 2^{j/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(2^j(x+n) - k) , \quad (1.35)$$

de même, on définit la "périodisée" Ψ de ψ par :

$$\Psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(2^j(x+n) - k) . \quad (1.36)$$

On peut également définir le concept d'analyse multirésolution de $L_p^2(0, 1)$ par analogie avec celles de $L^2(\mathbb{R})$:

Définition 2 On définit une analyse multirésolution de $L_p^2(0, 1)$ par une suite de sous-espaces $\{\mathcal{V}_j\}_{j \geq 0}$ de $L_p^2(0, 1)$ vérifiant :

- (i) $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \dots \subset \mathcal{V}_j \subset \dots \subset L_p^2(0, 1) ;$
- (ii) $\bigcup_{j \geq 0} \mathcal{V}_j$ est dense dans $L_p^2(0, 1) ;$
- (iii) $\mathcal{V}_0 = \{ \text{ensemble des fonctions constantes} \} ,$
 $f(x) \in \mathcal{V}_j \implies f(2x) \in \mathcal{V}_{j+1} ,$
 $f(x) \in \mathcal{V}_{j+1} \implies f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) \in \mathcal{V}_j ;$
- (iv) $\dim \mathcal{V}_j = 2^j$, et il existe pour tout j une base orthonormée de \mathcal{V}_j , $\{\phi_{jk}\}_{0 \leq k \leq 2^j - 1}$, avec :
 $\phi_{jk}(x) = \phi_{j0}\left(x - \frac{k}{2^j}\right) .$

Y. Meyer a montré qu'alors, la collection composée de la fonction constante 1 et de la famille $\{\Psi_{jk}, j \geq 0, k = 0, \dots, 2^j - 1\}$ est une base de $L_p^2(0, 1)$, et que la suite de sous-espaces-vectoriels $\{\mathcal{V}_j\}_{j \geq 0}$ définis par :

$$\mathcal{V}_j = \text{Vect}\left\{\phi_{jk}, k = 0, \dots, 2^j - 1\right\} \quad (1.37)$$

est l'analyse multirésolution de $L_p^2(0, 1)$ associée à ϕ .

On a de plus la propriété [30] (pour la définition de la n -régularité, voir §1.7) :

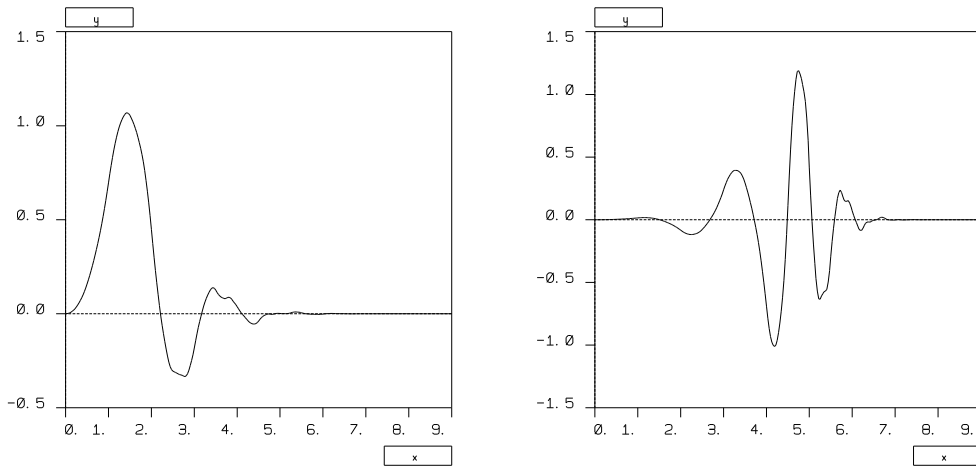


Figure 1.5 : Graphe de la fonction d'échelle et de l'ondelette de Daubechies d'ordre 5

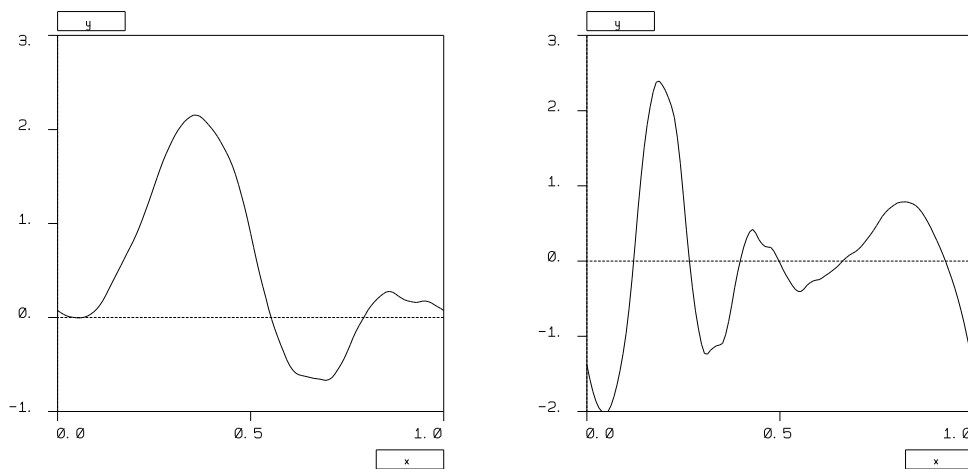


Figure 1.6 : Graphe de la fonction d'échelle et de l'ondelette de Daubechies d'ordre 5 "périodisées" ϕ_{jk} et Ψ_{jk} pour $j = 2, k = 0$

Théorème 2 *Si l'ondelette ψ est n -régulière ($n \geq 1$), alors la base d'ondelettes périodique constituée de la famille $\{\phi_{j_0 k}, k = 0, \dots, 2^{j_0} - 1\} \cup \{\Psi_{jk}, j \geq j_0, k = 0, \dots, 2^j - 1\}$, construite à partir de ψ et de φ par "périodisation" des ondelettes sur \mathbb{R} , est une base inconditionnelle des espaces $L_p^s(0, 1)$ pour $1 < s < +\infty$ et des espaces de Hölder $\mathcal{C}_p^\alpha(0, 1)$ pour $0 < \alpha < 1$.*

Remarques :

- On a perdu ici l'invariance par échelle (on n'a pas en général $\phi_{jk}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$), mais ceci n'a pas de conséquence, puisque l'on ne va utiliser dans le calcul que les filtres $\{h(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de la fonction φ de $L^2(\mathbb{R})$ à partir de laquelle on a construit ϕ . En effet, soit f une fonction de $L_p^2(0, 1)$, alors on a :

$$f_{jk} = \int_0^1 f(x) \phi_{jk}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi_{jk}(x) dx . \quad (1.38)$$

- On a toujours la propriété: si \mathcal{W}_j est le supplémentaire orthogonal de \mathcal{V}_j dans \mathcal{V}_{j+1} , alors :

$$\mathcal{W}_j = \text{vect}\{\Psi_{jk}, \quad k = 0, \dots, 2^j - 1\} . \quad (1.39)$$

1.6 Les ondelettes périodiques en dimension 2

Les problèmes auxquels nous nous sommes intéressé au cours de cette étude sont des problèmes bidimensionnels. Nous sommes donc amené à définir, à partir des ondelettes unidimensionnelles des paragraphes précédents, des bases de l'espace $L_p^2([0, 1[\times]0, 1[)$, puis de $(L_p^2([0, 1[\times]0, 1[))$, ainsi que des espaces de Sobolev correspondants.

Dans ce qui suit, nous noterons Y le carré $Y =]0, 1[\times]0, 1[$.

1.6.1 Bases de $L_p^2(Y)$

On définit tout d'abord les espaces fonctionnels :

$$L_p^2(Y) = \left\{ v \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2) : v(x_1 + i_1, x_2 + i_2) = v(x_1, x_2) \text{ p.p., } \forall (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\}; \quad (1.40)$$

$$H_p^1(Y) = \left\{ v \in L_p^2(Y) : \frac{\partial v}{\partial x_1} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2); \frac{\partial v}{\partial x_2} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2) \right\}. \quad (1.41)$$

Une façon simple de construire une analyse multirésolution $\{\mathcal{V}_j^2\}_{j \geq 0}$ de $L_p^2(Y)$ est de considérer une analyse multirésolution de $L_p^2(0, 1)$ et d'en constituer le produit tensoriel $\mathcal{V}_j^2 = \mathcal{V}_j \otimes \mathcal{V}_j$.

Notations :

Notons Λ_j le sous-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ défini par :

$$\Lambda_j = \left\{ (k_1, k_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 0 \leq k_1 \leq 2^j - 1; 0 \leq k_2 \leq 2^j - 1 \right\} \quad (1.42)$$

et \underline{k} le couple :

$$\underline{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2. \quad (1.43)$$

On a alors le théorème suivant [30] :

Théorème 3 *Si ϕ est une fonction d'échelle engendrant une analyse multirésolution $\{\mathcal{V}_j\}_{j \geq 0}$ de $L_p^2(0, 1)$, alors la famille $\{\Phi_{j\underline{k}}, \underline{k} \in \Lambda_j\}$ constituée des produits entre fonctions d'échelle :*

$$\left\{ \Phi_{j\underline{k}}(x_1, x_2) = \phi_{jk_1}(x_1) \phi_{jk_2}(x_2), \underline{k} \in \Lambda_j \right\} \quad (1.44)$$

est une base orthonormée de \mathcal{V}_j^2 , et la famille des sous-espaces vectoriels $\{\mathcal{V}_j^2\}_{j \geq 0}$ forme une analyse multirésolution de $L_p^2(Y)$.

Soit \mathcal{W}_j^2 le supplémentaire orthogonal de \mathcal{V}_j^2 dans \mathcal{V}_{j+1}^2 , on montre aisément que :

$$\mathcal{W}_j^2 = (\mathcal{V}_j \otimes \mathcal{W}_j) \oplus (\mathcal{W}_j \otimes \mathcal{V}_j) \oplus (\mathcal{W}_j \otimes \mathcal{W}_j) \quad (1.45)$$

où \mathcal{W}_j désigne le supplémentaire orthogonal de \mathcal{V}_j dans \mathcal{V}_{j+1} (analyse multirésolution de $L_p^2(0,1)$).

Les ondelettes sont donc engendrées par dilatations–translations de trois fonctions définies à partir des ondelettes sur $L_p^2(0,1)$ de la façon suivante :

$$\Psi^1(x_1, x_2) = \phi(x_1) \Psi(x_2) ; \quad (1.46)$$

$$\Psi^2(x_1, x_2) = \Psi(x_1) \phi(x_2) ; \quad (1.47)$$

$$\Psi^3(x_1, x_2) = \Psi(x_1) \Psi(x_2) ; \quad (1.48)$$

et nous avons le théorème suivant [25], [27]:

Théorème 4 *La collection constituée de la fonction constante égale à 1 et de la famille $\{\Psi_{j\underline{k}}^\ell, j \geq 0, \underline{k} \in \Lambda_j, \ell = 1, 2, 3\}$ est une base orthonormée de $L_p^2(Y)$.*

Conséquences :

- Les espaces vectoriels \mathcal{V}_j^2 sont de dimensions finies. Plus précisément, on a :

$$\dim \mathcal{V}_j^2 = \dim \Lambda_j = 2^{2j} . \quad (1.49)$$

- Soit f une fonction de $L_p^2(Y)$, alors la série d'ondelettes de f est donnée par ($j_0 \geq 0$) :

$$f(x_1, x_2) = \sum_{\underline{k} \in \Lambda_{j_0}} (f, \phi_{j_0 \underline{k}}) \phi_{j_0 \underline{k}}(x_1, x_2) + \sum_{\ell=1,3} \sum_{j \geq j_0} \sum_{\underline{k} \in \Lambda_j} (f, \Psi_{j\underline{k}}^\ell) \Psi_{j\underline{k}}^\ell(x_1, x_2) . \quad (1.50)$$

1.6.2 Bases de $(L_p^2(Y))^2$

A l'aide de ces notations, on obtient enfin une base de $(L_p^2(Y))^2$ en considérant le produit cartésien $L_p^2(Y) \times L_p^2(Y)$.

Soit $\{\mathcal{V}_j^2\}_{j \geq 0}$ une analyse multirésolution de $L_p^2(Y)$, on définit :

$$\mathbf{W}_j = \mathcal{V}_j^2 \times \mathcal{V}_j^2 . \quad (1.51)$$

Soit $\{\Phi_{j\underline{k}}, \underline{k} \in \Lambda_j\}$ la fonction d'échelle associée à \mathcal{V}_j^2 , alors on définit :

$$\Phi_{j\underline{k}}^1 = \begin{pmatrix} \Phi_{j\underline{k}} \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \Phi_{j\underline{k}}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_{j\underline{k}} \end{pmatrix} . \quad (1.52)$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 5 *La famille des sous-espaces vectoriels $\{\mathbf{W}_j\}_{j \geq 0}$ forme une analyse multirésolution de $(L_p^2(Y))^2$, et la famille $\{\Phi_{j\underline{k}}^1, \Phi_{j\underline{k}}^2, \underline{k} \in \Lambda_j\}$ forme une base de \mathbf{W}_j pour tout $j \geq 0$.*

Conséquences :

- Si on considère u , un élément de \mathbf{W}_j , alors u s'écrit :

$$u(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad u_d(x_1, x_2) = \sum_{\underline{k} \in \Lambda_j} u_d^{\underline{k}} \Phi_{j\underline{k}}(x_1, x_2) \quad (1.53)$$

où d est la direction ($d = 1, 2$).

- Si on considère \mathbf{W}_j le supplémentaire orthogonal de \mathbf{W}_j dans \mathbf{W}_{j+1} , alors \mathbf{W}_j est engendrée par six ondelettes du type :

$$\Psi_{j\underline{k}}^{\ell 1} = \begin{pmatrix} \Psi_{j\underline{k}}^\ell \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \Psi_{j\underline{k}}^{\ell 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_{j\underline{k}}^\ell \end{pmatrix} \quad j \geq 0, \quad \underline{k} \in \Lambda_j \quad \ell = 1, 2, 3 \quad (1.54)$$

où les fonctions $\Psi_{j\underline{k}}^\ell$ sont des ondelettes de $L_p^2(Y)$.

Preuve :

Pour montrer la convergence, il suffit d'utiliser le théorème précédent sur chacune des composantes.

Remarques :

- La dimension d'un espace \mathbb{W}_j ($j \geq 0$) est de dimension finie, et :

$$\dim \mathbb{W}_j = 2^{2j+1} . \quad (1.55)$$

• Cette analyse multirésolution $\{\mathbb{W}_j\}_{j \geq 0}$ va nous permettre de discrétiser les différents opérateurs que nous allons étudier au cours des chapitres suivants. Nous élaborerons par la même occasion les algorithmes de décomposition-recomposition, de calcul de produits scalaires entre les dérivées des ondelettes.

1.7 Ondelettes et caractérisation des espaces fonctionnels

Un intérêt non négligeable des ondelettes est leur localisation dans l'espace de Fourier (contrairement à l'analyse par éléments finis), et leur localisation dans l'espace physique (contrairement à l'analyse de Fourier). Elles se placent donc comme une solution intermédiaire entre ces deux méthodes.

En conséquence, les séries d'ondelettes sont des séries "creuses", c'est-à-dire que les coefficients d'ondelettes sont significatifs là où la fonction est singulière, et sont numériquement nuls là où la fonction est régulière, ce qui sera d'un grand intérêt numérique si l'on se préoccupe de raffinement local. Cette propriété étant d'autant plus vérifiée que l'ondelette est régulière, nous allons tout d'abord donner une définition précise de la régularité d'une ondelette.

Définition 3 Une ondelette ψ est dite **n-régulière** (n entier) si :

$$(1 + x^2)^m \psi \in H^n(\mathbb{R}) \quad \text{pour tout } m \text{ dans } \mathbb{N} ; \quad (1.56)$$

$$\left| \frac{d^\ell \psi}{dx^\ell}(x) \right| \leq C_m (1 + x^2)^{-m} \quad \text{pour tout } m \geq 1, \quad \text{pour tout } 0 \leq \ell \leq n . \quad (1.57)$$

La définition de la n -régularité est donc à la fois une condition sur la convergence vers zéro à l'infini de l'ondelette et de ses dérivées ainsi qu'une condition de régularité. On peut montrer qu'alors, une ondelette n -régulière vérifie [30]:

Théorème 6 *Une ondelette n -régulière a ses n premiers moments nuls.*

Une base orthonormée d'ondelettes n -régulière permet de caractériser les espaces fonctionnels classiques :

- $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 < p < +\infty$;
- Espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ pour $-n < s < n$;
- Espaces de Hölder $\mathcal{C}^s(\mathbb{R})$ pour $s \in]0, n[$.

Les ondelettes sont des bases inconditionnelles de ces espaces (inconditionnelle signifiant que la série des coefficients d'ondelettes $\{f_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ d'une fonction f converge vers f quel que soit l'ordre dans lequel on range les termes f_{jk} dans cette série, pour la norme de l'espace correspondant).

Comme pour l'analyse de Fourier, les coefficients d'ondelettes d'une fonction permettent d'en déterminer la régularité globale [25], [30] (Appartenance à un certain espace de Hölder ou de Sobolev).

Pour notre part, nous nous intéresserons plus particulièrement à la caractérisation de la régularité locale. Pour cela, nous citerons deux théorèmes [18], [19]:

Théorème 7 *Si f est höldérienne d'ordre α en x_0 ($\alpha \in [0, 1[$), alors :*

$$|(f, \psi_{jk})| \leq C 2^{-j(\alpha+1/2)} (1 + |2^j x_0 - k|^\alpha). \quad (1.58)$$

et la réciproque:

Théorème 8 *Si f appartient à $\mathcal{C}^r(\mathbb{R})$ pour un certain $r > 0$ et si il existe α tel que :*

$$|(f, \psi_{jk})| \leq C 2^{-j(\alpha+1/2)} (1 + |2^j x_0 - k|^\alpha) \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \quad (1.59)$$

alors f vérifie :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C' |x - x_0|^\alpha \log\left(\frac{2}{|x - x_0|}\right) \quad (1.60)$$

et cette estimation est optimale.

Remarque :

Pour obtenir l'appartenance d'une fonction f à un espace de Hölder $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R})$, f doit être dans un espace de Hölder $\mathcal{C}^r(\mathbb{R})$.

Comme nous venons de le voir, la taille des coefficients d'ondelettes est directement liée à la régularité de la fonction analysée. En voici une illustration :

Illustration :

Calculons les coefficients d'ondelettes de la fonction définie par (*fig. 1.7*) :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1/2 \\ x - 1 & \text{si } 1/2 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.61)$$

Elle présente une singularité au point $x = \frac{1}{2}$. On donne (*fig. 1.8*) les coefficients d'ondelettes (f, ψ_{jk}) pour $j = 5$ en fonction du point $x = \frac{k+M+1}{2^j}$ qui est approximativement le centre support de ψ (M est l'ordre de l'ondelette utilisée). La courbe tracée en trait fin représente ces coefficients pour l'ondelette de Daubechies d'ordre 2 (peu régulière), celle en trait gras l'ondelette d'ordre 5 (plus régulière).

Les coefficients d'ondelettes d'ordre 5 sont élevés sur une largeur plus grande que ceux d'ordre 2. Ceci provient du fait que le support des ondelettes d'ordre 5 est plus large que celui des ondelettes d'ordre 2 (*cf. § 1.2*).

Les coefficients d'ondelettes d'ordre 5 sont plus petits au niveau de la singularité. On retrouve les propriétés énoncées précédemment, c'est à dire que les coefficients convergent plus vite si l'ondelette est plus régulière.

Remarque :

Ces propriétés nous permettent d'établir une procédé simple de **raffinement local** :

On se fixe un seuil ε , et si les coefficients d'ondelettes (f, ψ_{jk}) de la fonction f sont plus grands que ε , alors on raffine autour du point $x = 2^{-j}k$. Cela permet de s'affranchir du calcul des contraintes comme cela est nécessaire en éléments finis.

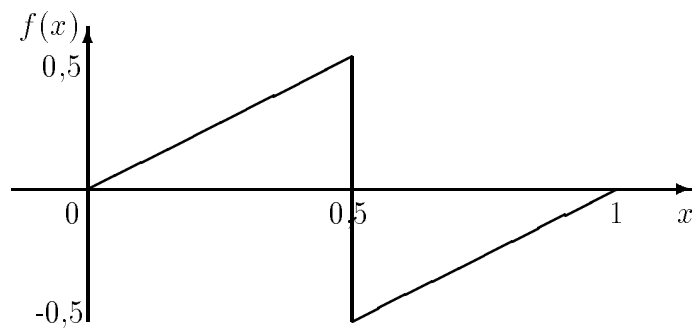


Figure 1.7 : Graphe de f

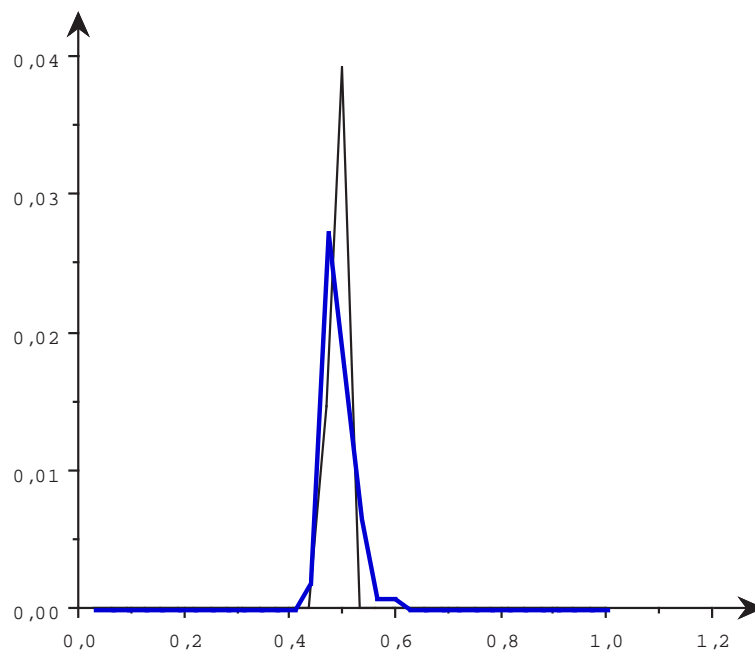


Figure 1.8 : Coefficients d'ondelettes de f (ordre 2 et 5)

1.8 Conclusion

La structure des bases que nous allons utiliser est donc extrêmement simple, construite à partir de deux fonctions définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} dont on fait des produits tensoriels et cartésiens, puis par dilatations et translations des fonctions ainsi obtenues. Cette structure les rendent particulièrement bien adaptées à l'étude des phénomènes où différentes échelles entrent en jeu, l'homogénéisation par exemple.

Le choix des ondelettes s'avère difficile à réaliser. Nous avons opté ici pour les ondelettes de Daubechies car elles sont à support compact, propriété permettant l'utilisation des algorithmes rapides (de décomposition–recomposition ou de calcul de produits scalaires entre dérivées d'ondelettes par exemple) qui seront exacts, et permettant aussi à la matrice d'élasticité que nous construiront d'avoir une structure bande (d'autant plus étroite que l'ordre de l'ondelette sera petit).

Chapitre 2

Représentation de l'opérateur d'élasticité en bases d'ondelettes

2.1 Introduction

Le coût du calcul de la matrice d'élasticité (issu de la projection du tenseur d'élasticité dans une base) croît rapidement avec le nombre de degré de liberté. Ceci nous contraint à concevoir un algorithme rapide si l'on veut qu'il devienne compétitif. Dans le cas d'une base d'ondelettes, nous verrons que ce coût provient essentiellement de la détermination d'intégrales du type :

$$\int_0^1 f(x) \Psi_{j_1 i}^{(n)}(x) \Psi_{j_2 \ell}^{(m)}(x) dx \quad (2.1)$$

où f est une fonction constante par morceaux (f dépend des coefficients d'élasticité du ou des matériaux), et " $^{(n)}$ " désigne la dérivée d'ordre n ($n=0$ ou 1).

Vu le nombre de ces intégrales, et la faible régularité de l'ondelette comme de la fonction f , ces intégrales ne sauraient être calculées par des méthodes de type quadrature (trapèze, méthode de Simpson, ...).

Pour les mêmes raisons, l'utilisation de l'analyse de Fourier ne semble guère plus intéressante, même si l'on sait facilement déterminer les coefficients de Fourier des ondelettes.

Notre technique a alors été la suivante :

1 – Dans le cas où f est une fonction constante, le calcul des coefficients :

$$\int_0^1 \Psi_{j_1 i}^{(n)}(x) \Psi_{j_2 \ell}^{(m)}(x) dx \quad (2.2)$$

sont calculés à partir des intégrales :

$$r_k^{n,m} = \int_0^1 \Psi_{0k}^{(n)}(x) \Psi_{00}^{(m)}(x) dx \quad (2.3)$$

à l'aide de l'algorithme pyramidal de S. Mallat [26] qui permet de déterminer les coefficients d'ondelettes d'une fonction à un niveau d'approximation (ou de détail) j les connaissant à un niveau j' supérieur.

2 – Dans le cas où f n'est pas une fonction constante, on la décompose à l'aide d'une base d'ondelettes de $H_p^1(Y)$ (notée $\Theta_{\iota k}$) à un niveau ι (cette base d'ondelettes ne sera généralement pas celle dans laquelle on discrétise l'opérateur) :

$$f(x) \simeq \sum_{\underline{k} \in \Lambda_j} (f, \Theta_{\iota k_1}) (f, \Theta_{\iota k_2}) \Theta_{\iota k_1}(x_1) \Theta_{\iota k_2}(x_2) \quad (2.4)$$

qui amène au calcul d'intégrales du type :

$$\int_0^1 \Theta_{\iota k}(x) \Psi_{j_1 i}^{(n)}(x) \Psi_{j_2 \ell}^{(m)}(x) dx . \quad (2.5)$$

Comme précédemment, à l'aide de l'algorithme pyramidal, ces intégrales sont calculés à partir des coefficients :

$$\Gamma_{k\ell}^{n,m} = \int_0^1 \Theta_{0k}(x) \Psi_{0\ell}^{(n)}(x) \Psi_{00}^{(m)}(x) dx . \quad (2.6)$$

Les coefficients $r_k^{n,m}$ et $\Gamma_{k\ell}^{n,m}$ seront déterminés par une méthode basée sur celle élaborée par G. Beylkin [4]. Grâce aux propriétés de l'analyse multirésolution, ces coefficients se trouvent être des vecteurs propres d'une matrice de petite dimension. Dans la pratique, ces coefficients seront calculés une fois pour toute et stockés dans des fichiers.

Ensuite, nous présentons plusieurs tests de validations du calcul de l'opérateur d'élasticité par cette méthode, à l'aide d'un exemple analytique. Ceci nous permettra notamment d'étudier l'influence de divers paramètres (ordre de l'ondelettes, niveau d'approximation, etc.).

2.2 Discrétisation de l'opérateur d'élasticité

2.2.1 Introduction

Les deux problèmes auxquels nous nous sommes intéressés au cours de cette étude sont l'homogénéisation périodique et l'élasticité linéarisé bidimensionnelle. Dans ces deux cas, on pourra considérer que le corps élastique étudié occupe un domaine bidimensionnel, qu'il est périodique de période que nous noterons Ω dans ce chapitre, avec :

$$\Omega =]0, 1[\times]0, 1[. \quad (2.7)$$

La première étape de la résolution de ces types de problème consiste en la discrétisation de l'opérateur d'élasticité :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mathbb{K}(x) \epsilon(u(x)) : \epsilon(v(x)) dx \quad (2.8)$$

où \mathbb{K} est un tenseur d'ordre 4 a priori non constant (appelé tenseur de rigidité), et ϵ représente l'opérateur gradient symétrique :

$$\epsilon(u) = \text{grad}_s(u), \quad (2.9)$$

$$\text{ou, en composante : } \epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2. \quad (2.10)$$

Notation :

Afin de simplifier les notations, on écrira parfois les dérivées partielles sous la forme :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j} \quad (2.11)$$

et nous utiliserons la convention de sommation d'indice d'Einstein (un indice répété deux fois sera sommé de 1 à 3).

Dans la première partie, nous rappellerons la forme que nous utiliserons pour le tenseur de rigidité en élasticité plane linéarisée (hypothèse des contraintes ou déformations planes), ainsi que celle des tenseurs de déformations et de contraintes.

Ensuite, en utilisant la méthode de Galerkin, nous déterminerons la forme de la matrice issue de la projection de l'opérateur d'élasticité à l'aide d'une base d'ondelettes à support compact.

Enfin, nous étudierons plus précisément comment seront calculés les coefficients de la matrice, à l'aide de la méthode que nous avons exposée brièvement en introduction.

2.2.2 Le tenseur de rigidité en élasticité plane linéarisée

Afin de fixer les notations, nous rappelons rapidement comment s'écrivent les différents tenseurs, ainsi que la loi de comportement les reliant en élasticité linéarisée bidimensionnelle.

En élasticité linéarisée (tridimensionnelle), la loi de comportement s'écrit, à l'aide des coefficients caractéristiques du matériau :

$$e(u) = \frac{1 + \nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma) Id, \quad (2.12)$$

$$\text{ou, en composante : } e_{ij}(u) = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.13)$$

où E le module de Young et ν le coefficient de Poisson.

Pour se ramener au cas bidimensionnel, on va supposer que les contraintes ou que les déformations sont planes ($\sigma_{i3} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$, ou $\epsilon_{i3} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$). Dans ces deux cas, en utilisant toutes les symétries des différents tenseurs, on peut écrire les tenseurs d'ordre 2 (tenseurs de déformations et de contraintes) sous forme de vecteurs, et le tenseur de rigidité sous forme d'une matrice.

a – Hypothèse des contraintes planes

Faire l'hypothèse des contraintes planes revient à supposer que l'on a $\sigma_{i3} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Ceci entraîne immédiatement que :

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0 \quad \text{et} \quad \epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad (2.14)$$

donc, si on note les tenseurs de déformations et de contraintes sous forme de vecteurs :

$$e(u) = \begin{pmatrix} e_1(u) \\ e_2(u) \\ e_3(u) \end{pmatrix} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} e_1(u) = \epsilon_{11} = u_{1,1} \\ e_2(u) = \epsilon_{22} = u_{2,2} \\ e_3(u) = 2\epsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} \end{cases} \quad (2.15)$$

et :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{11} \\ \sigma_2 = \sigma_{22} \\ \sigma_3 = \sigma_{12} \end{cases} \quad (2.16)$$

alors la matrice de rigidité d'élasticité plane s'écrit :

$$\sigma = Ke = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} e. \quad (2.17)$$

b – Hypothèse des déformations planes

De même, si l'on suppose que les déformations sont planes ($\epsilon_{i3} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$), on en déduit que :

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{33} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \quad (2.18)$$

et, en utilisant les mêmes notations que précédemment, la matrice de rigidité s'écrit :

$$\sigma = Ke = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} e. \quad (2.19)$$

2.2.3 Mise en oeuvre de la méthode de Galerkin

L'objectif de ce paragraphe est la discrétisation de l'opérateur de rigidité en le projetant dans une base d'ondelettes à l'aide d'une méthode de Galerkin.

Pour cela, on se place à un niveau d'approximation j , et on considère l'espace vectoriel (de dimension 2^{2j+1}) issu d'une analyse multirésolution :

$$V_j = V_{j_0} \bigoplus_{\iota=j_0}^{\iota=j} W_\iota . \quad (2.20)$$

Pour simplifier les écritures des propositions suivantes, nous allons utiliser les notations suivantes :

Notations :

- Lors de la discrétisation de l'opérateur d'élasticité dans une base d'ondelettes, nous noterons Ψ_{jk} pour désigner à la fois la fonction d'échelle de Daubechies sur $H_p^1(0,1)$ au niveau d'approximation j et translatée de $2^{-j}k$ (habituellement notée ϕ_{jk}), et l'ondelette associée (habituellement notée Ψ_{jk}).

- De même, sur $H_p^1(\Omega)$, on notera $\Psi_{\underline{k}}^j$ pour désigner la fonction d'échelle $\Phi_{\underline{k}}$, et les ondelettes associées $\Psi_{\underline{k}}^1$, $\Psi_{\underline{k}}^2$ et $\Psi_{\underline{k}}^3$.

On peut alors discrétiser l'opérateur d'élasticité à l'aide d'une base d'ondelettes par la proposition suivante :

Proposition 1 *La projection de l'opérateur d'élasticité plane dans une base d'ondelettes à un niveau d'approximation j est une matrice notée \mathcal{K} d'ordre 2^{2j+1} avec :*

$$[\mathcal{K}_{(i_1, i_2)(\ell_1, \ell_2)}] = [\mathcal{K}_{\underline{i}, \underline{\ell}}]_{\underline{i}, \underline{\ell} \in \Lambda_j} \quad (2.21)$$

où $\mathcal{K}_{\underline{i}, \underline{\ell}}$ est la "matrice élémentaire" 2×2 :

$$\mathcal{K}_{\underline{i}, \underline{\ell}} = \begin{bmatrix} F_{11}^{11} + F_{33}^{22} & F_{12}^{12} + F_{33}^{21} \\ F_{21}^{21} + F_{33}^{12} & F_{22}^{22} + F_{33}^{11} \end{bmatrix} , \quad (2.22)$$

avec :

$$F_{\underline{K}}^{\underline{\Delta}} = F_{\underline{K}\underline{i}\underline{\ell}}^{\underline{\Delta}\underline{J}} = \int_{\Omega} \mathbb{K}_{pq}(x) \frac{\partial \Psi_{\underline{i}}^{j_1}}{\partial x_{\alpha}}(x) \frac{\partial \Psi_{\underline{\ell}}^{j_2}}{\partial x_{\beta}}(x) dx \quad (2.23)$$

et :

$$\begin{aligned} \underline{K} &= (p, q) & p, q &= 1, 2 \text{ ou } 3; \\ \underline{\Delta} &= (\alpha, \beta) & \alpha, \beta &= 1 \text{ ou } 2 & \text{direction de la dérivée;} \\ \underline{J} &= (j_1, j_2) & j_0 &\leq j_1, j_2 \leq j & \text{niveau d'approximation de chaque ondelette (ou} \\ & & & & \text{fonction d'échelle).} \end{aligned}$$

Preuve :

Afin de vérifier cette proposition, il est tout d'abord nécessaire d'explicitier l'opérateur d'élasticité. Exprimons pour cela le produit doublement contracté $\sigma(u) : \epsilon(v)$ (afin de simplifier les notations, on omettra dorénavant la dépendance en x) :

$$\begin{aligned} \sigma(u) : \epsilon(v) &= \left(\mathbb{K} \epsilon(u) : \epsilon(v) \right) \\ &= \left(\mathbb{K}_{11} u_{1,1} + \mathbb{K}_{12} u_{2,2} \right) v_{1,1} + \left(\mathbb{K}_{12} u_{1,1} + \mathbb{K}_{22} u_{2,2} \right) v_{2,2} \\ &\quad + \mathbb{K}_{33} (u_{1,2} + u_{2,1}) (v_{1,2} + v_{2,1}) . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Cette expression est ensuite discrétisée avec une base d'ondelettes en écrivant u comme un élément de l'analyse multirésolution (*cf.* (1.53)), et v comme un élément de cette base d'ondelettes. On obtient ainsi que :

- Si $v = \begin{pmatrix} \Psi_{\underline{k}}^{j_2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $j_0 \leq j_2 \leq j$, $\underline{k} \in \Lambda_{j_2}$, alors :

$$\sigma(u) : \epsilon(v) = \sum_{j_1=j_0}^{j_1=j} \sum_{\underline{i}, \underline{\ell} \in \Lambda_{j_1}} \left(\mathbb{K}_{11} u_1^{\underline{i}} \Psi_{\underline{i},1}^{j_1} + \mathbb{K}_{12} u_2^{\underline{\ell}} \Psi_{\underline{\ell},2}^{j_1} \right) \Psi_{\underline{k},1}^{j_2} + \mathbb{K}_{33} \left(u_1^{\underline{i}} \Psi_{\underline{i},2}^{j_1} + u_2^{\underline{\ell}} \Psi_{\underline{\ell},1}^{j_1} \right) \Psi_{\underline{k},2}^{j_2} .$$

- Si $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_{\underline{k}}^{j_2} \end{pmatrix}$, $j_0 \leq j_2 \leq j$, $\underline{k} \in \Lambda_{j_2}$, alors :

$$\sigma(u) : \epsilon(v) = \sum_{j_1=j_0}^{j_1=j} \sum_{\underline{i}, \underline{\ell} \in \Lambda_{j_1}} \left(\mathbb{K}_{12} u_1^{\underline{i}} \Psi_{\underline{i},1}^{j_1} + \mathbb{K}_{22} u_2^{\underline{\ell}} \Psi_{\underline{\ell},2}^{j_1} \right) \Psi_{\underline{k},2}^{j_2} + \mathbb{K}_{33} \left(u_1^{\underline{i}} \Psi_{\underline{i},2}^{j_1} + u_2^{\underline{\ell}} \Psi_{\underline{\ell},1}^{j_1} \right) \Psi_{\underline{k},1}^{j_2} ,$$

et, par intégration sur Ω , on obtient la preuve de la proposition.

Remarque :

Il est clair que la matrice \mathcal{K} est symétrique (par définition de l'opérateur d'élasticité) même si la matrice élémentaire $\mathcal{K}_{\underline{i}, \underline{\ell}}$ ne l'est pas pour tout $\underline{i}, \underline{\ell}$.

2.2.4 Calcul des coefficients de la matrice d'élasticité

Il reste maintenant à calculer les coefficients $F_{\underline{K}}^{\Delta}$ tels qu'ils ont été définis dans (2.23). Vu le nombre de ces coefficients, la technique utilisée se devra d'être aussi rapide que possible. Ceci nous a amené à séparer deux cas, celui où le tenseur de rigidité est constant sur l'intersection des supports des ondelettes, et celui où le tenseur n'est pas constant.

a – \mathbb{K} est constant sur l'intersection des supports des ondelettes

Dans ce cas, en sortant \mathbb{K} de l'intégrale, on obtient simplement la proposition suivante :

Proposition 2 *Dans le cas où \mathbb{K} est constant sur l'intersection des supports des ondelettes, un coefficient $F_{\underline{K}, \underline{i}, \underline{\ell}}^{\Delta, \underline{j}}$ de la matrice d'élasticité s'écrit :*

$$F_{\underline{K}, \underline{i}, \underline{\ell}}^{\Delta, \underline{j}} = \mathbb{K}_{pq} \mathcal{A}_{i_1, \ell_1}^{\Delta_1, \underline{j}} \mathcal{A}_{i_2, \ell_2}^{\Delta_2, \underline{j}} \quad (2.25)$$

avec :

$$\mathcal{A}_{i_1, \ell_1}^{\Delta_1, \underline{j}} = \int_0^1 \Psi_{j_1 i_1}^{(n_1)}(x_1) \Psi_{j_2 \ell_1}^{(m_1)}(x_1) dx_1 \quad (\text{idem pour } \mathcal{A}_{i_2, \ell_2}^{\Delta_2, \underline{j}}) \quad (2.26)$$

où :

– les couples (n_1, n_2) et (m_1, m_2) sont définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{Si } \alpha = 1 \text{ alors } (n_1, n_2) &= (1, 0); \\ \text{Si } \alpha = 2 \text{ alors } (n_1, n_2) &= (0, 1); \\ \text{Si } \beta = 1 \text{ alors } (m_1, m_2) &= (1, 0); \\ \text{Si } \beta = 2 \text{ alors } (m_1, m_2) &= (0, 1), \end{aligned}$$

– les couples $\underline{\Delta}_1$ et $\underline{\Delta}_2$ sont définis par :

$$\underline{\Delta}_1 = (n_1, m_1) \quad ; \quad \underline{\Delta}_2 = (n_2, m_2),$$

– et $f^{(n)}$ représente la dérivée d'ordre n de f .

Preuve :

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} F_{\underline{\mathcal{K}}, \underline{i}, \underline{\ell}}^{\underline{\Delta}} &= \int_{\Omega} \mathbb{K}_{pq}(x) \frac{\partial \Psi_i^{j_1}}{\partial x_{\alpha}}(x) \frac{\partial \Psi_{\ell}^{j_2}}{\partial x_{\beta}}(x) dx \\ &= \mathbb{K}_{pq} \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i^{j_1}}{\partial x_{\alpha}}(x) \frac{\partial \Psi_{\ell}^{j_2}}{\partial x_{\beta}}(x) dx \\ &= \mathbb{K}_{pq} \int_0^1 \Psi_{j_1 i_1}^{(n_1)}(x_1) \Psi_{j_2 \ell_1}^{(m_1)}(x_1) dx_1 \int_0^1 \Psi_{j_1 i_2}^{(n_2)}(x_2) \Psi_{j_2 \ell_2}^{(m_2)}(x_2) dx_2 , \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque :

Dans le cas où le tenseur de rigidité \mathbb{K} est constant et où $j_1 = j_2$, on peut montrer simplement (par simple translation) que la "matrice élémentaire" $\mathcal{K}_{\underline{i}+\underline{n}, \underline{\ell}+\underline{n}}$ est égale à la matrice $\mathcal{K}_{\underline{i}, \underline{\ell}}$ pour tout \underline{n} . La matrice totale a donc une forme particulière puisque chaque coefficient est identique à celui qui se trouve deux colonnes et deux lignes au dessus (modulo N où N est le nombre de colonne de la matrice).

$$\left[\begin{array}{cccccc} \mathcal{K}_{11} & \mathcal{K}_{12} & \mathcal{K}_{13} & \dots & \mathcal{K}_{1N-1} & \mathcal{K}_{1N} \\ \mathcal{K}_{21} & \mathcal{K}_{22} & \mathcal{K}_{23} & \dots & \mathcal{K}_{2N-1} & \mathcal{K}_{2N} \\ \mathcal{K}_{1N-1} & \mathcal{K}_{1N} & \mathcal{K}_{11} & \dots & \mathcal{K}_{1N-3} & \mathcal{K}_{1N-2} \\ \mathcal{K}_{2N-1} & \mathcal{K}_{2N} & \mathcal{K}_{21} & \dots & \mathcal{K}_{2N-3} & \mathcal{K}_{2N-2} \\ \dots & & & \dots & & \dots \\ \mathcal{K}_{13} & \mathcal{K}_{14} & \mathcal{K}_{15} & \dots & \mathcal{K}_{11} & \mathcal{K}_{12} \\ \mathcal{K}_{23} & \mathcal{K}_{24} & \mathcal{K}_{25} & \dots & \mathcal{K}_{21} & \mathcal{K}_{22} \end{array} \right] \quad (2.27)$$

Dans le cas général où \mathbb{K} est constant par morceaux, il suffira de ne calculer que deux lignes pour chaque valeur de \mathbb{K} , et tous les coefficients où \mathbb{K} n'est pas constant sur l'intersection des supports des ondelettes pour connaître la matrice entière, ce qui est gain important pour le temps de calcul.

b – \mathbb{K} n'est pas constant sur l'intersection des supports des ondelettes

Si \mathbb{K} n'est pas constant, on le décompose dans une base d'ondelettes qui n'est pas nécessairement celle utilisée pour la discrétisation de l'opérateur (puisque \mathbb{K} est constant par morceaux, le meilleur choix semble être la base de Haar).

Appelons Θ la fonction d'échelle de $H_p^1(0, 1)$ utilisée pour décomposer \mathbb{K} , et ι le niveau d'approximation choisi, on a donc l'approximation :

$$\mathbb{K}_{pq}(x_1, x_2) = \sum_{\underline{k} \in \Lambda_\iota} \mathbb{K}_{pq}^{\underline{k}} \Theta_{\iota k_1}(x_1) \Theta_{\iota k_2}(x_2) \quad (2.28)$$

Le niveau d'approximation ι n'est pas nécessairement égal à j_1 ou j_2 . Dans la pratique, on choisira ι plus grand que j_1 et que j_2 afin d'avoir $2^{\iota-j_1}$ et $2^{\iota-j_2}$ entiers.

Cette approximation étant faite, on obtient la proposition suivante :

Proposition 3 *Dans le cas où \mathbb{K} n'est pas constant sur l'intersection des supports des ondelettes, un coefficient $F_{\underline{K}, \underline{i}, \underline{\ell}}^{\underline{\Delta}, \underline{J}}$ de la matrice d'élasticité s'écrit :*

$$F_{\underline{K}, \underline{i}, \underline{\ell}}^{\underline{\Delta}, \underline{J}} = \sum_{\underline{k} \in \Lambda_\iota} \mathbb{K}_{pq}^{\underline{k}} \mathcal{B}_{k_1, i_1, \ell_1}^{\underline{\Delta}_1, \iota, \underline{J}} \mathcal{B}_{k_2, i_2, \ell_2}^{\underline{\Delta}_2, \iota, \underline{J}} \quad (2.29)$$

avec :

$$\mathcal{B}_{k_1, i_1, \ell_1}^{\underline{\Delta}_1, \iota, \underline{J}} = \int_0^1 \Theta_{\iota k_1}(x_1) \Psi_{j_1 i_1}^{(n_1)}(x_1) \Psi_{j_2 \ell_1}^{(m_1)}(x_1) dx_1 . \quad (2.30)$$

Preuve :

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
 F_{\underline{k}, \underline{i}, \underline{\ell}}^{\underline{\Delta}, \underline{J}} &= \int_{\Omega} \mathbb{K}_{pq}(x) \frac{\partial \Psi_{\underline{i}}^{j_1}(x)}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_{\underline{\ell}}^{j_2}(x)}{\partial x_{\beta}} dx \\
 &= \sum_{\underline{k} \in \Lambda_i} \mathbb{K}_{pq}^{\underline{k}} \int_{\Omega} \Theta_{ik_1}(x_1) \Theta_{ik_2}(x_2) \frac{\partial \Psi_{\underline{i}}^{j_1}(x)}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_{\underline{\ell}}^{j_2}(x)}{\partial x_{\beta}} dx \\
 &= \sum_{\underline{k} \in \Lambda_i} \mathbb{K}_{pq}^{\underline{k}} \int_0^1 \Theta_{ik_1}(x_1) \Psi_{j_1 i_1}^{(n_1)}(x_1) \Psi_{j_2 \ell_1}^{(m_1)}(x_1) dx_1 \\
 &\quad \int_0^1 \Theta_{ik_2}(x_2) \Psi_{j_1 i_2}^{(n_2)}(x_2) \Psi_{j_2 \ell_2}^{(m_2)}(x_2) dx_2
 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2.2.5 Remarques sur la structure de la matrice

Comme les ondelettes de Daubechies sont à support compact, la projection de l'opérateur d'élasticité dans une telle base peut être représentée par une matrice ayant une structure bande. En effet, si l'on considère une ligne \underline{i} de la matrice, les coefficients $(\underline{i}, \underline{\ell})$ non nuls de cette ligne sont ceux tels que les produits :

$$\Psi_{j_1 i_1}^{(n_1)}(x_1) \Psi_{j_2 \ell_1}^{(m_1)}(x_1) ; \tag{2.31}$$

$$\Psi_{j_1 i_2}^{(n_2)}(x_2) \Psi_{j_2 \ell_2}^{(m_2)}(x_2) \tag{2.32}$$

ne soient pas identiquement nuls. Sachant que le support d'une ondelette de Daubechies d'ordre M vérifie :

$$\text{Support}(\Psi_{jk}) \subset \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+2M-1}{2^j} \right], \tag{2.33}$$

l'ensemble des coefficients $(\underline{i}, \underline{\ell})$ non nuls seront ceux vérifiant :

$$\left[\frac{i_1}{2^{j_1}}, \frac{i_1+2M-1}{2^{j_1}} \right] \cap \left[\frac{\ell_1}{2^{j_2}}, \frac{\ell_1+2M-1}{2^{j_2}} \right] \neq \emptyset ; \tag{2.34}$$

$$\left[\frac{i_2}{2^{j_1}}, \frac{i_2 + 2M - 1}{2^{j_1}} \right] \cap \left[\frac{\ell_2}{2^{j_2}}, \frac{\ell_2 + 2M - 1}{2^{j_2}} \right] \neq \emptyset. \quad (2.35)$$

Dans le cas où $j_1 = j_2$, une ligne comprend au plus $2(4M - 3)^2$ coefficients, donc si l'on ne considère que le niveau d'approximation (sans les niveaux de raffinement), la matrice contient au plus $2N(4M - 3)^2$ où N est le nombre de degrés de liberté.

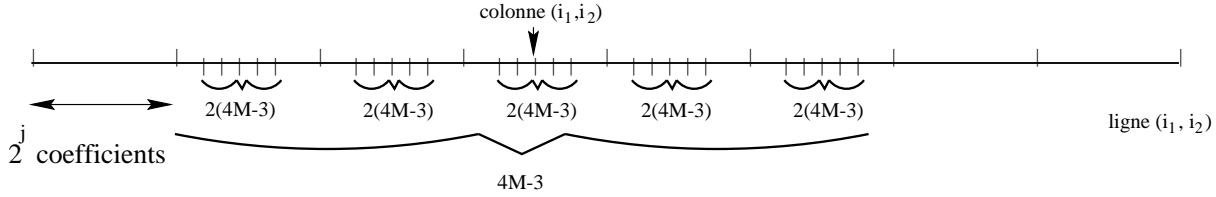


Figure 2.1 : Structure d'une ligne de la matrice d'élasticité
(exemple avec $M=2$, $j_1 = j_2 = 8$)

Dans le cas général, la matrice à une structure plus complexe, pouvant être représentée par le schéma 2.2.

2.3 Calcul des intégrales entre produits de dérivées d'ondelettes

Nous allons nous intéresser ici au calcul des coefficients $\mathcal{A}_{i,\ell}^{\Delta,j}$ et $\mathcal{B}_{k,i,\ell}^{\Delta,\iota,j}$ tels qu'ils ont été définis par (2.26) et (2.30). La première étape est de se ramener aux coefficients :

$$\mathcal{A}_{i,\ell}^{\Delta,j} = \int_0^1 \Psi_{ji}^{(n)}(x) \Psi_{j\ell}^{(m)}(x) dx ; \quad (2.36)$$

$$\mathcal{B}_{k,i,\ell}^{\Delta,j} = \int_0^1 \Theta_{jk}(x) \Psi_{ji}^{(n)}(x) \Psi_{j\ell}^{(m)}(x) dx , \quad (2.37)$$

où j est le minimum de ι, j_1, j_2 . Pour cela, on utilisera l'algorithme pyramidal de S. Mallat [26] qui permet de déterminer les coefficients d'ondelettes d'une fonction f à un niveau d'approximation j les connaissant à un niveau j' supérieur.

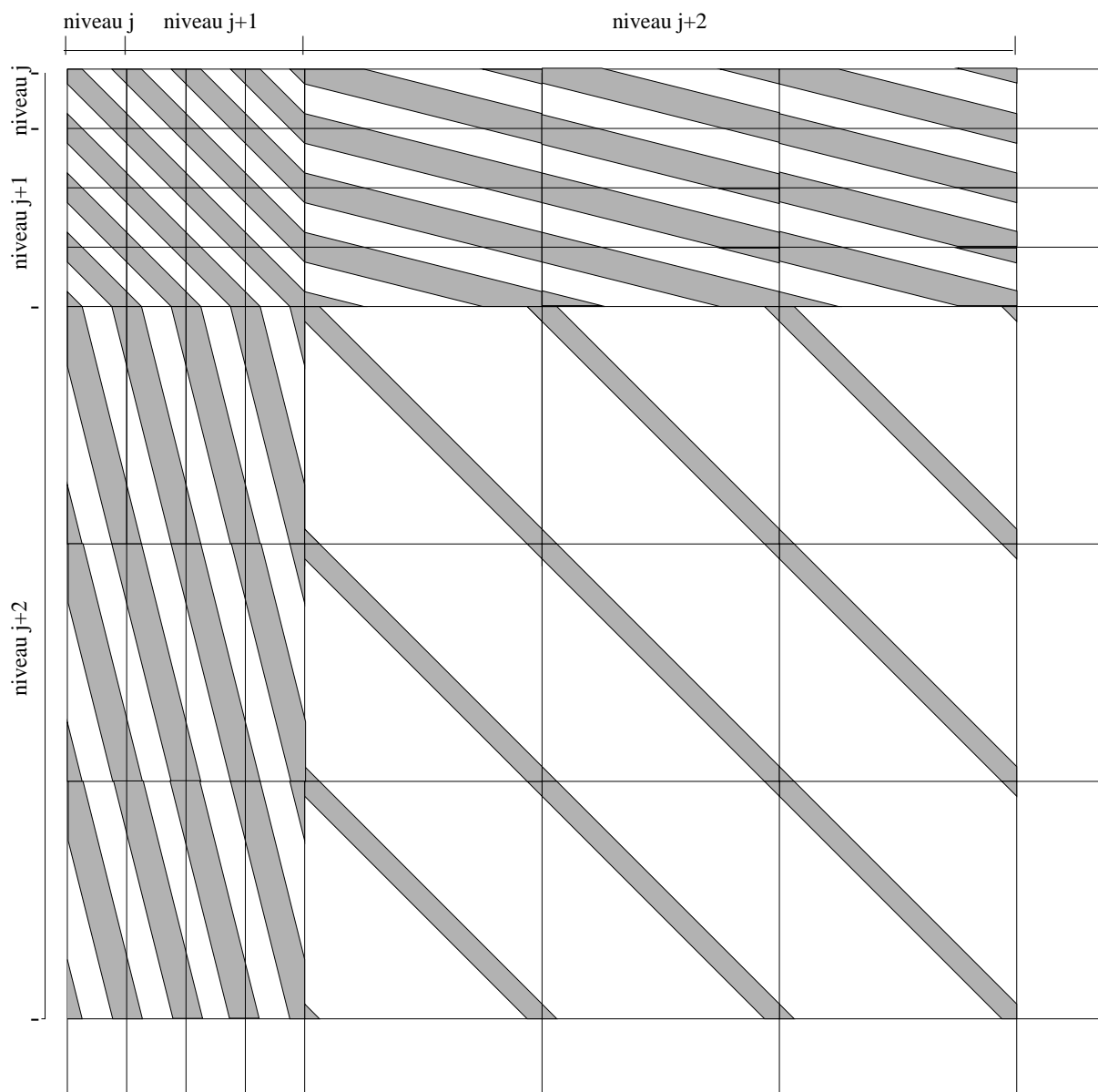


Figure 2.2 : Structure de la matrice d'élasticité

2.3.1 Algorithme pyramidal

La structure d'une base d'ondelettes est extrêmement simple, elle est constituée uniquement de translations et de dilatations de deux fonctions, l'ondelette et la fonction d'échelle. Cette simplicité permet la mise en œuvre d'un algorithme rapide de décomposition–recomposition, aussi appelé l'algorithme de Mallat [26], basé sur la notion d'analyse multirésolution. Il est particulièrement adapté aux ondelettes à support compact de I. Daubechies où les filtres associés sont de longueur finie (ce qui permettra d'avoir un algorithme exact).

Nous rappellerons tout d'abord l'algorithme en dimension 1 puis nous verrons comment il se transpose à la dimension 2.

a – La dimension 1

On considère ici une fonction f dans $H_p^1(0,1)$, et une base d'ondelettes de Daubechies d'ordre M du même espace construite à partir de la fonction d'échelle notée ϕ et de l'ondelette associée notée Ψ . On rappelle que ces fonctions sont définies à partir de leurs homologues sur $H^1(\mathbb{R})$ notées φ et ψ , et que l'on a la propriété :

$$\int_0^1 f(x) \phi_{jk}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi_{jk}(x) dx \quad \text{pour } j \geq 0, k = 0, \dots, 2^j - 1 \quad (2.38)$$

et de même pour l'ondelette associée.

Notation :

On considère dans ce paragraphe les coefficients d'ondelettes d'approximation et de détails d'une fonction f :

$$s_k^j = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi_{jk}(x) dx ; d_k^j = \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi_{jk}(x) dx \quad j \geq 0, k = 0, \dots, 2^j - 1 \quad (2.39)$$

et on s'intéresse au passage des coefficients d'un niveau j à un niveau j' inférieur, ainsi que l'opération inverse. Pour cela, on va utiliser la notion d'analyse multirésolution ainsi que les propriétés qui en découlent pour l'ondelette et la fonction d'échelle.

Décomposition

Si l'on connaît les coefficients d'ondelettes $\{s_k^j\}_{k=0, \dots, 2^j-1}$ d'une fonction f à un niveau j , on en déduit les coefficients $\{s_k^{j-1}\}_{k=0, \dots, 2^{j-1}-1}$ et $\{d_k^{j-1}\}_{k=0, \dots, 2^{j-1}-1}$ à l'aide de la proposition [26] :

Proposition 4 Soient f une fonction de $H_p^1(0,1)$, φ la fonction d'échelle de Daubechies d'ordre M sur $H^1(\mathbb{R})$ et ψ l'ondelette associée, h et g les filtres dont elles sont issues. On considère les coefficients d'ondelettes s_n^j de f à un niveau j , alors on en déduit ceux au niveau $j-1$ à l'aide des formules :

$$s_k^{j-1} = \sum_{n=2k}^{n=2M-1+2k} h(n-2k) s_n^j \quad ; \quad d_k^{j-1} = \sum_{n=2k}^{n=2M-1+2k} g(n-2k) s_n^j . \quad (2.40)$$

Preuve : La preuve de cette proposition est une conséquence directe de la notion d'analyse multirésolution (voir (1.13), (1.14), (1.16)).

L'algorithme se résume donc en un simple produit de convolution entre les filtres h ou g et les coefficients d'ondelettes au niveau supérieur. Il est donc d'un coût de $(2M-1)N$ opérations (si l'on a N coefficients au niveau j) pour un passage d'un niveau j au niveau $j-1$, et peut se résumer par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \{s_k^j\} & \longrightarrow & \{s_k^{j-1}\} & \longrightarrow & \{s_k^{j-2}\} & \longrightarrow & \dots & \dots & \longrightarrow & \{s_k^1\} & \longrightarrow & \{s_k^0\} \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \searrow & & \searrow & \\ & & \{d_k^{j-1}\} & & \{d_k^{j-2}\} & & \dots & & & \{d_k^1\} & & \{d_k^0\} \end{array}$$

Figure 2.3 : L'algorithme pyramidal : décomposition

Recomposition

On peut, à l'aide des mêmes propriétés, réaliser l'opération inverse. On obtient ainsi la proposition [26]:

Proposition 5 *Soient f une fonction de $H_p^1(0,1)$, φ la fonction d'échelle de Daubechies d'ordre M sur $H^1(\mathbb{R})$ et ψ l'ondelette associée, h et g les filtres dont elles sont issues. On considère les coefficients d'ondelettes s_n^j et d_n^j de f à un niveau j , alors on en déduit ceux au niveau $j+1$ à l'aide de la formule :*

$$s_k^{j+1} = \sum_n h(2n-k) s_n^j + \sum_n g(2n-k) d_n^j . \quad (2.41)$$

Cette opération est analogue à la précédente, et peut se résumer par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \{s_k^0\} & \longrightarrow & \{s_k^1\} & \longrightarrow & \{s_k^2\} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \{s_k^{j-1}\} & \longrightarrow & \{s_k^j\} \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ \{d_k^0\} & & \{d_k^1\} & & \{d_k^2\} & & \dots & & \{d_k^{j-1}\} & & & & \end{array}$$

Figure 2.4 : L'algorithme pyramidal: recomposition

b – La dimension 2

L'algorithme pyramidal en dimension 2 est analogue à celui de la dimension 1. Si on considère une fonction f de $H_p^1(\Omega)$ où Ω est le carré unité, alors sa projection dans un espace $\mathcal{V}_j^2(j \geq 0)$ d'une analyse multirésolution de $H_p^1(\Omega)$ peut s'écrire à partir de produits d'ondelettes sur $H_p^1(0,1)$ (cf. (1.50)). Les coefficients d'ondelettes de f sont alors (en utilisant toujours l'égalité (2.38)) :

$$s_{\underline{k}}^j = (f, \phi_{j\underline{k}}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) \varphi_{jk_1}(x_1) \varphi_{jk_2}(x_2) dx_1 dx_2 ;$$

$$c_{\underline{k}}^j = (f, \Psi_{j\underline{k}}^1) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) \varphi_{jk_1}(x_1) \psi_{jk_2}(x_2) dx_1 dx_2 ;$$

$$d_{\underline{k}}^j = (f, \Psi_{j\underline{k}}^2) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) \psi_{jk_1}(x_1) \varphi_{jk_2}(x_2) dx_1 dx_2 ;$$

$$e_{\underline{k}}^j = \left(f, \Psi_{j\underline{k}}^3 \right) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) \psi_{jk_1}(x_1) \psi_{jk_2}(x_2) dx_1 dx_2 .$$

Donc, pour calculer les coefficients d'ondelettes à un niveau d'approximation j connaissant ceux d'un niveau j' , on utilise l'algorithme pyramidal du paragraphe précédent dans chacune des directions.

On obtient ainsi les algorithmes de décomposition et de recombinaison suivant :

Décomposition

Proposition 6 Soient f une fonction de $H_p^1(\Omega)$, φ la fonction d'échelle de Daubechies d'ordre M sur $H^1(\mathbb{R})$ et ψ l'ondelette associée, h et g les filtres dont elles sont issues. On considère les coefficients d'ondelettes $s_{\underline{n}}^j$ de f à un niveau j , alors on en déduit ceux au niveau $j - 1$ à l'aide des formules :

$$s_{\underline{k}}^{j-1} = \sum_{n_1=2k_1}^{2M-1+2k_1} \sum_{n_2=2k_2}^{2M-1+2k_2} h(n_1 - 2k_1) h(n_2 - 2k_2) s_{\underline{n}}^j ; \quad (2.42)$$

$$c_{\underline{k}}^{j-1} = \sum_{n_1=2k_1}^{2M-1+2k_1} \sum_{n_2=2k_2}^{2M-1+2k_2} h(n_1 - 2k_1) g(n_2 - 2k_2) s_{\underline{n}}^j ; \quad (2.43)$$

$$d_{\underline{k}}^{j-1} = \sum_{n_1=2k_1}^{2M-1+2k_1} \sum_{n_2=2k_2}^{2M-1+2k_2} g(n_1 - 2k_1) h(n_2 - 2k_2) s_{\underline{n}}^j ; \quad (2.44)$$

$$e_{\underline{k}}^{j-1} = \sum_{n_1=2k_1}^{2M-1+2k_1} \sum_{n_2=2k_2}^{2M-1+2k_2} g(n_1 - 2k_1) g(n_2 - 2k_2) s_{\underline{n}}^j . \quad (2.45)$$

Recomposition

Proposition 7 Soient f une fonction de $H_p^1(\Omega)$, φ la fonction d'échelle de Daubechies d'ordre M sur $H^1(\mathbb{R})$ et ψ l'ondelette associée, h et g les filtres dont elles sont issues. On considère les coefficients d'ondelettes $s_{\underline{n}}^j$, $c_{\underline{n}}^j$, $d_{\underline{n}}^j$ et $e_{\underline{n}}^j$ de f à un niveau j , alors on en déduit ceux au niveau $j + 1$ à l'aide de la formule :

$$s_{\underline{k}}^{j+1} = \frac{1}{2} \left[\sum_{\underline{n}} h(2n_1 - k_1) h(2n_2 - k_2) s_{\underline{n}}^j + \sum_{\underline{n}} h(2n_1 - k_1) g(2n_2 - k_2) c_{\underline{n}}^j \right. \\ \left. + \sum_{\underline{n}} g(2n_1 - k_1) h(2n_2 - k_2) d_{\underline{n}}^j + \sum_{\underline{n}} g(2n_1 - k_1) g(2n_2 - k_2) e_{\underline{n}}^j \right] . \quad (2.46)$$

Remarques :

- Le coût de calcul pour le passage de N coefficients d'un niveau d'approximation j au niveau voisin $j-1$ nécessite $(2M-1)^{2N}$ opérations si l'on utilise une ondelette de Daubechies d'ordre M .

- Dans le cas d'une ondelette à support compact (où les filtres h et g sont de longueur finie), cet algorithme est exact.

2.3.2 Les intégrales entre produits de dérivées d'ondelettes**a – Les produits des dérivées de deux ondelettes**

Dans le cas où le tenseur de rigidité est constant sur l'intersection des supports des ondelettes, le calcul des coefficients de la matrice d'élasticité est basé sur la connaissance des produits scalaires entre les dérivées de deux ondelettes (ou fonctions d'échelle) périodiques $\mathcal{A}_{i,\ell}^{\Delta j}$ définis par (2.26).

A l'aide des relations (1.13) ou (1.16) ainsi que leurs dérivées appliquées à l'ondelette (ou la fonction d'échelle) dont le niveau d'approximation est le plus élevé, on peut se ramener aux intégrales (en appelant $j = \min(j_1, j_2)$) entre les dérivées de deux fonctions d'échelle au même niveau d'approximation :

$$\mathcal{A}_{i,\ell}^{\Delta j} = \int_0^1 \phi_{ji}^{(n)}(x) \phi_{j\ell}^{(m)}(x) dx . \quad (2.47)$$

Ensuite, à l'aide de la définition des ondelettes périodiques, on peut déterminer les coefficients précédents à partir des produits scalaires entre les dérivées de fonction d'échelle sur $H^1(\mathbb{R})$ (cf. remarque (2.38)) :

$$a_{i,\ell}^{\Delta j} = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{ji}^{(n)}(x) \varphi_{j\ell}^{(m)}(x) dx , \quad (2.48)$$

puis, par changement de variable et par intégrations par parties, à partir des coefficients :

$$r_i^n = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{0i}(x) \varphi_{00}^{(n)}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-i) \varphi^{(n)}(x) dx . \quad (2.49)$$

Le calcul de ces intégrales est un cas particulier du théorème qui est dû à G. Beylkin [4] :

Proposition 8 *Soit les coefficients $r_i^n = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-i) \varphi^{(n)}(x) dx$ où φ est une ondelette de Daubechies d'ordre M sur \mathbb{R} , ces coefficients vérifient l'égalité :*

$$r_i^n = 2^n \left[r_{2i}^n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M a_{2k-1} (r_{2i-2k+1}^n + r_{2i+2k-1}^n) \right], \quad (2.50)$$

et la condition de normalisation :

$$\sum_{k=0}^{2M-1} k^n r_k^n = (-1)^n n! , \quad (2.51)$$

où les coefficients de corrélation sont définis par :

$$a_i = 2 \sum_{k=0}^{2M-1-i} h(k) h(k+i) \quad ; \quad i = 1, \dots, 2M-1 , \quad (2.52)$$

où la suite $\{h(i)\}_{i=0, \dots, 2M-1}$ est le filtre associé à l'ondelette.

Pour le calcul effectif de ces coefficients, on en déduit un corollaire :

Corollaire 2 *Les coefficients $\{r_k^n ; k = -2M+2, 2M-2\}$ sont les vecteurs propres associés à la valeur propre 2^{-n} de la matrice \mathbb{A} de taille $(4M-3) \times (4M-3)$ définie par :*

$$\mathbb{A}_{i\ell} = \sum_{k=0}^{2M-1} h(k) h(2i+k-\ell) \chi_{[0, 2M-1]}(2i+k-\ell) \quad (2.53)$$

où $\chi(n) = 1$ si n est dans l'intervalle $[0, p]$, et 0 sinon,

et la condition de normalisation :

$$\sum_{k=0}^{2M-1} k^n r_k^n = (-1)^n n! . \quad (2.54)$$

Preuve : Voir annexe 1

Remarque :

Comme la matrice \mathbb{A} est de petite dimension, ces coefficients peuvent être calculés par un logiciel de calcul formel. Ils sont donnés dans l'annexe 1 dans le cas des ondelettes de Daubechies d'ordre 2 à 5.

b – Les produits des dérivées de trois ondelettes

Par la même technique que précédemment (algorithme pyramidal puis intégrations par parties), l'intégrale entre les dérivées de trois ondelettes (ou fonctions d'échelle) périodiques $\mathcal{B}_{k,i,\ell}^{\Delta,j}$ définis par (2.30) peut se ramener aux produits scalaires entre les dérivées de trois ondelettes non périodiques au niveau d'approximation $j = 0$:

$$\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{\Delta} = \int_{\mathbb{R}} \theta(x) \varphi^{(n_1)}(x - \ell_1) \varphi^{(n_2)}(x - \ell_2) dx \quad (2.55)$$

où θ est la fonction d'échelle définie sur \mathbb{R} à partir de laquelle a été construite la fonction d'échelle 1-périodique Θ .

Comme précédemment, ce calcul va se faire par la recherche de vecteurs propres d'une matrice. On a la proposition suivante :

Proposition 9 *Soit les coefficients définis par (2.55) où θ (resp. φ) est une ondelette de Daubechies d'ordre \mathcal{M} (resp. M) sur $H^1(\mathbb{R})$, ces coefficients vérifient l'égalité :*

$$\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{\Delta} = 2^{n_1+n_2} \sum_{\ell_1, \ell_2=0}^{2M-1} \mathbb{B}_{\ell_1, \ell_2, i_1, i_2} \Gamma_{i_1, i_2}^{\Delta} \quad (2.56)$$

où \mathbb{B} est le tenseur d'ordre 4 défini par :

$$\mathbb{B}_{\ell_1, \ell_2, i_1, i_2} = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} H(k) h(i_1 - 2\ell_1 + k) h(i_2 - 2\ell_2 + k) \chi_{[0, 2M-1]}(i_1 - 2\ell_1 + k) \chi_{[0, 2M-1]}(i_2 - 2\ell_2 + k) \quad (2.57)$$

et l'équation de normalisation :

$$\sum_{k=0}^{2M-1} k^\ell r_k^\ell = (-1)^\ell \ell! \quad (2.58)$$

où la suite $\{H(i)\}_{i=0, \dots, 2M-1}$ (resp. $\{h(i)\}_{i=0, \dots, 2M-1}$) est le filtre associé à la fonction d'échelle Θ (resp. φ).

Preuve : Voir Annexe 2.

Remarque :

La recherche de ces coefficients Γ consiste donc en la recherche d'une matrice propre associée à la valeur propre $2^{n_1+n_2}$ du tenseur d'ordre 4 noté \mathbb{B} . Par un procédé de rangement adapté, on peut se ramener à la recherche de vecteurs propres. A chaque valeur propre, le vecteur propre n'est pas unique (il suffit que la somme des dérivées soit égale à $n_1 + n_2$), il faut utiliser plusieurs fois l'équation de normalisation pour obtenir le vecteur souhaité (pour plus de précision, se référer à l'annexe 2). Ces coefficients seront donnés en annexe 2 dans le cas des ondelettes de Daubechies d'ordre 2 à 5.

c – Remarque sur le calcul de ces intégrales

On peut remarquer que la manière de procéder pour le calcul des coefficients de la matrice de rigidité peut entraîner des erreurs non négligeables si elle est mal conditionnée. En effet, la formule de changement d'échelle (1.13) est stable. Mais si on la dérive, il apparaît un terme "2" en facteur, la formule obtenue n'est alors plus stable.

Dans le cas de la dérivée de l'ondelette ψ' , une solution est de construire une analyse multirésolution (biorthogonale) telle que l'ondelette associée soit justement ψ' [2], [12], on peut ainsi (en notant ξ la fonction d'échelle associée) construire un filtre G tel que :

$$\psi'(x) = \sqrt{2} \sum_k G(k) \xi(2x - k)$$

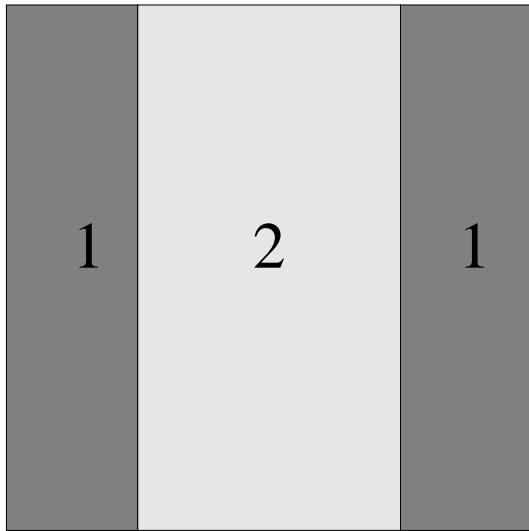
Malheureusement, dans le cas de la dérivée de la fonction d'échelle φ' , on ne peut pas faire une telle construction. J. Liandrat et P.J. Ponenti ont proposé une technique pour améliorer ces calculs, mais elle est complexe et coûteuse.

Toutefois, les tests de validation que nous avons effectués nous ont conduits à penser que notre manière de procéder n'engendrait pas d'instabilités importantes.

2.4 Applications numériques

2.4.1 Test de validation

L'objectif de ce paragraphe est d'évaluer la qualité du calcul de la matrice d'élasticité. Pour cela, on considère un matériau composite périodique de période $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, dont une période est constituée de trois couches carbure de silicium/aluminium/carbure de silicium (largeur de la première couche: 0,25; de la seconde: 0,5; de la troisième: 0,25) représentée par la figure (2.5).



Matériau 1 : Carbure de silicium

Module d'Young : 410 GPa

Coefficient de Poisson : 0,19

Matériau 2 : Aluminium

Module d'Young : 72 GPa

Coefficient de Poisson : 0,32

Figure 2.5 : Composite élémentaire

On suppose ensuite que le matériau a un déplacement u défini par :

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x_1, x_2) = \sin(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2) \\ u_2(x_1, x_2) = 10 \cos(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) \end{cases} \quad (2.59)$$

où $x = (x_1, x_2) \in \Omega =]0, 1[\times]0, 1[$.

On peut montrer simplement qu'alors le matériau élastique subit une force définie par :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 4\pi^2 \left[\mathbb{K}_{11}(x) + 10 \mathbb{K}_{12}(x) + 11 \mathbb{K}_{33}(x) \right] \sin(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2) \\ f_2(x_1, x_2) = 4\pi^2 \left[\mathbb{K}_{12}(x) + 10 \mathbb{K}_{22}(x) + 11 \mathbb{K}_{33}(x) \right] \cos(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) \end{cases} \quad (2.60)$$

Afin d'étudier les résultats, on ne s'intéressera qu'à l'étude d'une coupe de la force f définie par :

$$f_1(x_1, x_2) \quad \text{pour } x_1 \in [0, 1], \quad x_2 = 0,5 \quad (2.61)$$

qui, vue la symétrie du problème, est tout à fait représentative des phénomènes existant sur Ω .

Selon les cas, on comparera les coupes de la force obtenue par diverses méthodes :

1 — La force qui sera notée f^e est celle donnée directement par la formule (2.60) ;

2 — La force approchée, notée f^p , obtenue par projection de la force f dans un espace d'approximation qui restera à définir ;

3 — La force approchée, notée f^c , obtenue par le calcul suivant :

On projette tout d'abord le déplacement (2.59) dans une base d'ondelettes. Le vecteur ainsi obtenu est multiplié par la matrice d'élasticité calculée dans la même base. Cette opération nous donne les coefficients d'ondelettes d'une fonction (notée f^c), qui, après recomposition dans l'espace physique, sera comparée avec la force (2.60) qu'elle est censée approcher.

Afin d'estimer l'erreur commise lorsque l'on utilise des méthodes approchées, et de localiser cette erreur, on définit une fonction g par :

$$g(x_1) = \frac{|f_1^e(x_1, x_2) - f_1^{app}(x_1, x_2)|}{|f_1^e(x_1, x_2)|} \quad \text{pour } x_1 \in [0, 1], \quad x_2 = 0,5 \quad (2.62)$$

où f^{app} est la force approchée (f^p ou f^c). Cette fonction évalue l'erreur relative commise en chaque point par rapport à la solution exacte.

2.4.2 Résultats et commentaires

Nous allons étudier ici l'influence de divers paramètres lorsque l'on traite le problème exposé dans le paragraphe précédent.

En premier lieu, nous étudierons comment se comporte la solution f^c par rapport à la solution exacte et à la solution f^p lorsque l'on augmente le niveau d'approximation (et donc le nombre de degrés de liberté).

Ensuite, nous étudierons l'influence de l'ordre de l'ondelette sur la qualité de la solution. Enfin, nous nous intéresserons au raffinement à la fois local (autour des singularités) et global.

Nous n'étudierons pas dans cette partie l'influence de la discrétisation du tenseur de rigidité \mathbb{K} . Cette étude sera faite dans la partie traitant de l'homogénéisation, où l'on considèrera des géométries plus complexes. Pour cette raison, ce tenseur sera toujours discrétisé à l'aide de la fonction d'échelle de Haar à un niveau d'approximation $\iota = 7$ (32 768 coefficients).

a – Influence du niveau d'approximation

Lorsque le niveau d'approximation j de la fonction d'échelle avec laquelle on projette les différents opérateurs augmente, la solution approchée doit tendre vers la solution exacte.

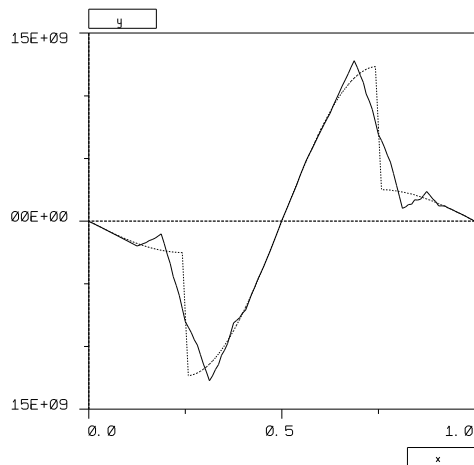
Afin de vérifier cette affirmation, on projette l'opérateur d'élasticité et le déplacement dans une base d'ondelettes à l'aide de la fonction d'échelle de Daubechies d'ordre 3, et on compare les résultats obtenus lorsqu'on choisit un niveau d'approximation $j = 4$ (512 degrés de liberté) ou $j = 6$ (8192 degrés de liberté).

Commentaires :

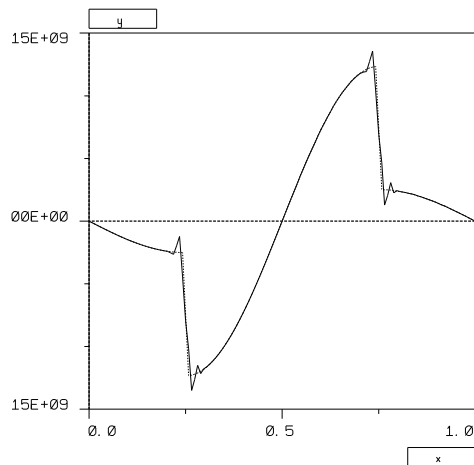
Les courbes obtenues (figure 2.6) montre clairement que l'augmentation du niveau d'approximation (et donc du nombre de degrés de liberté) diminue l'erreur commise.

Cette erreur est essentiellement localisée autour des singularités est la solution obtenue avec 512 degrés de liberté est tout à fait acceptable loin des singularités. Ceci nous permettra d'avoir des renseignements sur le niveau d'approximation le plus bas que l'on devra choisir lorsque nous nous préoccupons de raffinement local.

Les effets de Gibbs deviennent de plus en plus localisés autours des singularités. Ce phénomène provient du fait que, comme le support d'une ondelette est réduit de moitié lors

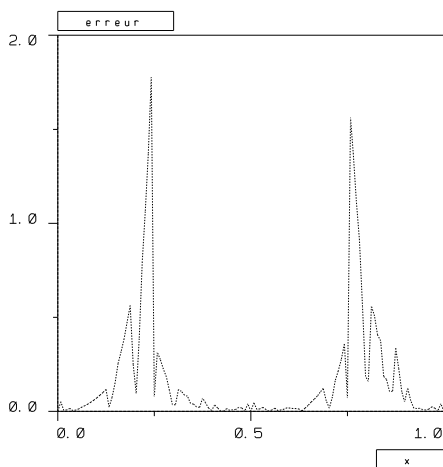


*Décomposition dans V_4
(512 degrés de liberté)
Nombre de coefficients dans
la matrice : 29 056*

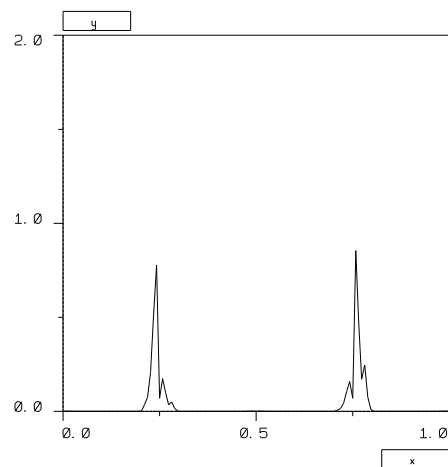


*Décomposition dans V_6
(8096 degrés de liberté)
Nombre de coefficients dans
dans la matrice : 364 672*

(trait plein : solution calculée — trait pointillé : solution exacte)



Erreur relative pour $j = 4$



Erreur relative pour $j = 6$

Figure 2.6 : Influence du niveau d'approximation

du passage d'un niveau j au niveau $j + 1$, l'intervalle occupé par ces ondelettes diminue également de moitié.

On remarque également que l'erreur relative maximale commise sur la coupe diminue lorsque le niveau d'approximation augmente.

Le nombre théorique de coefficients non nuls dans la matrice d'élasticité croît linéairement avec le nombre de degrés de liberté (il est égal à $2N(4M - 3)^2$, où N est le nombre de degrés de liberté et M l'ordre de l'ondelette). Dans la pratique, beaucoup de ces coefficients sont nuls à cause des propriétés des produits scalaires entre les dérivées d'ondelettes. Nous n'avons conservé, pour faire le calcul, que les coefficients d'un module supérieur à $10^{-10} \mathbb{K}_{11}$ où \mathbb{K}_{11} est l'élément de coordonnées (1,1) de la matrice d'élasticité. Il ne reste alors que 57 600 coefficients significatifs au lieu de 93 184 dans le cas où le niveau d'approximation $j = 4$, ce qui représente un gain important. Ce gain est encore meilleur dans le cas où $j = 6$ (727 296 coefficients significatifs au lieu de 1 327 104 prévus par la théorie). Le nombre de coefficients significatifs ne croît donc pas linéairement avec le nombre de degrés de liberté (il est multiplié par 12,63 pour le passage du niveau d'approximation $j = 4$ au niveau $j = 6$, alors que le nombre de degrés de liberté est multiplié par 16).

b – Comparaison avec une décomposition directe

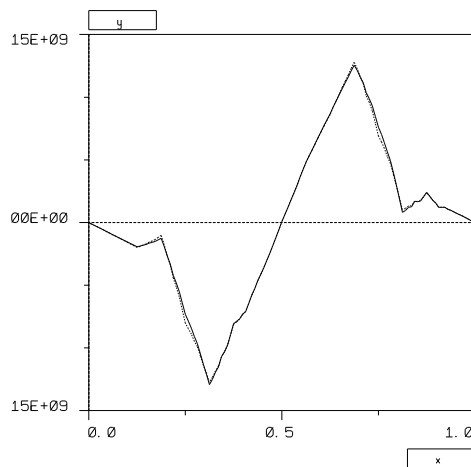
On tente ici d'évaluer la qualité d'approximation de la matrice d'élasticité. Pour cela, on compare la projection f^p de la force dans une base d'ondelettes (ici les ondelettes de Daubechies d'ordre $M = 3$) avec la fonction f^c obtenue après multiplication de la matrice d'élasticité par la projection du déplacement u dans la même base.

On présente une superposition des coupes définies par (2.61) de f^p et de f^c dans le cas où le niveau d'approximation j est égal à 4, et dans le cas où il est égal à 6.

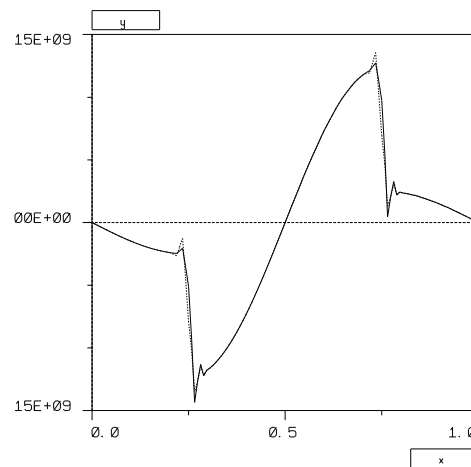
On compare les erreurs commises à l'aide de la fonction g définie par (2.62). On superpose la différence relative entre f^c et f^e avec la différence relative entre f^p et f^e .

Commentaires :

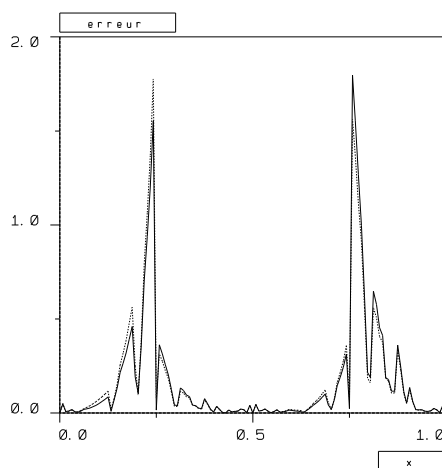
Il apparaît nettement que la différence d'erreur entre f^p et f^c est minime (moins de 1% de différence). L'erreur commise est principalement due aux discontinuités de la force, même si la multiplication de la matrice d'élasticité et du vecteur issu de la projection du déplacement induit une légère propagation de cette erreur, et un effet de Gibbs plus important autour de ces singularités.



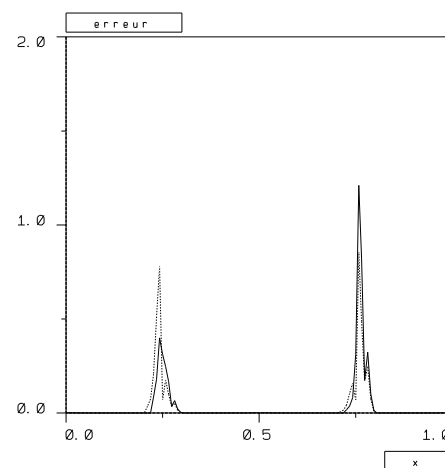
*Décomposition dans V_4
(512 degrés de liberté)*



*Décomposition dans V_6
(8096 degrés de liberté)*



Erreur relative pour $j = 4$



Erreur relative pour $j = 6$

(trait plein : décomposition directe — trait pointillé : force calculée)

Figure 2.7 : Comparaison avec une décomposition directe

c – Influence de l'ordre de l'ondelette

Selon les caractéristiques de l'ondelette utilisée (régularité, taille du support ...), l'approximation sera plus ou moins bonne sur les parties régulières, et les phénomènes de Gibbs seront plus ou moins étendus.

Afin d'évaluer ces phénomènes, nous avons comparé les résultats obtenus lorsque l'on utilise les ondelettes de Daubechies d'ordre 3 ou 5 (on a choisi ici un niveau d'approximation $j = 5$). L'erreur relative commise dans chacun des cas est toujours évaluée à l'aide de la fonction g (définie par (2.62)) appliquée à chacune des solutions approchées.

Commentaires :

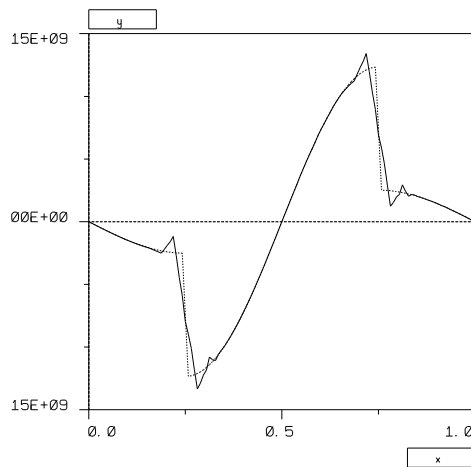
On retrouve ici certains résultats édictés dans le chapitre 1. Entre autre, au plus l'ordre de l'ondelette est élevé, au plus la convergence vers la solution est rapide. En contre-partie, comme le support de l'ondelette est plus large, les phénomènes de Gibbs sont plus étalés.

Même si la solution obtenue lorsque l'on utilise les ondelettes d'ordre plus élevé est meilleure, il n'est pas clair que leur utilisation soit avantageuse. En effet, la largeur de bande de la matrice d'élasticité augmente avec l'ordre de l'ondelette. Dans le cas où l'ordre $M = 5$ et où le niveau d'approximation $j = 5$, le nombre de coefficients de la matrice d'élasticité devient comparable au cas où $M = 3$ et $j = 6$, et les résultats ne sont pas meilleurs, tout au moins au niveau des singularités. Enfin, le coût de calcul d'un coefficient de la matrice d'élasticité croît également avec l'ordre de l'ondelette. L'ordre de l'ondelette que l'on doit choisir dépend donc de la régularité de la solution.

d – Le raffinement

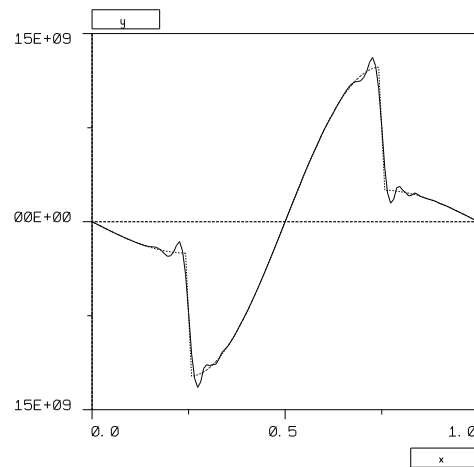
Le nombre de degrés de liberté du problème croît rapidement lorsque le niveau d'approximation augmente (il est multiplié par 4 pour le passage d'un niveau j au niveau $j + 1$). De plus, si les singularités du matériau sont isolés, le nombre de coefficients significatifs peut être très inférieur (voir paragraphe 1.7).

Pour vérifier ces propriétés, on traite le problème précédent avec une ondelette de Daubechies d'ordre 3 dans différents espaces vectoriels issues d'une analyse multirésolution : les espaces V_5 , $V_4 \oplus W_4$ et dans un sous espace de celui-ci où l'on ne conserve les coefficients d'ondelettes de W_4 qu'autour des singularités.

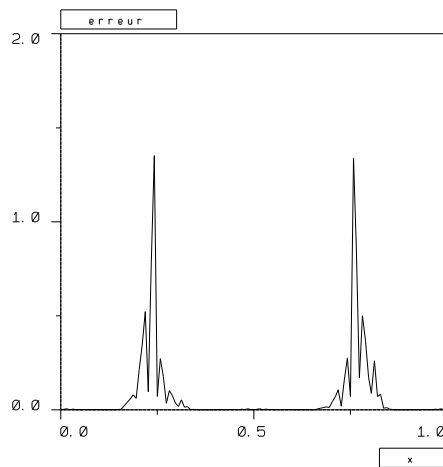


Ordre de l'ondelette $M = 3$
 Nombre de coefficients dans
 la matrice : 98 368

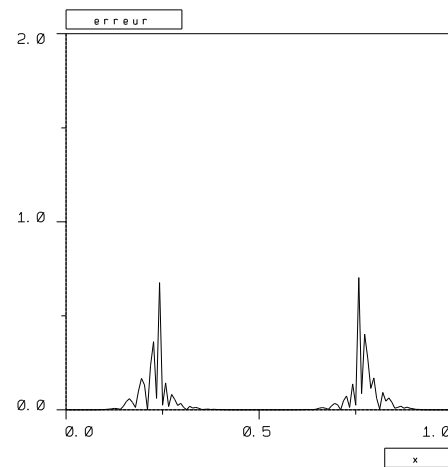
(trait plein : solution calculée — trait pointillé : solution exacte)



Ordre de l'ondelette $M = 5$
 Nombre de coefficients dans
 dans la matrice : 364 672



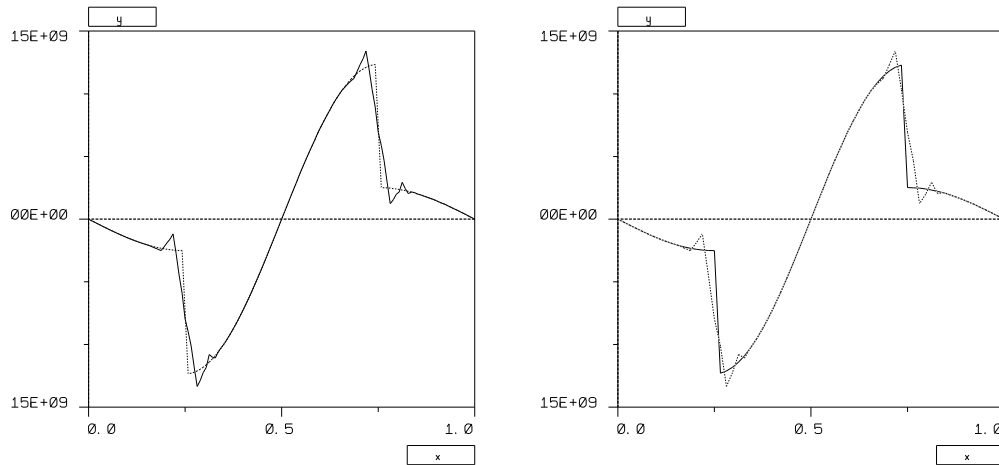
Erreur relative pour $M = 3$



Erreur relative pour $M = 5$

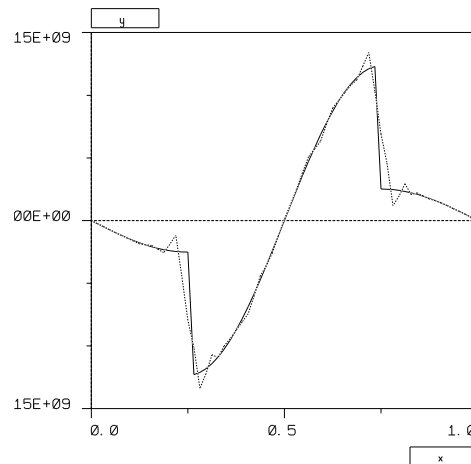
(niveau d'approximation $j = 5$, 2 048 degrés de liberté)

Figure 2.8 : Influence de l'ordre de l'ondelette



Décomposition dans V_5
(2 048 degrés de liberté)
Nombre de coefficients dans
la matrice : 98 368

Décomposition dans $V_4 \oplus W_4$
(2 048 degrés de liberté)
Nombre de coefficients dans
la matrice : 607 024



Décomposition dans $V_4 \oplus w_4$
(w_4 sous-espace de W_4)
(1 472 degrés de liberté)
Nombre de coefficients dans
la matrice : 316 720

Figure 2.9 : Le raffinement

Commentaires :

On observe tout d'abord que les deux premiers résultats (calculés dans V_5 directement ou dans $V_5 = V_5 \oplus W_4$) sont très proches (moins de 1 % de différences). Dans le cas d'un raffinement local (où on n'a conservé que les coefficients d'ondelettes de coordonnées \underline{k} dans W_4 tels que l'ondelette $\Psi_{j\underline{k}}$ a une intersection non vide avec une des interfaces ($x_1 = 0,25$ ou $x_1 = 0,75$)), le nombre de degrés de liberté est beaucoup moins important (1472 au lieu de 2048), alors que l'erreur relative commise reste du même ordre que dans les cas précédents (la différence entre les erreurs relatives est de l'ordre de 1 %). Toutefois, on observe que le nombre de coefficients de la matrice d'élasticité est plus élevé que si l'on traite l'exemple directement dans V_5 (de plus, la détermination de chacun de ces coefficients est coûteuse puisqu'il s'agit de ceux dont l'ondelette a une intersection non vide avec l'interface). En contrepartie, on peut remarquer que des études ont montré [9] qu'il était possible de supprimer les coefficients les plus petits, sans perdre pour autant de la précision dans les calculs.

2.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de proposer une méthode basée sur la transformée en ondelettes pour discrétiser l'opérateur d'élasticité, et de valider cette technique sur un exemple analytique qui nous a amené à tirer plusieurs conclusions.

Tout d'abord, les résultats obtenus dans le cas d'une solution discontinue sont satisfaisants, même si l'on observe un phénomène de Gibbs autour des discontinuités. Ce phénomène n'est d'ailleurs pas amplifié par la multiplication de la matrice (on trouve des résultats analogues en décomposant directement la solution).

D'autre part, l'utilisation d'une ondelette de Daubechies d'ordre élevé ne s'avère pas obligatoirement avantageuse. En effet, même si son emploi accélère la convergence de la méthode de Galerkin, le coût de calcul de la matrice d'élasticité plus important nuit à son intérêt.

Enfin, on observe qu'il est aussi possible d'utiliser une discrétisation relativement grossière et de ne considérer une discrétisation fine qu'autour des singularités. Cette technique permet de réduire le nombre de degrés de liberté de façon sensible, et rend possible l'obtention de résultats comparables à ceux fournis par une discrétisation fine sur la totalité du domaine.

D'autres validations de cette méthode seront proposées dans la seconde partie.

Conclusion

Les ondelettes étant des fonctions localisées à la fois dans l'espace physique et dans l'espace de Fourier, elles peuvent se placer comme une solution intermédiaire entre l'analyse de Fourier et la méthode des éléments finis. Leurs propriétés de localisation permettent de plus de pouvoir déterminer la régularité globale et surtout locale des fonctions analysées. Des techniques de raffinement local très simples sont alors aisées à élaborer. Ceci est un net avantage par rapport aux méthodes existantes, puisque c'est impossible à réaliser avec l'analyse de Fourier où l'on utilise des fonctions non localisées, et très difficile à mettre en oeuvre avec les éléments finis. En effet, avec cette dernière technique, on est amené à calculer des contraintes, d'où un surcoût de calcul [78]. D'autre part, des difficultés numériques peuvent apparaître lorsque l'on désire faire du remaillage local (respect de critères de taille par exemple) [62].

Divers types de bases d'ondelettes existent :

- Ondelettes de Meyer [28] ou ondelettes splines [3] à décroissances rapides mais à support non compact ;
- Ondelettes de Daubechies ayant une régularité plus ou moins grande, à support compact plus ou moins grand [11].

Un choix optimal d'une de ces ondelettes s'avère difficile. Plus l'ondelette est régulière (donc convergence rapide des coefficients d'ondelettes), plus son support est large (donc le filtre associé à la fonction d'échelle est plus grand, ce qui entraîne une lenteur des algorithmes de décomposition-recomposition, et une plus grande largeur de bande de la matrice d'élasticité). On est donc amené à faire un compromis entre la rapidité des calculs et la précision de la solution que l'on souhaite obtenir. Remarquons que l'utilisation de l'ondelette de Daubechies d'ordre 3 (la moins régulière que l'on ait utilisé) équivaut à des éléments finis quadratiques ($P2$), tant au niveau de la taille des supports des fonctions analysantes, que du coût en temps de calcul.

Un défaut de ces bases de $L^2(\mathbb{R})$ (ou de $L^2(\mathbb{R}^n)$) est qu'elles ne nous permettent pas de traiter des problèmes sur des bornés de \mathbb{R}^n de formes quelconques avec des conditions

aux limites. Il existe toutefois des bases d'ondelettes de $L^2(\Omega)$ où Ω est un ouvert de forme simple (par exemple de la forme $]a, b[\times]c, d[$ dans le cas de \mathbb{R}^2), telle que l'on puisse prendre en compte les conditions aux limites sur les bords de Ω [1], [20], [31]. De plus, le fait que ces bases ne soient pas construites à partir d'une seule fonction rend leurs maniements plus lourds.

Nous avons montré qu'il était possible de représenter l'opérateur d'élasticité en bases d'ondelettes, la matrice obtenue étant alors creuse et "bande par blocs". A partir de ces résultats, nous allons tout d'abord nous intéresser à l'homogénéisation périodique où les singularités que l'on peut rencontrer (fibres dans une matrice) ont souvent des échelles de tailles très différentes, phénomène qui peut particulièrement bien être étudié par la transformée en ondelettes. Un autre problème incontournable que nous allons traiter est celui de l'élasticité linéarisée avec conditions aux limites (dans le cas de problèmes non linéaires, une technique de résolution consiste souvent à se ramener à une suite de problèmes linéaires). Pour ce faire, puisque la transformée en ondelettes ne nous permet pas de résoudre directement ce type de problèmes, on utilisera des méthodes basées sur la technique des domaines fictifs [70], [83], [73], qui consiste à "plonger" le domaine Ω occupé par le corps dans un ouvert plus grand et de forme simple (un carré par exemple), puis à imposer les conditions sur le bord de Ω par pénalisation ou Lagrangien augmenté.

Partie 2

L'homogénéisation périodique

Introduction

La présence d'hétérogénéités au sein d'une matrice homogène induit des modifications notables sur le comportement de celle-ci. L'utilisation massive de matériaux composites dans l'industrie en est une parfaite illustration. Cette modification peut se manifester tant au niveau de la rigidité de la structure (par exemple un matériau en aluminium peut être renforcé par ajout de fibres de silicium), qu'au niveau thermique.

Différentes approches ont été explorées par plusieurs auteurs afin de déterminer le comportement élastique global du composite [44], [45], [46], [57], [59]. Certains visent simplement à obtenir des bornes des divers coefficients élastiques (module de Young, coefficients de Poisson) de ce type de matériau, d'autres donnent des approximations plus précises.

Les méthodes numériques utilisées pour étudier l'influence d'inclusions de matière sur le comportement global d'une structure sont principalement basées sur deux types de techniques : les éléments finis [50], [54] ou l'analyse spectrale [42], [52], [54]. Ce mémoire vise à proposer une méthode alternative, les ondelettes, en tentant de pallier les défauts des deux précédentes. Toutefois, même si la transformée en ondelettes permet une étude locale, des phénomènes de Gibbs très localisés peuvent persister. De plus, comme nous le verrons par la suite, les temps de calcul obtenus par cette méthode sont légèrement supérieurs.

Une grande partie de ces matériaux peut être considérée comme périodique. De nombreux résultats, autant mathématiques que numériques, ont été donnés dans bon nombre d'articles [40], [50], [51], [52], [55], [58]. L'idée principale consiste à considérer ces composites comme une juxtaposition périodique de cellules identiques (géométriquement et mécaniquement).

Le premier chapitre sera consacré aux rappels concernant deux des méthodes existant pour "homogénéiser" un matériau composite périodique. Bien que les deux méthodes amènent aux mêmes équations posées sur un volume élémentaire représentatif de la structure, nous insisterons sur la méthode des moyennes (ou approche intuitive) qui sera utilisée par la suite. Cette partie s'est largement inspirée de la lecture de la thèse de doctorat d'état de P. Suquet [57], et en est très proche quant à son contenu.

Les phénomènes à étudier lorsque l'on s'intéresse à l'homogénéisation périodique comporte plusieurs échelles de taille (tailles respectives de fibres dans une matrice pouvant aller de 1 à 100 par exemple). La transformée en ondelettes, puisqu'elle est également multiniveau, est bien à même d'analyser ce type de problème. Nous nous sommes donc intéressé, dans un second chapitre, à la mise en oeuvre d'un algorithme de résolution numérique de problèmes d'homogénéisation périodique bidimensionnelle linéarisée à l'aide de la transformée en ondelettes. Nous étudierons comment appliquer la méthode de Galerkin pour calculer la matrice d'élasticité (en utilisant les résultats de la partie 1), le second membre pour calculer les coefficients du tenseur de rigidité du matériau homogène équivalent. Le problème posé sur la cellule de base n'étant pas inversible, nous proposerons certaines méthodes pour obtenir une solution unique [38], [39], [49]. Nous examinerons enfin les résultats de la méthode développée en les comparant notamment avec ceux provenant d'un code d'éléments finis (MicMac, [54]) sur des exemples simples (bicouche ou fibre-matrice élémentaire), ce qui permettra d'optimiser le choix des différents paramètres pour traiter des problèmes plus complexes où différentes échelles entrent en jeu (exemples fibres-matrice).

Chapitre 1

Principe de l'homogénéisation périodique

1.1 Position du problème

Le principe de l'homogénéisation consiste à substituer à un matériau hétérogène un matériau homogène qui aurait, pour une gamme usuelle de chargement, un comportement que l'on souhaite équivalent. Cette démarche est utilisée pour deux grands types de problèmes :

1- Lorsque l'on veut étudier le comportement global d'une structure fortement hétérogène (de type matériau composite par exemple), le coût de calcul, si l'on prend en compte toutes les complexités de la structure, peut être démesuré face à la précision que l'on souhaite obtenir. Il est alors nécessaire de travailler sur une structure plus simple, mais globalement équivalente.

2- Certains matériaux sont usuellement considérés comme homogènes : c'est le cas du bois par exemple. Mais il est clair qu'à une échelle plus fine, ces milieux sont hétérogènes. L'étude, à l'aide d'un procédé d'homogénéisation, de l'influence de ces hétérogénéités microscopiques sur le comportement macroscopique peut expliquer certains phénomènes.

La difficulté de l'homogénéisation consiste alors à élaborer un procédé plus ou moins systématique permettant de construire, à partir d'un matériau hétérogène donné, ce matériau homogène qui aurait ce comportement que l'on souhaite équivalent.

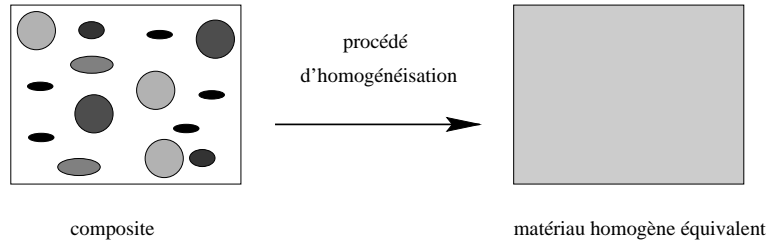


Figure 1.1 : Principe de l'homogénéisation

1.1.1 Milieu homogène équivalent (m.h.é.)

Introduction

On considère un matériau hétérogène constitué d'une matrice ayant un comportement connu, dans laquelle il existe de nombreuses inclusions de matériaux (aussi appelées fibres) ayant des comportements différents (également connus) de celui de la matrice. Le principe de l'homogénéisation consiste donc à élaborer, à partir de ce matériau dont l'étude s'avèrerait trop coûteuse, la loi de comportement d'une structure plus simple ayant globalement les mêmes propriétés mécaniques.

A la taille moyenne de ces hétérogénéités, on associe un paramètre ε nécessairement petit. Dans le composite, il règne un état de contraintes et de déformation que l'on note σ^ε et e^ε (ou tout autre champ de variables d'état). Quant au milieu homogène recherché, on suppose qu'il y règne les champs σ^0 et e^0 qu'il convient de définir.

Le paramètre ε étant petit, il est naturel de chercher σ^0 et e^0 tel que :

$$\sigma^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma^\varepsilon \quad ; \quad e^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^\varepsilon , \quad (1.1)$$

et de même pour les autres variables d'état.

La loi de comportement du matériau homogène sera alors la loi liant ces variables d'état limites.

Il existe plusieurs types de méthodes pour résoudre ce problème. Nous allons nous intéresser plus particulièrement à deux d'entre elles, par ordre croissant de difficulté mathématique, il s'agit de :

- la méthode des moyennes (ou approche intuitive) [53], [57] ;
- le développement asymptotique [40], [55], [56].

L'objectif de ce mémoire n'étant pas une étude de l'homogénéisation mais plutôt l'apport de la technique des ondelettes dans ce domaine, nous utiliserons ici ces méthodes qui sont les plus simples à mettre en oeuvre.

Le problème ramené au volume élémentaire représentatif (v.e.r.)

Le problème sur l'ensemble du matériau (qui occupe une région de \mathbb{R}^2 notée Ω) est bien évidemment trop lourd pour pouvoir être résolu numériquement : le nombre de degrés de liberté nécessaire serait trop considérable. On est donc amené à traiter ce problème sur un sous-domaine de Ω . Le principe est le suivant :

A un point x de Ω , on associe un sous-domaine $Y(x)$ de Ω , appelé **volume élémentaire représentatif (v.e.r.)** sensé être représentatif des caractéristiques du matériau autour de ce point.

Comme nous l'avons vu précédemment, la taille moyenne d'une hétérogénéité (donc du sous-domaine $Y(x)$) est de l'ordre de ε . On fait subir à ce petit domaine un grossissement de $\frac{1}{\varepsilon}$ et la taille moyenne d'une hétérogénéité devient alors de l'ordre de 1. Pour repérer un point à cette échelle microscopique, on attache à $Y(x)$ des coordonnées locales $y = (y_1, y_2)$.

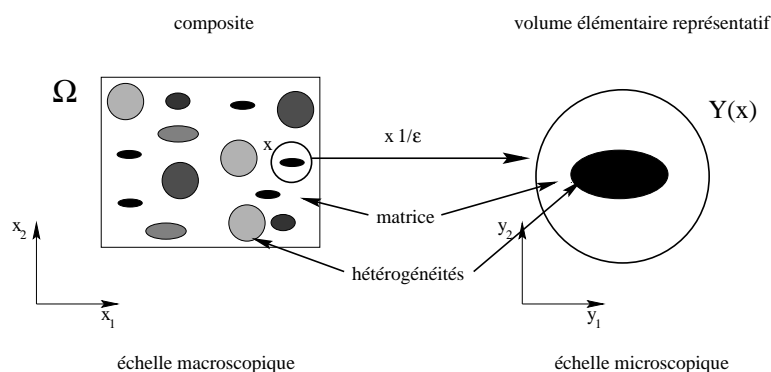


Figure 1.2 : Le volume élémentaire représentatif

Remarque :

Dans la pratique, le choix du v.e.r. $Y(x)$ s'avère difficile à réaliser : il doit être à la fois suffisamment grand pour être bien représentatif des phénomènes existant autour de x , mais aussi suffisamment petit pour que la résolution du problème ne soit numériquement pas trop coûteuse.

Le problème de la validité du résultat en fonction du choix du v.e.r. sera hors de notre propos.

1.1.2 Cas d'un matériau périodique

On se place ici dans le cas où le milieu hétérogène est constitué d'une répétition périodique d'une seule cellule qui sera appelée **cellule de base**.

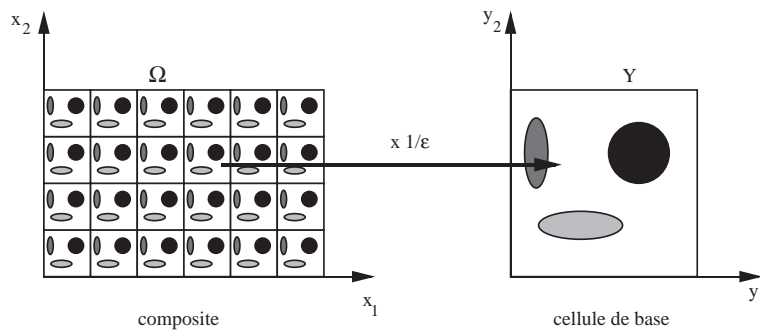


Figure 1.3 : La cellule de base

Dans ce cas, le v.e.r. Y sera tout naturellement la cellule de base et ne dépendra plus du point x comme dans le cas général.

Au niveau microscopique (grossissement $\frac{1}{\epsilon}$) et dans chaque cellule, on considèrera que les champs de contraintes et de déformation seront une variation Y -périodique autour d'une valeur constante, cette valeur pouvant par contre varier d'une cellule à l'autre. En d'autres termes, au niveau de chaque cellule, on négligera la dépendance en x pour ne conserver que celle en y . En particulier, la déformation associée à un champ de déplacement $u(x, y)$ s'écrira $e_y(x, y)$ où " e_y " signifie que l'on ne dérive que par rapport à la variable locale y .

Dans le matériau composite entier considéré au niveau macroscopique, tous les champs seront des variations ϵY -périodiques autour d'un champ "macroscopique" dépendant de x ,

la variable y attachée à la cellule de base deviendra par homothétie la variable $y = \frac{x}{\varepsilon}$, et les tenseur de déformation et de contraintes s'écriront :

$$\sigma(x, y) = \sigma^\varepsilon(x) = \sigma\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad ; \quad e(x, y) = e^\varepsilon(x) = e\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) . \quad (1.2)$$

Remarque :

On pourrait aussi considérer un matériau tel que le v.e.r. ne dépende que très lentement de la variable x , c'est à dire que deux cellules voisines aient des propriétés mécaniques très proches. On parlera alors de milieux quasi-périodiques. L'étude de ces milieux se fera comme celle des milieux périodiques. Cette approximation s'avère être raisonnable et d'autant meilleure que la dépendance en x est faible.

1.1.3 Les fonctions rapidement oscillantes

Sur le matériau composite, les champs des variables d'état, qui dépendent de toutes les variations des caractéristiques du milieu, sont des fonctions rapidement oscillantes (dans le cas d'un matériau périodique, nous avons vu que ce sont des fonctions εY -périodiques). Il est donc naturel, dans une première approche, de prendre pour champs sur le matériau homogène équivalent la moyenne de ceux de la structure réelle.

On définit la valeur moyenne de la façon suivante :

Soit $x \in \Omega$ un point du composite, et $Y(x)$ le v.e.r. autour de ce point, soit f une variable d'état du matériau composite, f dépend de x (variations globales) et de y (variations locales). On pose :

$$f^0(x) = \frac{1}{|Y(x)|} \int_{Y(x)} f(x, y) dy \equiv \langle f(x, y) \rangle_{Y(x)} \quad ; \quad |Y(x)| = \int_{Y(x)} dy . \quad (1.3)$$

Dans le cas périodique, où $y = \frac{x}{\varepsilon}$, $Y(x)$ est indépendant de x et $f^\varepsilon(x) = f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$, alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f^\varepsilon = f^0 = \frac{1}{|Y|} \int_Y f(x, y) dy = \langle f(x, y) \rangle_Y . \quad (1.4)$$

Sous certaines hypothèses sur la régularité de f , cette convergence est une convergence faible dans $L^\infty(\Omega)$ [56].

Illustration :

On prend pour exemple: $f(x, y) = g(x) + \sin(y)$, $Y =]0, 2\pi[$ alors :

$$f^\varepsilon(x) = g(x) + \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f^\varepsilon(x) = \langle f(x, y) \rangle_{]0, 2\pi[} = g(x) .$$

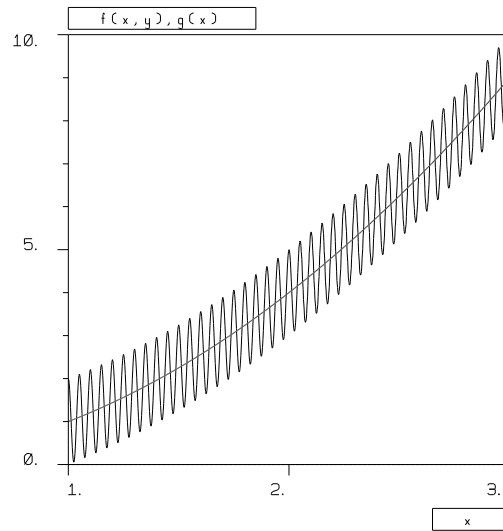


Figure 1.4 : Illustration de la méthode des moyennes

1.2 Méthode des moyennes

Comme nous l'avons vu précédemment, les grandeurs macroscopiques qui se dégagent naturellement de leurs homologues microscopiques sont les valeurs moyennes de celles-ci (d'où le nom de la méthode). L'objectif de ce paragraphe est d'étudier, lorsqu'on applique cette méthode, comment la loi de comportement liant les variables d'état sur le matériau composite "passe à la limite" sur le matériau homogène équivalent.

1.2.1 Présentation de la méthode

Supposons que dans le milieu hétérogène (que l'on va considérer dorénavant comme périodique) règne un état de contraintes $\sigma(x, y)$ et de déformations $\epsilon(x, y)$ (dépendant à la fois de la variable globale x ($\in \Omega$) et de la variable locale y ($\in Y$)). Le principe de la méthode des moyennes est alors de supposer que dans le matériau homogène équivalent (m.h.é.) régne les états :

$$\sigma^0(x) = \langle \sigma(x, y) \rangle_Y \quad ; \quad \epsilon(u^0(x)) = \langle \epsilon(u(x, y)) \rangle_Y . \quad (1.5)$$

Ensuite, à l'aide de la loi de comportement du matériau composite :

$$\sigma(x, y) = \mathbb{K}(x, y) \epsilon(u(x, y)) \quad (\text{approche déformation}), \quad (1.6)$$

ou :

$$\epsilon(u(x, y)) = \mathbb{S}(x, y) \sigma(x, y) \quad (\text{approche contrainte}), \quad (1.7)$$

où \mathbb{K} (resp. \mathbb{S}) est un tenseur d'ordre 4 appelé tenseur de rigidité (resp. souplesse), on détermine la loi de comportement du m.h.é. par la recherche de la loi (linéaire) liant le champ des contraintes et des déformations :

$$\sigma^0(x) = \mathbb{K}^{eff}(x) \epsilon(u^0(x)) \quad (\text{approche déformation}), \quad (1.8)$$

ou :

$$\epsilon(u^0(x)) = \mathbb{S}^{eff}(x) \sigma^0(x) \quad (\text{approche contrainte}). \quad (1.9)$$

Au vue des propriétés des lois d'état qui décrivent le matériau composite (Y -périodicité de $\sigma(x, \cdot)$ et de $\epsilon(x, \cdot)$ pour tout x , non prise en compte de la dépendance en x au niveau de la cellule de base Y), il devient naturel d'introduire l'espace :

$$S_{per}(Y) = \left\{ \tau = (\tau_{ij}) ; \tau_{ij} = \tau_{ji} ; \tau_{ij} \in L^2(Y) ; \tau_{i,j} \in L^2(Y) ; \right. \\ \left. \text{traces de } \tau_{ij} n_j \text{ opposées sur les faces opposées de } Y \right\} \quad (1.10)$$

où n représente la normale extérieure au domaine Y .

Les champs de déplacement à Déformation Périodique sont des combinaisons linéaires de champs linéaires et de champs périodiques :

$$DP(Y) = \left\{ u \quad : \quad u = E.y + v(y) \quad ; \quad v \in \left(H_p^1(Y) \right)^2 \right\} \quad (1.11)$$

(E est un tenseur d'ordre 2 symétrique, constant, homogène à une déformation).

Remarques :

- Lorsque v est un champ périodique sur Y , il vérifie :

$$\langle e_y(v) \rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} \frac{1}{2} (v_i n_j + v_j n_i) = 0 \quad (1.12)$$

(car v est Y -périodique, n anti-périodique).

Par conséquent, si $u \in DP(Y)$, alors :

$$\langle e_y(u) \rangle_Y = \langle E \rangle_Y + \langle e_y(v) \rangle_Y = E. \quad (1.13)$$

On peut donc donner une autre définition de $DP(Y)$:

$$u \in DP(Y) \iff u - \langle e_y(u) \rangle_Y y \text{ est un champ périodique } \left(\in \left(H_p^1(Y) \right)^2 \right). \quad (1.14)$$

- Comme il l'a été écrit précédemment, on a considéré que les champs de déformation et de contraintes ne dépendent pas de x au niveau de la cellule de base Y . Cela se retrouve ici lorsque l'on définit $DP(Y)$ à l'aide d'un tenseur E ne dépendant pas de x (on pourrait le noter E^x pour rappeler que ce tenseur est constant dans chaque cellule, mais peut varier d'une cellule à l'autre).

1.2.2 Loi de comportement du matériau homogène équivalent

A partir des considérations précédentes, il reste maintenant à construire :

- soit le tenseur de rigidité \mathbb{K}^{eff} du m.h.é. à partir de son homologue \mathbb{K} du composite (approche déformation);

– soit le tenseur de souplesse \mathbb{S}^{eff} à partir de son homologue \mathbb{S} du composite (approche contrainte).

a – Approche déformation

On recherche donc la relation existant entre $\sigma^0(x)$ et $\epsilon(u^0(x))$ à partir de celle liant $\sigma(x, y)$ et $\epsilon(u(x, y))$. On a :

$$\sigma^0(x) = \langle \sigma(x, y) \rangle_Y = \langle \mathbb{K}(x, y) \epsilon(u(x, y)) \rangle_Y . \quad (1.15)$$

L'opérateur de moyenne " $\langle \cdot \rangle_Y$ " ainsi que celui de dérivation " ϵ " étant linéaire, la fonction liant $\epsilon(u(x, y))$ à $\epsilon(u^0(x))$ est aussi linéaire. Supposons que l'on sache écrire :

$$\epsilon(u(x, y)) = c(x, y) \epsilon(u^0(x)) , \quad (1.16)$$

où c est un tenseur d'ordre 4, alors :

$$\sigma^0(x) = \langle \mathbb{K}(x, y) c(x, y) \rangle_Y \epsilon(u^0(x)) = \mathbb{K}^{eff}(x) \epsilon(u^0(x)) , \quad (1.17)$$

et le tenseur de rigidité du matériau homogène équivalent devient la moyenne du tenseur de rigidité du composite pondérée par un tenseur d'ordre 4, appelé **tenseur de localisation des déformations**.

Ce tenseur c détermine la déformation locale du matériau connaissant la déformation du matériau homogène équivalent. Cette relation n'est évidemment pas unique, et le tenseur de rigidité du m.h.é. dépend donc de la manière dont on est capable de récupérer les phénomènes microscopiques au travers de c à partir d'un phénomène macroscopique donné.

La méthode la plus simpliste consiste à écrire :

$$\epsilon(u(x, y)) = \epsilon(u^0(x)) \quad (1.18)$$

Cette méthode, appelée **méthode de Voigt**, consistant à prendre pour c l'identité, néglige totalement les hétérogénéités lors de ce passage microscopique-macroscopique. Elle donne par conséquent d'assez mauvais résultats.

Une autre façon de déterminer c est la suivante :

A un champ $\epsilon(u^0)$ donné sur le m.h.é., on cherche un champ de déplacement cinématiquement admissible sur le composite tel que $\langle e_y(u) \rangle_Y = \epsilon(u^0)$ (pour simplifier les notations, on n'écrira pas ici la dépendance en x à l'intérieur de la cellule de base). Pour cela, on résoud sur Y le problème :

Problème 1 Soit $\epsilon(u^0)$ donné, trouver $u \in DP(Y)$ et $\sigma \in S_{per}(Y)$ tels que :

$$(P1) \quad \begin{cases} \sigma(y) = \mathbb{K}(y) e_y(u) ; \\ \operatorname{div}_y(\sigma) = 0 ; \\ \langle e_y(u) \rangle_Y = \epsilon(u^0). \end{cases} \quad (1.19)$$

Ce problème est bien posé, il admet une solution (σ, u) unique pour σ, u étant défini à un vecteur constant près (nous étudierons ultérieurement comment fixer ce vecteur constant). Ce problème est linéaire, c'est à dire que la relation liant $\epsilon(u^0(x))$ et le déplacement $u(x, y)$ est linéaire. On peut donc écrire en composante :

$$u_i(y) = v_i^{k\ell}(y) e_{k\ell}(u^0) \quad (i, k, \ell = 1, 2) \quad (1.20)$$

où $v_i^{k\ell}$ est la i -ème composante du vecteur de déplacement $v_i^{k\ell}$ solution du problème (P1) pour un état de déformation macroscopique $\epsilon(u^0)$ donné par :

$$e_{ij}(u^0) = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{j\ell} + \delta_{i\ell} \delta_{jk}) \quad (1.21)$$

($e_{ij}(u^0)$ est en fait remplacé par des déformations simples : traction simple dans la direction 1 ou 2, cisaillement simple dans la direction 1-2).

On peut alors écrire :

$$e_{ijy}(u(y)) = e_{ijy}(v^{k\ell}(y)) e_{k\ell}(u^0) \quad (1.22)$$

et par suite :

$$c_{ijk\ell}(y) = e_{ijy}(v^{k\ell}(y)) . \quad (1.23)$$

Récapitulation :

La détermination du tenseur de rigidité homogénéisé \mathbb{K}^{eff} se ramène au calcul du tenseur de localisation des déformations $c(y)$, lui-même étant construit par résolutions du problème (P1) où la déformation macroscopique $\epsilon(u^0)$ est remplacée par des déformations élémentaires de type compression simple et cisaillement simple dans chaque direction.

Remarque :

On peut écrire le problème (P1) à l'aide de déplacements périodiques (et non plus à déformations périodiques) en écrivant le problème variationnel associé à (P1) :

Problème 2 Soit E un tenseur constant d'ordre 2 donné, trouver $u \in (H_p^1(Y))^2$ tel que :

$$(PV2) \begin{cases} \int_Y \mathbb{K}(y) e_y(u(y)) : e_y(v(y)) dy = - \int_Y \mathbb{K}(y) E : e_y(v(y)) dy \\ \text{pour tout } v \text{ } Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (1.24)$$

Remarque :

La condition $\langle e_y(u) \rangle_Y = 0$ est inutile puisque dire que u est Y -périodique entraîne automatiquement cette condition.

La composante c_{ijkl} du tenseur de localisation est alors :

$$c_{ijkl} = e_{ijy}(v^{kl}(y)) + E_{ij}^{kl} \quad (1.25)$$

où $E_{ij}^{kl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$.

De plus, si on note v^{kl} la solution du problème (PV2) associée à E^{kl} , alors le tenseur de rigidité du matériau homogène équivalent s'écrit :

$$\mathbb{K}_{ijkl}^{eff} = \left\langle \mathbb{K}_{ijpq}(x, y) e_{pq}(v_{kl}) + \mathbb{K}_{ijpq}(x, y) E_{pq}^{kl} \right\rangle_Y \quad (1.26)$$

(somme sur les indices p et q).

Validité de la méthode :

Cette méthode est exacte pour des matériaux périodiques au sens suivant :

Si $\sigma^\varepsilon(x)$ et $u^\varepsilon(x)$ sont les champs de contraintes et de déplacements qui régissent dans le matériau hétérogène à l'équilibre, soumis à une densité de force f ainsi qu'à certaines conditions aux limites, alors, lorsque ε converge vers 0, σ^ε et u^ε converge faiblement vers des éléments σ^0 et u^0 satisfaisant [57] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^0 = \mathbb{K}^{\varepsilon ff} e_y(u^0) \quad \text{dans } \Omega ; \\ \operatorname{div}_x \sigma^0 + f = 0 \quad \text{dans } \Omega ; \\ \quad \quad \quad + \text{Conditions aux limites.} \end{array} \right. \quad (1.27)$$

b – Approche contraintes

L'approche en contraintes est la duale de la précédente. On écrit tout d'abord la relation (duale de la précédente) liant la contrainte $\sigma(x, y)$ à la déformation $e(x, y)$ à l'aide du tenseur de souplesse :

$$e(u(x, y)) = \mathbb{S}(x, y) \sigma(x, y) , \quad (1.28)$$

et on considère les champs de contraintes et de déformation sur le m.h.é. :

$$e(u^0(x)) = \langle e_y(u(x, y)) \rangle_Y \quad ; \quad \sigma^0(x) = \langle \sigma(x, y) \rangle_Y . \quad (1.29)$$

Par suite, il vient :

$$e(u^0(x)) = \langle \mathbb{S}(x, y) e(u(x, y)) \rangle_Y , \quad (1.30)$$

et si l'on est capable d'écrire la relation linéaire liant la contrainte locale $\sigma(x, y)$ à partir de son homologue globale $\sigma^0(x)$ à l'aide d'un tenseur d'ordre 4, noté C , c'est à dire :

$$\sigma(x, y) = C(x, y) \sigma^0(x) \quad (1.31)$$

alors :

$$e(u^0(x)) = \langle \mathbb{S}(x, y) C(x, y) \rangle_Y \sigma^0(x) \quad (1.32)$$

et le tenseur de souplesse du m.h.é., noté $\mathbb{S}^{\varepsilon ff}$ s'écrit :

$$\mathbb{S}^{\varepsilon ff}(x) = \langle \mathbb{S}(x, y) C(x, y) \rangle_Y . \quad (1.33)$$

Ce tenseur d'ordre 4 est donc la moyenne du tenseur de souplesse du composite pondérée par un tenseur C appelé **tenseur de localisation des contraintes**, et décrit comment, à partir d'une contrainte macroscopique donnée sur le m.h.é., on obtient la contrainte locale sur le composite.

Pour déterminer ce tenseur, la méthode la plus simple, consistant à écrire :

$$\mathbb{S}^{eff}(x) = \langle \mathbb{S}(x, y) \rangle_Y \quad (1.34)$$

est appelée **méthode de Reuss** et néglige totalement les phénomènes locaux sur le composite lors de ce passage macroscopique–microscopique et donne par conséquent d'assez mauvais résultats.

Comme précédemment, une autre méthode de calcul de C et de se ramener à la résolution du problème suivant sur la cellule de base Y (pour simplifier les notations, on néglige la dépendance en x) :

Problème 3 Soit σ^0 un tenseur d'ordre 2 donné, trouver $u \in DP(Y)$ et $\sigma \in S_{per}(Y)$ tels que :

$$(P'3) \quad \begin{cases} e_y(u) = \mathbb{S}(y) \sigma(y) ; \\ div_y(\sigma) = 0 ; \\ \langle \sigma_y(u) \rangle_Y = \sigma^0 . \end{cases} \quad (1.35)$$

Ce problème est bien posé, il admet une solution (σ, u) unique pour σ, u étant défini à un vecteur constant près.

1.3 Développements asymptotiques

1.3.1 Présentation de la méthode

Cette méthode, développée tout d'abord par E. Sanchez-Palencia [40], [55], [56], s'appuie sur la remarque suivante :

Comme il l'a été écrit dans l'introduction de ce chapitre, le problème d'homogénéisation possède un petit paramètre naturel ε associé à la taille moyenne des hétérogénéités. L'idée

générale de la méthode des développements asymptotiques est d'écrire les variables d'état du composite sous forme de développements limités en puissances de ε .

Par exemple, pour le cas de la contrainte (notée σ^ε) et du déplacement (noté u^ε), on écrit :

$$\sigma^\varepsilon = \sigma_0(x, y) + \varepsilon \sigma_1(x, y) + \dots + \varepsilon^i \sigma_i(x, y) + \dots \quad (1.36)$$

$$u^\varepsilon = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \dots + \varepsilon^i u_i(x, y) + \dots \quad (1.37)$$

(où $y = \frac{x}{\varepsilon}$).

Les fonctions $\sigma_i(x, \cdot)$ et $u_i(x, \cdot)$ sont Y -périodiques par rapport à la variable y (la dépendance en x décrit toujours les variations globales de ces fonctions, tandis que celle en y décrit les variations locales). La loi de comportement homogénéisée ne portera donc que sur les premiers termes dans les développements limités, ici σ_0 et u_0 .

Afin d'écrire les développements limités des diverses fonctions, on rappelle que la règle de dérivation est ici la suivante :

$$\text{Si } f^\varepsilon(x) = f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ alors } \frac{df^\varepsilon}{dx_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial y_i}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (i = 1, 2) \quad (1.38)$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x \sigma^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_y \sigma_0 + (\operatorname{div}_x \sigma_0 + \operatorname{div}_y \sigma_1) + \varepsilon (\operatorname{div}_x \sigma_1 + \operatorname{div}_y \sigma_2) + \dots \\ &+ \varepsilon^i (\operatorname{div}_x \sigma_i + \operatorname{div}_y \sigma_{i+1}) + \dots \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} e_x(u^\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} e_y(u_0) + (e_x(u_0) + e_y(u_1)) + \varepsilon (e_x(u_1) + e_y(u_2)) + \dots \\ &+ \varepsilon^i (e_x(u_i) + e_y(u_{i+1})) + \dots \end{aligned} \quad (1.40)$$

et on porte ces développements limités dans la loi de comportement afin d'identifier les termes du même ordre. L'identification des termes d'ordre 0 donne la loi de comportement homogénéisée tandis que l'identification des termes d'ordre supérieur permet d'obtenir une meilleure approximation de la loi de comportement du composite.

1.3.2 Loi de comportement du matériau homogène équivalent

Le matériau composite périodique, soumis à une densité de force f vérifie à l'équilibre les équations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma^\varepsilon = \mathbb{K}^\varepsilon e_x(u^\varepsilon) & \text{dans } \Omega ; \\ \operatorname{div}_x \sigma^\varepsilon + f = 0 & \text{dans } \Omega ; \\ u^\varepsilon \in DP(Y) & \sigma^\varepsilon \in S_{per}(Y) . \end{array} \right. \quad (1.41)$$

Par identification, on obtient:

$$\begin{array}{ll} \text{ordre } \varepsilon^{-1} : & e_y(u_0) = 0 \implies u_0(x, y) = u_0(x) \\ & \operatorname{div}_y(\sigma_0) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ordre } \varepsilon^0 : & \sigma_0(x, y) = \mathbb{K}(x, y)(e_x(u_0)) + e_y(u_1) \quad (y = \frac{x}{\varepsilon}) \\ & \operatorname{div}_x \sigma_0 + \operatorname{div}_y \sigma_1 + f = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ordre } \varepsilon^1 : & \sigma_1(x, y) = \mathbb{K}(x, y)(e_x(u_1) + e_y(u_2)) \\ & \operatorname{div}_x \sigma_1 + \operatorname{div}_y \sigma_2 = 0 \end{array}$$

etc ...

Ensuite, on utilise les résultats du paragraphe sur les fonctions rapidement oscillantes afin d'écrire :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma(x, \frac{x}{\varepsilon}) = \langle \sigma_0(x, y) \rangle_Y = \sigma^0(x) , \quad (1.42)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e(u^\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e(u(x, \frac{x}{\varepsilon})) = \langle e(u_0(x, y)) \rangle_Y = e(u^0(x)) . \quad (1.43)$$

On pose $v = u_1 + e_x(u^0)y$ (ce qui entraîne que v est à déformation périodique), alors la loi de comportement sur le m.h.é. (qui est en fait la recherche du tenseur de rigidité ou de souplesse homogénéisé) provient de l'identification des termes à l'ordre -1 et 0 . En particulier, le calcul du tenseur de rigidité $\mathbb{K}^{\varepsilon ff}$ se ramène à la résolution du problème suivant sur la cellule de base Y (approche déformation) :

Problème 4 Soit $e(u^0)$ donné, trouver $v \in DP(Y)$ et $\sigma \in S_{per}(Y)$ tels que :

$$(P4) \quad \begin{cases} \sigma(y) = \mathbb{K}(y) e_y(v) ; \\ \operatorname{div}_y(\sigma) = 0 ; \\ \langle e_y(v) \rangle_Y = \epsilon(u^0) . \end{cases} \quad (1.44)$$

Dans le cas de l'homogénéisation périodique de matériaux élastique, le problème à résoudre est donc rigoureusement le même que par la méthode des moyennes. Il en est de même pour l'approche en contraintes.

L'identification des termes à l'ordre supérieur permet, par récurrence, d'obtenir des améliorations sur la connaissance des champs réels régnant dans le milieu homogène équivalent.

1.4 Conclusion

Un problème d'homogénéisation a pu être écrit en élasticité à l'aide de deux approches distinctes, mais conduisant aux mêmes équations. D'autres méthodes, dont celle consistant à considérer l'énergie du système [57], aurait aussi pu nous amener à celles-ci. Les équations aux dérivées partielles mises en jeu ont une forme classique en élasticité linéarisée, et nous nous proposons de les résoudre à l'aide de la transformée en ondelettes en utilisant les résultats de la partie 1.

Chapitre 2

Méthode de Galerkin–Ondelettes pour l’homogénéisation périodique

2.1 Introduction

Dans le comportement d’un matériau hétérogène, différentes échelles peuvent entrer en jeu. Lors de son étude, il est donc nécessaire d’élaborer des techniques adaptées à cette propriété qui ne soient pas trop coûteuses. La transformée en ondelettes semble alors intéressante puisqu’elle permet de considérer différentes échelles, et ceci de façon locale (contrairement à l’analyse de Fourier par exemple).

La transformée en ondelettes permet de plus de faire une analyse du matériau (par des techniques de traitement de l’image) indépendamment du problème de l’homogénéisation à proprement parler, et d’utiliser ces résultats pour la recherche du matériau homogène équivalent (recherche des zones qui nécessiteront une analyse plus fine, calcul des différents opérateurs).

Dans ce chapitre, nous considérerons un matériau hétérogène bidimensionnel, qui sera constitué de plusieurs matériaux homogènes élastiques dont les lois de comportement seront connus. Comme nous l’avons vu dans le chapitre précédent, la recherche de la loi de comportement d’un matériau homogène équivalent nécessite la résolution du problème variationnel linéaire :

Problème 5 *Soit E un tenseur constant d’ordre 2 donné, trouver $u \in (H_p^1(Y))^2$ tel que :*

$$(PV) \begin{cases} \int_Y \mathbb{K}(y) \varepsilon(u(y)) : \varepsilon(v(y)) dy = - \int_Y \mathbb{K}(y) E : \varepsilon(v(y)) dy \\ \text{pour tout } v \text{ dans } \left(H_p^1(Y)\right)^2 . \end{cases} \quad (2.1)$$

Ce problème admet une solution u définie à un vecteur constant près. Afin d’obtenir une solution approchée de ce problème, nous allons discrétiser les différents opérateurs linéaires qui entrent en jeu, ceci à l’aide d’une base d’ondelettes et d’une méthode de Galerkin, et nous présenterons une technique pour en sélectionner une solution particulière. Ensuite, nous montrerons comment, à partir du champ de déplacement solution du problème discrétisé, on peut approximer les composantes du tenseur de rigidité du matériau homogène équivalent. Enfin, nous présenterons et commenterons les résultats obtenus.

2.2 La discrétisation

2.2.1 La matrice d’élasticité

La discrétisation de l’opérateur d’élasticité (premier membre de l’équation (2.1)) se fait selon la méthode décrite dans la première partie. Elle consiste à calculer deux lignes de la matrice d’élasticité \mathcal{K} à l’intérieur de chaque matériau à l’aide des intégrales entre produits de deux ondelettes (*voir Partie 1, § 2.2.4.a*), ainsi que tous les coefficients $\mathcal{K}_{\underline{i}\underline{\ell}}$ tels que l’intersection des supports des ondelettes $\Psi_{\underline{i}}^{j_1}$ et $\Psi_{\underline{\ell}}^{j_2}$ rencontre l’interface entre les matériaux à l’aide des produits scalaires entre les dérivées de trois ondelettes, où la première est celle qui provient de la discrétisation des composantes de la matrice de rigidité. Dans le cas où les différentes composantes homogènes du composite ont une géométrie simple, la discrétisation de la matrice de rigidité \mathbb{K} est réalisée grâce à la fonction d’échelle de Haar (*voir Partie 1, § 2.2.4.b*).

La matrice \mathcal{K} a alors une structure par bandes (pour plus de précisions, voir Partie 1, Figure 2.2).

Dans le cas (qui ne sera pas étudié ici) où le matériau a une structure complexe, on peut obtenir les coefficients d’ondelettes des différentes composantes de la matrice \mathbb{K} par des techniques de traitement de l’image, puis calculer la matrice d’élasticité \mathcal{K} à l’aide de ces coefficients d’ondelettes par la méthode exposé au chapitre précédent (*Partie 1, § 2.2.4.b*).

2.2.2 Choix d'une solution particulière

Le problème variationnel (2.1) que nous devons résoudre admet une solution unique à un vecteur constant près. On est donc amené à ajouter une condition supplémentaire pour fixer ce vecteur. Son choix est peu important puisque le calcul des coefficients macroscopiques ne nécessite que la connaissance de la déformation liée au déplacement u . Cette condition doit être choisie uniquement pour sa commodité de mise en oeuvre. Lorsque l'on utilise la technique des éléments finis, la condition la plus généralement utilisée est de fixer le déplacement des quatre noeuds aux coins du carré (théorie des modules effectifs) par une méthode de pénalisation. Cette méthode n'est pas commode à mettre en oeuvre avec la transformée en ondelettes. On a alors préféré imposer la condition :

$$\int_Y u(y) dy = 0 \quad (2.2)$$

à l'aide d'une technique due à H. Attouch [38] et appelée **méthode de viscosité** (même si ce terme est impropre ici). Nous verrons que cette technique est particulièrement simple à mettre en oeuvre dans notre cas.

a – Résultats asymptotiques

L'idée du théorème suivant, dû à H. Attouch [38], consiste à écrire le problème variationnel (PV) sous forme de minimisation d'une fonctionnelle, puis de le remplacer par une suite de problèmes de minimisation ayant chacun une solution unique, la suite de ces solutions convergeant vers une solution particulière du problème initial (principe de sélection).

Théorème 9 Soit $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction, et soit :

$$(P) \quad \min\{ f(x) : x \in X \} \quad (2.3)$$

un problème de minimisation associé. Supposons que $\inf_X f$ soit un réel fini.

Soit $g: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction réelle strictement positive. Pour tout $\varepsilon > 0$, considérons le problème de minimisation approché :

$$(P_\varepsilon) \quad \min\{ f(x) + \varepsilon g(x) : x \in X \} . \quad (2.4)$$

Supposons qu’il existe une topologie sur X telle que les propriétés suivantes soient vérifiées :

(i) $\forall \varepsilon > 0$, il existe une solution u_ε de (P_ε) et la suite $\min\{u_\varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0\}$ est relativement compacte ;

(ii) f et g sont semi-continues inférieurement.

Alors la limite simple u de la suite $\{u_\varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0\}$ minimise la fonction f sur X et satisfait au principe de sélection par la viscosité :

$$\begin{cases} g(u) \leq g(v) & \forall v \in \operatorname{argmin} f, \\ u \in \operatorname{argmin} f. \end{cases} \quad (2.5)$$

b – Application au problème de l’homogénéisation périodique

Nous allons maintenant utiliser le résultat précédent afin d’imposer la condition aux limites (2.2).

Considérons tout d’abord le problème de minimisation :

$$(P) \quad \min \left\{ \frac{1}{2} \int_Y \sigma(v) : \varepsilon(v) dy : v \in (H_p^1(Y))^2 \right\} \quad (2.6)$$

et le problème approché :

$$(P_\varepsilon) \quad \min \left\{ \frac{1}{2} \int_Y \sigma(v) : \varepsilon(v) dy + \frac{\varepsilon}{2} \|v\|_{L^2(Y)}^2 : v \in (H_p^1(Y))^2 \right\}. \quad (2.7)$$

On a alors le résultat suivant :

Corollaire 3 Toute limite simple u de la suite $\{u_\varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0\}$ minimise la fonction :

$$\frac{1}{2} \int_Y \sigma(v) : \varepsilon(v) dy$$

sur $(H_p^1(Y))^2$ et satisfait au principe de sélection par la viscosité :

$$\begin{cases} \|u\|_{L^2(Y)} \leq \|v\|_{L^2(Y)} & \forall v \in \operatorname{argmin} \frac{1}{2} \int_Y \sigma(v) : \varepsilon(v) dy \\ u \in \operatorname{argmin} \frac{1}{2} \int_Y \sigma(v) : \varepsilon(v) dy. \end{cases} \quad (2.8)$$

Preuve :

Ce résultat est une application élémentaire du théorème 9, avec :
 $X = (H_p^1(Y))^2$, $f(v) = \frac{1}{2} \int_Y \sigma(v) : \epsilon(v) dy$ et $g(v) = \frac{1}{2} \|v\|_{L^2(Y)}^2$.

Un autre résultat important nous donne :

Lemme 1 *La solution que l'on obtient par le principe de sélection par la viscosité vérifie $\int_Y u dy = 0$.*

Preuve

Le principe de sélection nous donne $\|u\|_{L^2(Y)}^2 \leq \|v\|_{L^2(Y)}^2 \quad \forall v \in \text{Argmin } f$.

Donc $\|u\|_{L^2(Y)}^2 \leq \|u + C\|_{L^2(Y)}^2 \quad \forall C \in \mathbb{R}$,

ce qui s'écrit aussi : $C^2|Y| + 2C \int_Y u dy \geq 0 \quad \forall C \in \mathbb{R}$,

donc $\int_Y u dy = 0$.

Remarque :

Cette méthode est particulièrement simple à mettre en oeuvre. En effet, la matrice \mathcal{K} construite à partir du problème initial (2.1) sera remplacée par la matrice \mathcal{K}_ε définie par :

$$\mathcal{K}_\varepsilon = \mathcal{K} + \varepsilon Id \tag{2.9}$$

où Id représente la matrice identité. Il suffit donc de rajouter le terme $+\varepsilon$ sur la diagonale de la matrice \mathcal{K} .

c – Méthodes dynamiques

La technique que nous présentons ici, due à H. Brezis [41], consiste à remplacer le problème variationnel initial par un problème dynamique, dont la solution (dépendant du temps) tend vers la solution du problème initial lorsque t tend vers l'infini.

En d’autres termes, si l’on désire résoudre le problème linéaire obtenu après discrétisation d’un problème aux dérivées partielles elliptique :

Soit A un opérateur et f un vecteur, trouver u vérifiant :

$$Au = f.$$

• Dans le cas où l’opérateur A est inversible, la technique standard consiste à remplacer le problème précédent par le problème dynamique suivant [41] :

Soit B et A deux opérateurs, et f un vecteur, trouver v vérifiant :

$$B(t)\dot{v}(t) + Av(t) = f \quad + \quad \textit{condition initiale}.$$

• Dans le cas où A admet un noyau non nul (ce qui est le cas du problème que l’on a à résoudre), on peut remplacer le système différentiel initial par le problème dynamique :

Soit A un opérateur différentiel, g une fonction et f un vecteur, trouver v vérifiant :

$$\dot{v}(t) + Av(t) + g(t)v(t) = f \quad + \quad \textit{condition initiale}.$$

On peut montrer que sous certaines hypothèses sur g , fonction qui admet une limite nulle à l’infini, $v(t)$ converge vers la solution u de moyenne nulle du système linéaire initial [39], [49]. Dans ce cas, le système différentiel peut être résolu par une méthode explicite de type Runge-Kutta [49].

Cette technique a été expérimentée avec succès en dimension 1, mais n’a pas encore été mise en oeuvre pour traiter le problème de l’homogénéisation. Cette technique permet, par l’introduction de nouveaux paramètres, d’optimiser des algorithmes classiques (Jacobi, Gauss-Seidel, gradient, ...).

2.2.3 Calcul du second membre

a – La discrétisation

La projection, dans une base d'ondelettes, de la fonctionnelle (second membre de l'équation (2.1)) :

$$\ell(v) = - \int_Y \mathbb{K}(y) E : \epsilon(v(y)) dy \quad (2.10)$$

est calculée par une technique analogue à celle employée pour projeter l'opérateur d'élasticité. En utilisant les mêmes notations que pour le calcul de la matrice d'élasticité (partie 1), on obtient la proposition :

Proposition 10 *La projection de la fonctionnelle ℓ dans une base d'ondelettes à un niveau d'approximation j peut être représentée par un vecteur \mathcal{B} de dimension 2^{2j+1} , avec :*

$$[\mathcal{B}_{\underline{i}}] = [\mathbb{B}_{\underline{i}}] \quad (\underline{i} \in \Lambda_j) \quad (2.11)$$

où $\mathbb{B}_{\underline{i}}$ est le “vecteur élémentaire” (de dimension 2) :

$$\mathbb{B}_{\underline{i}} = \begin{bmatrix} L_1^1 + L_3^2 \\ L_2^2 + L_3^1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

avec :

$$L_k^d = L_{k,\underline{i}}^{d,j} = \sum_{n=1}^{n=3} \int_Y \mathbb{K}_{kn}(y) E_n \Psi_{\underline{i},d}^j(y) dy \quad (2.13)$$

et :

$d = 1$ ou 2 : direction de la dérivée
 $k = 1, 2$ ou 3 : numéro de la composante du vecteur $\mathbb{K}E$.

Preuve :

On a tout d’abord :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{K}E : \epsilon(v) &= \left(\sum_{n=1}^{n=3} \mathbb{K}_{1n} E_n \right) v_{1,1} + \left(\sum_{n=1}^{n=3} \mathbb{K}_{2n} E_n \right) v_{2,2} \\
 &\quad + \left(\sum_{n=1}^{n=3} \mathbb{K}_{3n} E_n \right) (v_{1,2} + v_{2,1}) \\
 &= \left(\sum_{n=1}^{n=3} \mathbb{K}_{1n} E_n \right) v_{1,1} + \left(\sum_{n=1}^{n=3} \mathbb{K}_{3n} E_n \right) v_{1,2} \\
 &\quad + \left(\sum_{n=1}^{n=3} \mathbb{K}_{2n} E_n \right) v_{2,2} + \left(\sum_{n=1}^{n=3} \mathbb{K}_{3n} E_n \right) v_{2,1}
 \end{aligned}$$

En écrivant ensuite v comme une élément de la base d’ondelettes dans laquelle on projette ℓ , et en intégrant sur Y l’expression ainsi obtenue, on obtient la preuve de la proposition.

b – Calcul des composantes du second membre

On s’intéresse dans ce paragraphe au calculs des coefficients :

$$L_{k \underline{i}}^{d,j} = \sum_{n=1}^{n=3} \int_Y \mathbb{K}_{kn}(y) E_n \Psi_{\underline{i},d}^j(y) dy .$$

Pour simplifier les notations, appelons T_k la fonction :

$$T_k(y) = \sum_{n=1}^{n=3} \mathbb{K}_{kn}(y) E_n . \tag{2.14}$$

Comme dans le cas du calcul de la matrice d’élasticité, on sépare deux cas, selon si T_k est ou n’est pas constant sur le support de l’ondelette $\Psi_{\underline{i}}^j$.

1 – T_k est constant sur le support de l’ondelette

Dans ce cas, on obtient simplement :

$$\begin{aligned}
L_{k,\underline{i}}^{d,j} &= T_k \int_Y \Psi_{\underline{i},d}^j(y) dy \\
&= T_k \int_0^1 \Psi_{j,i_1}^{n_1}(y_1) dy_1 \int_0^1 \Psi_{j,i_2}^{n_2}(y_2) dy_2
\end{aligned}$$

où soit n_1 (si $d=1$), soit n_2 (si $d=2$) est égal à 1. Donc par périodicité :

$$L_{k,\underline{i}}^{d,j} = 0 . \quad (2.15)$$

2 – T_k n'est pas constant sur le support de l'ondelette

Dans ce cas, on décompose T_k dans une base d'ondelettes. Comme dans le cas du calcul de la matrice d'élasticité, cette base peut-être différente de celle utilisée pour discrétiser ℓ . Dans la pratique, on choisira toujours celle avec laquelle on a approximé le tenseur de rigidité \mathbb{K} .

Appelons Θ la fonction d'échelle de $H_p^1(0,1)$ utilisée pour approcher T_k , et ι le niveau d'approximation choisi (ici encore, on choisira également le même niveau que pour l'approximation de \mathbb{K}). On obtient ainsi :

$$T_k \simeq \sum_{\underline{\ell} \in \Lambda_\iota} T_k^\ell \Theta_{\iota,\ell_1}(x_1) \Theta_{\iota,\ell_2}(x_2) \quad (2.16)$$

et le coefficient $L_{k,\underline{i}}^{d,j}$ est approximé par :

$$L_{k,\underline{i}}^{d,j} \simeq \sum_{\underline{\ell} \in \Lambda_\iota} T_k^\ell \mathcal{D}_{\ell_1,i_1}^{n_1,\iota,j} \mathcal{D}_{\ell_2,i_2}^{n_2,\iota,j} \quad (2.17)$$

avec :

$$\mathcal{D}_{\ell,i}^{n,\iota,j} = \int_0^1 \Theta_{\iota,\ell}(x) \Psi_{ji}^{(n)}(x) dx . \quad (2.18)$$

Ces coefficients \mathcal{D} sont ensuite calculés comme les coefficients $\mathcal{A}_{i,\ell}^{\Delta,j}$ (voir *Partie 1, 2.2.4.a et annexe 1*).

2.3 Calcul des coefficients macroscopiques

Après avoir discrétisé les différents opérateurs intervenant dans l’équation variationnelle (2.1) et inversé le système linéaire ainsi obtenu, on obtient les coefficients d’ondelettes de la solution approchée de moyenne nulle u du problème variationnel.

A partir de ces coefficients, il reste à calculer les composantes de la matrice de rigidité du matériau homogène équivalent. Pour cela, on rappelle l’égalité (1.25) :

$$\mathbb{K}_{pq}^{eff} = \sum_{n=1}^{n=3} \left\langle \mathbb{K}_{pn}(y) e_n(u_q) \right\rangle_Y + \left\langle \mathbb{K}_{pn}(y) E_n^q \right\rangle_Y$$

où u_q est la solution approchée du problème (PV) associée à la sollicitation E^q ($E_n^q = \delta_{n,q}$, $n, q = 1, 2, 3$).

La seconde partie de cette somme peut être calculée directement puisque E est une fonction constante et que \mathbb{K} est constant par morceaux.

Quant à la première partie, on la détermine par la même technique que pour le second membre, en remplaçant la fonction T_k par \mathbb{K}_{qn} . En effet, puisque \mathbb{K}_{qn} est décomposé à l’aide de la base d’ondelettes $\{\Theta_{i,\ell_1}(x_1) \Theta_{i,\ell_2}(x_2) ; \ell_1, \ell_2 = 0, \dots, 2^i - 1\}$, et que la déformation $e_n(u_q)$ peut être écrite à l’aide des dérivées de l’ondelette Ψ , la première partie de la somme (1.25) peut se ramener à la somme d’intégrales entre la fonction d’échelle Θ et les dérivées de l’ondelette et de la fonction d’échelle Ψ (notés \mathcal{D}).

2.4 Exemples numériques

Dans ce paragraphe, nous nous préoccupons de la validation des résultats obtenus par la méthode exposée dans les pages précédentes. Dans ce qui suit, nous considérerons des matériaux bidimensionnels (hypothèse des contraintes planes) hétérogènes constitués de différents matériaux homogènes. Le module de Young de ces matériaux ainsi que les tenseurs de rigidité du matériau homogène équivalent seront toujours exprimés en GPa.

2.4.1 Exemple analytique

L'algorithme basé sur la transformée en ondelettes est tout d'abord validé sur un exemple analytique (matériau homogène périodique, cellule de base $Y =]0, 1[\times]0, 1[$, second membre donné sur la cellule de base sous forme d'un polynôme). Ce test nous sera très utile pour ajuster les différents paramètres qui ont été introduits : coefficients de viscosité, ordre de l'ondelette, dimension de l'espace d'approximation, méthode numérique à utiliser pour inverser le système linéaire, ...

On choisit une force imposée (second membre) de la façon suivante :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = & -4\mathbb{K}_{11}x_1^2(1-x_1)^2x_2^4(1-x_2)^4(14x_1^2-14x_1+3) \\ & -4\mathbb{K}_{33}x_1^4(1-x_1)^4x_2^2(1-x_2)^2(14x_2^2-14x_2+3) \\ & -16(\mathbb{K}_{12} + \mathbb{K}_{33})x_1^3(1-x_1^3)x_2^3(1-x_2)^3(1-2x_1)(1-2x_2) \\ f_2(x_1, x_2) = & -4\mathbb{K}_{22}x_1^4(1-x_1)^4x_2^2(1-x_2)^2(14x_2^2-14x_2+3) \\ & -4\mathbb{K}_{33}x_1^2(1-x_1)^2x_2^4(1-x_2)^4(14x_1^2-14x_1+3) \\ & -16(\mathbb{K}_{12} + \mathbb{K}_{33})x_1^3(1-x_1^3)x_2^3(1-x_2)^3(1-2x_1)(1-2x_2) \end{cases} \quad (2.19)$$

et on montre qu'alors, le déplacement est donné par :

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} u_1(x_1, x_2) = x_1^4(1-x_1)^4x_2^4(1-x_2)^4 - \frac{1}{630^2} \\ u_2(x_1, x_2) = x_1^4(1-x_1)^4x_2^4(1-x_2)^4 - \frac{1}{630^2} \end{cases} \quad (2.20)$$

On suppose enfin que le matériau (homogène et bidimensionnel) a un module de Young égal à 210 GPa et un coefficient de Poisson de 0,2 (on suppose de plus que la structure satisfait aux hypothèses des contraintes planes).

1 – Erreur relative

Afin d'évaluer l'erreur commise par rapport à la solution exacte en fonction des différents paramètres, on montre ici un tableau donnant une estimation de l'erreur relative ϵ en norme ℓ^2 , définie par la formule :

$$e^2 = \sum_{x \in \mathcal{N}} \frac{|u^{ex}(x) - u^{app}(x)|^2}{|u^{ex}(x)|^2} \quad (2.21)$$

où \mathcal{N} est l’ensemble des points considérés :

$$\mathcal{N} = \left\{ x = \left(\frac{n_1}{2^6}, \frac{n_2}{2^6} \right), \quad n_1, n_2 = 0, 1, \dots, 2^6 - 1 \right\}. \quad (2.22)$$

u^{ex} est la solution exacte (analytique), et u^{app} la solution approchée calculée à l’aide d’une base d’ondelettes de Daubechies d’ordre 3,4 ou 5, pour un niveau d’approximation allant de $j = 4$ (512 degrés de liberté) à $j = 6$ (8192 degrés de liberté).

Erreur relative	$M = 3$	$M = 4$	$M = 5$
$j = 4$	$0,10 \cdot 10^{-1}$	$0,32 \cdot 10^{-2}$	$0,66 \cdot 10^{-3}$
$j = 5$	$0,15 \cdot 10^{-2}$	$0,19 \cdot 10^{-3}$	$0,16 \cdot 10^{-4}$
$j = 6$	$0,19 \cdot 10^{-3}$	$0,11 \cdot 10^{-4}$	$0,21 \cdot 10^{-5}$

La solution étant très régulière (3 fois continument différentiable), la solution obtenue à l’aide de l’ondelette d’ordre 5 est bien meilleure que celle obtenue avec l’ondelette d’ordre 3.

Par contre, si l’on compare la qualité d’approximation à son coût de calcul en fonction de l’ordre de l’ondelette (figure 2.1), on remarque que cet avantage devient moins net. En effet, lorsque l’ordre de l’ondelette augmente, le nombre de coefficients non nuls dans la matrice croît (pour un niveau d’approximation $j = 5$, 165 888 coefficients non nuls pour $M = 3$, 567 296 pour $M = 5$), ce qui ralentit la convergence du gradient conjugué (méthode qui est utilisée pour inverser le système linéaire). De plus, lorsque l’ordre augmente, le coût de calcul d’un coefficient de la matrice d’élasticité croît également.

2 – Le paramètre de viscosité

On s’intéresse ensuite à l’influence du paramètre de viscosité sur la qualité de la solution. Pour cela, on observe la fluctuation de l’erreur relative (toujours à l’aide de l’erreur relative définie par la formule (2.21)) en fonction du paramètre de viscosité.

Dans ce cas, l’erreur est faible jusqu’à une valeur limite ($\varepsilon = 10^{-2}$), valeur à partir de laquelle l’erreur commence à croître. Ceci nous permet de penser qu’il faudra prendre ε inférieur à cette limite si l’on ne désire pas perturber la solution, mais suffisamment proche

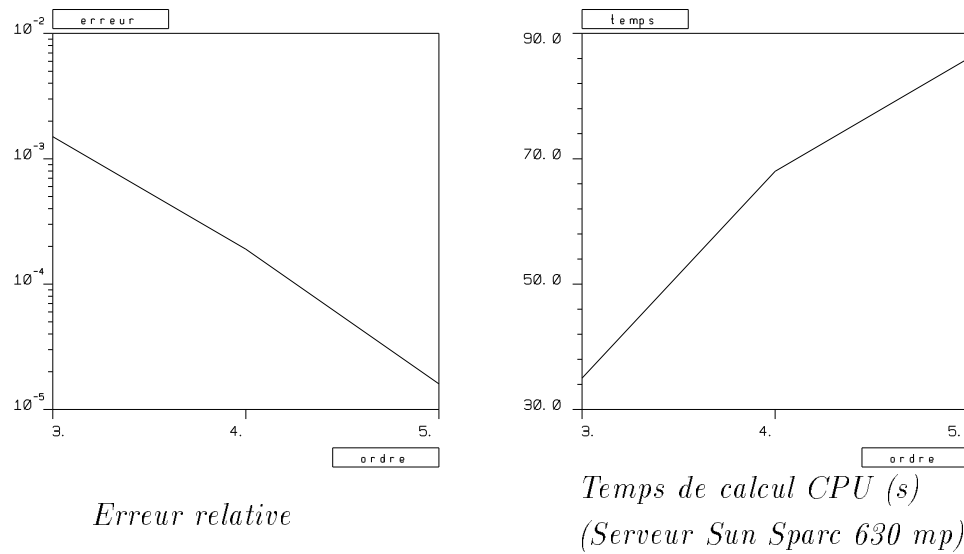


Figure 2.1 : Comparaison qualité-coût en fonction de l'ordre de l'ondelette ($j=5$, $\varepsilon = 10^{-2}$)

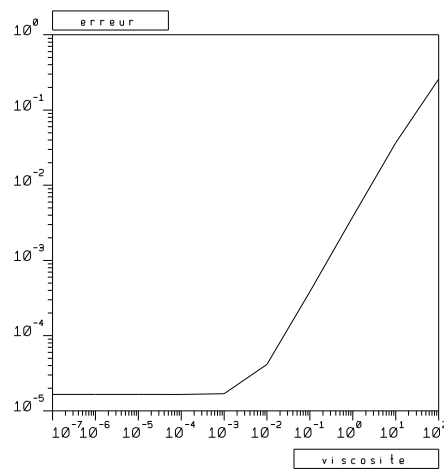


Figure 2.2 : Influence du paramètre de viscosité ($M=5$, $j=5$)

pour obtenir une moyenne proche de zéro. On choisira cette valeur limite ($\varepsilon = 10^{-2}$) par la suite.

Remarque :

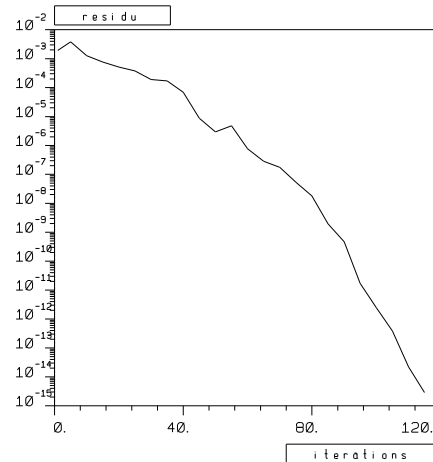
Pour cet exemple, la méthode à également convergé pour $\varepsilon = 0$. Ce phénomène provient de la méthode que l’on a utilisée pour inverser le système linéaire (le gradient conjugué) et d’une propriété de la matrice d’élasticité \mathcal{K} . En effet, comme la somme coefficients de chaque colonne de la matrice est nulle ($s_i = \sum_k \mathcal{K}_{i,k} = 0$ pour tout i), et que l’on initialise le gradient conjugué avec un vecteur X^0 dont la somme de ses composantes est nulle ($\sum_k X_k^0 = 0$), alors, si le gradient conjugué converge, chaque vecteur itéré X^ℓ possède la même propriété. De plus, comme la moyenne d’une fonction est une fonction linéaire de la somme de ses coefficients d’ondelettes, la moyenne de la solution sera nulle.

Lorsque, sur des exemples plus complexes, on aura besoin de préconditionner la matrice, ce paramètre ε sera indispensable puisque une condition à remplir sera d’avoir une matrice d’élasticité $\mathcal{K} + \varepsilon Id$ inversible. Il en sera de même si l’on veut utiliser des techniques multigrilles [60], [79], [73].

3 – Inversion du système linéaire

Comme nous l’avons déjà signalé, le système linéaire est inversé par la méthode du gradient conjugué *sans préconditionnement*. La méthode de stockage de la matrice d’élasticité est la méthode morse (seuls les coefficients non nuls sont stockés) [47].

La courbe donnant les fluctuations du résidu lors des itérations du gradient conjugué nous montre qu’elles sont relativement faibles (de l’ordre de 100 itérations pour obtenir un résidu inférieur à 10^{-12}), ce qui nous amène à penser que le spectre de la matrice dans le sous-espace propre des itérés (il s’agit de l’hyperplan défini par $\{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N x_i = 0\}$ où N est la dimension de la matrice) est relativement peu étalé (Le conditionnement en lui-même est élevé puisque $cond(\mathcal{K} + \varepsilon Id) = \frac{\lambda_{max} + \varepsilon}{\varepsilon}$ où λ_{max} est la plus grande valeur propre de \mathcal{K} et ε le paramètre de viscosité).

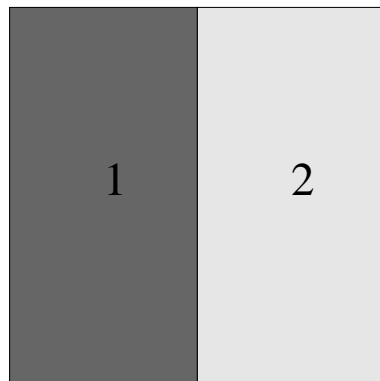


(Ordre $M=5$, niveau d'approximation $j=5$ (2 048 ddl), viscosité $\varepsilon = 10^{-2}$)

Figure 2.3 : Evolution du carré du résidu lors du processus itératif

2.4.2 Exemple d'un matériau bicouche

Nous présentons ensuite un premier test d'homogénéisation avec un matériau composite (matériau bicouche). La solution de base est le carré $Y =]0, 1[\times]0, 1[$, constitué de deux bandes verticales de largeur $\frac{1}{2}$. Vu la simplicité de la géométrie du composite, les composantes de la matrice de rigidité sont décomposées à l'aide de la fonction d'échelle de Haar au niveau d'approximation $\iota = 6$.



Matériau 1 : Carbure de silicium

Module d'Young : 410 GPa

Coefficient de Poisson : 0,19

Matériau 2 : Aluminium

Module d'Young : 72 GPa

Coefficient de Poisson : 0,32

Figure 2.4 : Composite élémentaire

1 – Comparaison avec un code éléments finis

On donne les tenseurs de rigidité obtenus avec la méthode exposée dans les chapitres précédents avec une ondelette de Daubechies d'ordre $M = 3$, niveau d'approximation $j = 5$

(2048 degrés de liberté), et les résultats obtenus par une méthode basée sur la technique des éléments finis et avec un nombre comparable de degrés de liberté (figure 2.5).

$$\mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 136 & 34,5 & 1.10^{-6} \\ 34,5 & 250 & 4.10^{-7} \\ 8.10^{-6} & 4.10^{-7} & 47,4 \end{bmatrix} \quad \mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 135 & 34,4 & -4.10^{-10} \\ 34,4 & 250 & -7.10^{-11} \\ 5.10^{-10} & -8.10^{-11} & 47,1 \end{bmatrix}$$

Ondelettes : Ordre $M=3$

Méthode des éléments finis

Figure 2.5 : Comparaison Ondelettes – Eléments finis (2 048 degrés de liberté)

Ces tableaux nous montre que les deux méthodes nous donnent des résultats tout à fait comparables (moins de 1% de différences).

Les temps de calcul, supérieurs pour les ondelettes, principalement dus à l’assemblage de la matrice, s’explique par le choix des ondelettes de Daubechies d’ordre 3 correspondant à des éléments finis quadratiques. En outre, la création du maillage n’est pas comptabilisée dans l’exécution du code éléments finis.

Dans cet exemple encore, une étude analogue à celle effectuée sur l’exemple analytique précédent montre que la valeur optimale du coefficient de viscosité est égal à 10^{-2} .

2 – Influence de l’ordre de l’ondelette

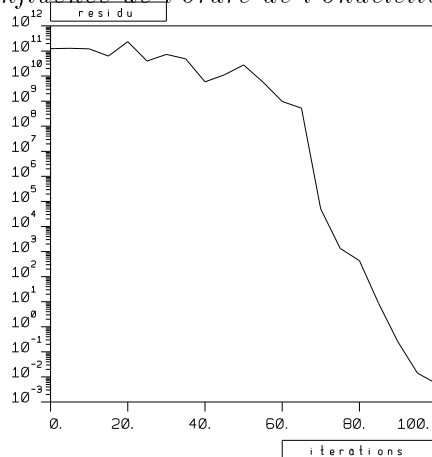
Dans l’exemple (analytique) précédent où le déplacement était donné par une fonction très régulière, nous avons conclu qu’il n’était pas forcément avantageux d’utiliser une ondelette très régulière. Voyons ce qu’il en est dans le cas où le déplacement est moins régulier. Nous présentons pour cela les résultats obtenus en utilisant les ondelettes de Daubechies d’ordre 4 et 5 (figure 2.6) à comparer avec ceux de la figure 2.5.

Il apparaît clairement que que par rapport à une méthode d’élément finis considérée comme référence, l’ondelette d’ordre $M = 3$ donne de meilleurs résultats (d’autant plus que le calcul de la matrice d’élasticité est moins coûteux).

$$\mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 137 & 34,8 & -6.10^{-5} \\ 34,8 & 250 & -1.10^{-6} \\ 2.10^{-5} & -1.10^{-6} & 48,3 \end{bmatrix} \quad \mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 140 & 35,3 & -1.10^{-6} \\ 35,3 & 250 & 6.10^{-6} \\ -6.10^{-7} & -1.10^{-6} & 49,7 \end{bmatrix}$$

Ordre $M=4$ Ordre $M=5$

Figure 2.6 : Influence de l'ordre de l'ondelette ($j = 5, \varepsilon = 10^{-2}$)



Ordre $M=3$, niveau d'approximation $j=5$ (2 048 ddl)

Figure 2.7 : Evolution du carré du résidu au cours du processus itératif

3 – Inversion du système linéaire

La figure 2.7 représente les fluctuations du résidu lors des itérations du gradient conjugué, toujours *sans préconditionnement*.

On observe que le nombre d'itérations n'est pas très élevé (de l'ordre de 100 itérations pour obtenir un résidu inférieur à 10^{-5} fois la norme du second membre, égale à 10^6), les fluctuations existantes étant principalement dues à la différence entre les coefficients d'élasticité des deux matériaux (ce qui détériore le conditionnement de la matrice d'élasticité). Là encore, on peut estimer que la matrice d'élasticité n'est pas mal conditionnée et que l'emploi d'un préconditionneur n'est pas nécessaire.

Remarquons que, pour un problème ayant un nombre comparable de degrés de liberté, la méthode du gradient conjugué appliquée aux éléments finis converge en deux à trois fois plus d'itérations.

4 – Vitesse de convergence de la méthode de Galerkin

Lorsque le nombre de degrés de liberté augmente, la solution approchée doit converger vers la solution exacte. Pour étudier la vitesse de cette convergence, on montre les résultats obtenus lorsque le niveau d’approximation $j = 4$ (512 degrés de liberté) et lorsque $j = 6$ (8192 degrés de liberté), on a également les résultats pour $j = 5$ dans la figure 2.5.

$$\mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 137 & 34,7 & 1.10^{-5} \\ 34,7 & 250 & 2.10^{-6} \\ 2.10^{-6} & -6.10^{-6} & 47,8 \end{bmatrix} \quad \mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 135 & 34,4 & -4.10^{-6} \\ 34,4 & 250 & -4.10^{-7} \\ 1.10^{-6} & 1.10^{-6} & 47,2 \end{bmatrix}$$

Niveau d’approximation : 4 *Niveau d’approximation : 6*

Figure 2.8 : Convergence de la méthode de galerkin ($M=3$)

On observe que les composantes du tenseur de rigidité homogénéisé varient peu en fonction du niveau d’approximation, ce qui montre qu’un niveau d’approximation $j = 4$ est suffisant pour avoir une bonne approximation des coefficients homogénéisés.

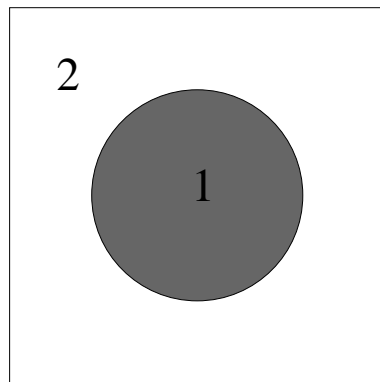
2.4.3 Exemples de matériaux de type fibres–matrice

Les exemples classiques en homogénéisation périodique concernent souvent l’étude des matériaux de type fibres–matrice. On présente dans ce paragraphe plusieurs exemples de ce type. Tout d’abord, on s’intéresse à l’étude d’un composite ne comportant qu’une seule fibre circulaire, où la validation des résultats pourra être faite grâce à une comparaison avec ceux obtenus par un code éléments finis (Micmac, [54]). Nous présenterons ensuite des exemples plus complexes où le matériau hétérogène sera composé d’une matrice et de plusieurs fibres de tailles très différentes.

Les composantes du tenseur de rigidité du matériau hétérogène seront décomposées à l’aide de la fonction d’échelle de Haar à un niveau d’approximation $\iota = 10$ (sauf si un autre niveau est indiqué). La viscosité sera fixée égale à $\varepsilon = 10^{-2}$, et le paramètre d’arrêt du gradient conjugué égal à 10^{-4} .

a – Cas d'une seule fibre

Un premier exemple classique en homogénéisation est l'étude d'un matériau composé d'une matrice entourant une seule fibre circulaire. Ici, nous avons choisi une matrice carré ($Y =]0, 1[\times]0, 1[$) d'aluminium dans laquelle se trouve une fibre circulaire de carbure de silicium (centre $(0,498 ; 0,496)$, rayon $R=0,3015$) de fraction volumique : 0,285.



Matériau 1 : Carbure de silicium

Module d'Young : 410 GPa

Coefficient de Poisson : 0,19

Matériau 2 : Aluminium

Module d'Young : 72 GPa

Coefficient de Poisson : 0,32

Figure 2.9 : Géométrie du composite (Cas d'une seule fibre)

1 – Comparaison avec un code éléments finis

Le tenseur de rigidité obtenu par la méthode de Galerkin – Ondelettes (pour une ondelette de Daubechies d'ordre $M = 3$, niveau d'approximation $j=5$ (2 048 degrés de liberté)) est comparé avec celui obtenu par une méthode basée sur la technique des éléments finis (code MicMac, [54]) avec un nombre comparable de degrés de liberté.

$$\mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 116 & 33,8 & 7.10^{-3} \\ 33,8 & 116 & 7.10^{-3} \\ 7.10^{-3} & 7.10^{-3} & 35,7 \end{bmatrix} \quad \mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 114 & 32,3 & 2.10^{-6} \\ 32,3 & 114 & 2.10^{-6} \\ 1.10^{-6} & 5.10^{-6} & 37,4 \end{bmatrix}$$

Ondelettes : Ordre $M=3$

Méthode des éléments finis

Figure 2.10 : Comparaison Ondelettes – Eléments finis (2 048 degrés de liberté)

Les différences, minimales sur les deux termes diagonaux, sont plus importantes sur les autres termes significatifs (de l'ordre de 10 %).

2 – Influence de l’ordre de l’ondelette

On s’intéresse ici à l’influence du choix de l’ordre de l’ondelette sur la qualité de la solution. On présente pour cela les résultats obtenus avec des ondelettes de Daubechies d’ordre 4 ou 5, à un niveau d’approximation $j = 5$ (2 048 degrés de liberté).

$$\mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 116 & 33,8 & -4.10^{-4} \\ 33,8 & 116 & -4.10^{-4} \\ -4.10^{-4} & -4.10^{-4} & 35,6 \end{bmatrix} \quad \mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 115 & 33,8 & 5.10^{-2} \\ 33,8 & 115 & 5.10^{-2} \\ 5.10^{-2} & 5.10^{-2} & 35,5 \end{bmatrix}$$

Ordre : M=4 *Ordre : M=5*

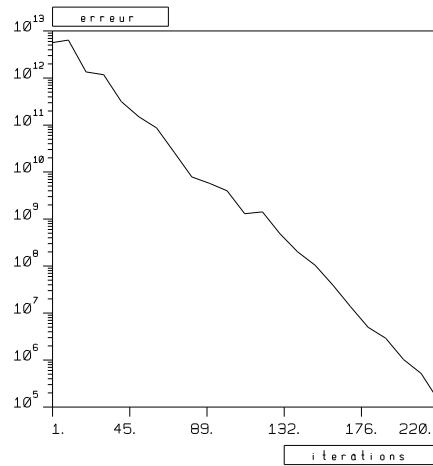
Figure 2.11 : Influence de l’ordre de l’ondelette

On remarque tout d’abord qu’ici, les résultats varient peu en fonction de l’ordre (la différence la plus notable étant sur les termes \mathbb{K}_{21} , \mathbb{K}_{31} , \mathbb{K}_{32} ainsi que leurs symétriques). Mais ici encore, vu le nombre de coefficients non nuls dans la matrice pour chaque cas (104 164 pour $M = 3$, 229 559 pour $M = 4$, 387 508 pour $M = 5$), le coût de calcul de chacun de ces coefficients et des itérations du gradient conjugué, l’utilisation de l’ondelettes d’ordre $M = 3$ reste la plus avantageuse.

3 – Inversion du système linéaire

Les systèmes linéaires à résoudre pour déterminer le tenseur de rigidité homogénéisé sont toujours inversés par la méthode du gradient conjugué, sans préconditionnement. On présente (figure 2.12) l’évolution du résidu lors des itérations sur un exemple à 2 048 degrés de liberté (dans le cas où le tenseur des déformation E agissant au second membre est un tenseur de traction simple dans la direction 1).

La convergence du gradient conjugué dans ce cas est toujours relativement rapide (même si elle est plus lente que dans les exemples à géométries plus simples). On peut donc estimer que la résolution des systèmes linéaires ne nécessite pas l’emploi d’un préconditionneur pour des problèmes de cette taille.



Ordre $M=3$, Niveau d'approximation $j=5$ (2 048 ddl)

Figure 2.12 : Evolution du résidu au cours du processus itératif

$$\mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 118 & 33,6 & 1.10^{-2} \\ 33,6 & 118 & 1.10^{-2} \\ 1.10^{-2} & 1.10^{-2} & 36,5 \end{bmatrix}$$

Niveau d'approximation $j=4$

$$\mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 114 & 33,9 & -9.10^{-5} \\ 33,9 & 114 & -9.10^{-5} \\ -9.10^{-3} & -9.10^{-5} & 35,3 \end{bmatrix}$$

Niveau d'approximation $j=6$

$$\mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 114 & 33,9 & 4.10^{-5} \\ 33,9 & 114 & 4.10^{-5} \\ 4.10^{-5} & 4.10^{-5} & 35,2 \end{bmatrix}$$

Niveau d'approximation $j=8$

Figure 2.13 : Convergence de la méthode de Galerkin ($M=3$)

4 – Vitesse de convergence de la méthode de Galerkin

On s’intéresse ici à l’influence du niveau d’approximation (donc du nombre de degrés de liberté) sur la qualité d’approximation des coefficients de la matrice de rigidité du matériau homogène équivalent (figure 2.13).

Ces coefficients évoluent peu lorsque le niveau d’approximation augmente (la différence maximale est de l’ordre de quelques pourcents), et 512 degrés de liberté suffisent pour en avoir une bonne approximation.

Afin d’observer la convergence au niveau microscopique, on montre une coupe du déplacement ($u_1(x_1, x_2)$ à x_1 constant ($x_1 = 0, 3$)) pour chaque niveau d’approximation ($j = 4$ à 8), et pour un essai de cisaillement simple (figure 2.14).

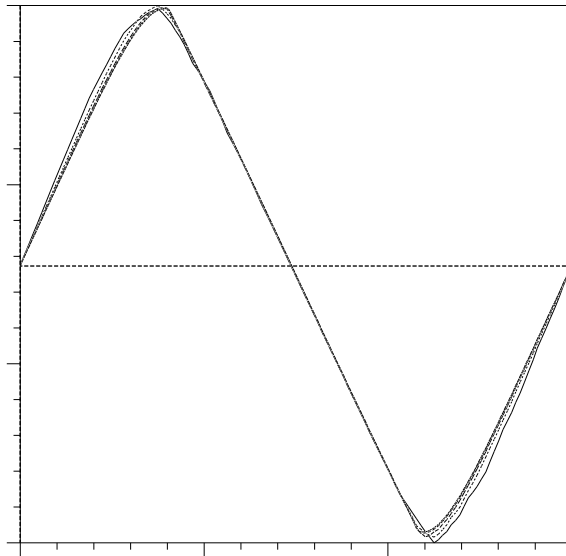


Figure 2.14 : Superposition d’une coupe pour chaque niveau d’approximation ($M = 3$)

On remarque que, même au niveau microscopique, la solution obtenue avec le moins de degrés de liberté est déjà une bonne approximation. C’est au niveau des extrema (points autour desquels le gradient du déplacement est le plus élevé) que la solution est de qualité moindre.

5 – Influence de la discrétisation de l'opérateur de rigidité

Examinons sur cet exemple l'influence de la qualité de la discrétisation de l'opérateur de rigidité. Pour cela, on le décompose dans une base de Haar (ce choix étant justifié par le fait que les coefficients d'élasticité du composite sont constants par morceaux) à un niveau d'approximation $\iota = 6$ ou 8 (figure 2.15), à comparer avec la matrice de rigidité de la figure 2.10 (où $\iota = 10$). Pour ce test, nous avons choisi pour mettre en oeuvre la méthode de Galerkin l'ondelette de Daubechies d'ordre $M = 3$ à un niveau d'approximation $j = 5$ (2048 degrés de liberté).

$$\mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 115 & 43,2 & -4.10^{-1} \\ 43,2 & 115 & -2.10^{-2} \\ -4.10^{-1} & -2.10^{-2} & 29,2 \end{bmatrix} \quad \mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 115 & 43,3 & -1.10^{-2} \\ 43,3 & 113 & -2.10^{-2} \\ -1.10^{-1} & -2.10^{-2} & 29,2 \end{bmatrix}$$

Niveau d'approximation $\iota = 6$ Niveau d'approximation $\iota = 8$

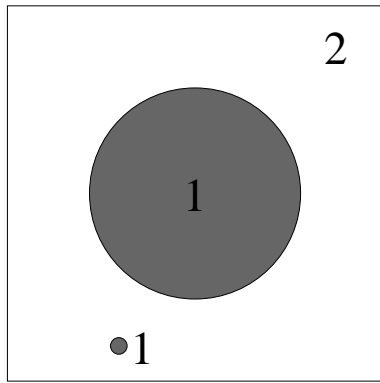
Figure 2.15 : Influence de la discrétisation de l'opérateur de rigidité

On observe que les différences sont minimales (elles sont de l'ordre de 1 %) et sont surtout sensibles sur les termes \mathbb{K}_{i3}^{hom} ($i = 1, 2$) ainsi que leurs symétriques. Ceci nous amène à penser qu'il suffit de choisir pour le paramètre ι une valeur qui rend la taille du support de l'ondelette $\Theta_{\iota,k}$ (qui est un carré de côté $\frac{1}{2^\iota}$) de l'ordre de grandeur des fibres du composites.

b – Cas de deux fibres

L'intérêt principal de la transformée en ondelettes est qu'elle est particulièrement bien adaptée à l'étude de phénomènes où différentes échelles entrent en jeu. Nous avons voulu vérifier cette propriété sur un problème d'homogénéisation. Pour cela, nous avons considéré une cellule de base constituée d'une matrice rectangulaire ($Y =]0, 1[\times]0, 1[$) dans laquelle se trouve deux fibres circulaires ayant des échelles différentes. La première est centrée (centre $(0,5; 0,5)$) et de rayon $R_1 = 0,3$, la seconde de centre $(0,3; 0,1)$ et de rayon $R_2 = 0,03$.

Sachant que le support d'une ondelette ψ_k^j est inclus dans un carré de longueur de côté égale à $\frac{2M}{2^j}$, le niveau d'approximation à utiliser pour pouvoir considérer la fibre de petite taille doit être élevé (2^j doit être de l'ordre de $2MR_2$). Malgré tout, nous allons voir que même avec un niveau d'approximation faible, les coefficients macroscopiques ne sont pas très différents, même si au niveau microscopique, les déplacements au niveau de la fibre ne sont pas très précis.



Matériau 1 : Carbure de silicium
 Module d’Young : 410 GPa
 Coefficient de Poisson : 0,19

Matériau 2 : Aluminium
 Module d’Young : 72 GPa
 Coefficient de Poisson : 0,32

Figure 2.16 : Géométrie du composite (Cas de deux fibres)

1 – Vitesse de convergence de la méthode de Galerkin

On donne (figure 2.17) les tenseurs de rigidité du matériau homogène équivalent obtenus avec des niveaux d’approximation de plus en plus élevés. On a utilisé pour cela l’ondelette de Daubechies d’ordre $M = 3$ qui présente ici l’avantage d’avoir un support de plus petite taille, permettant ainsi d’utiliser un niveau d’approximation plus faible (ce qui est un gain de calcul appréciable).

$$\mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 115 & 43,2 & 0,4 \\ 43,2 & 115 & 0,6 \\ 0,7 & 0,7 & 29,5 \end{bmatrix}$$

Niveau d’approximation : 5

$$\mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 114 & 43,8 & 0,3 \\ 43,7 & 114 & -0,1 \\ 0,3 & -0,07 & 28,9 \end{bmatrix}$$

Niveau d’approximation : 6

$$\mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 112 & 44,1 & 0,4 \\ 44,1 & 113 & 0,5 \\ 0,4 & 0,5 & 28,5 \end{bmatrix}$$

Niveau d’approximation : 7

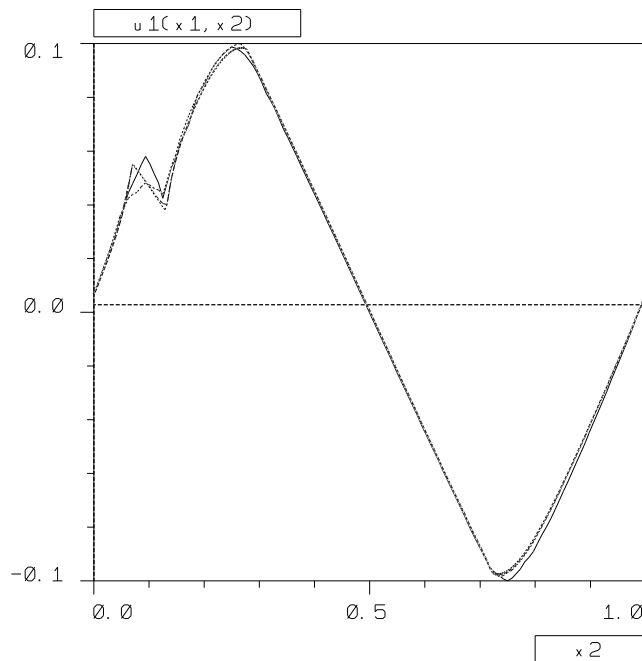
$$\mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 112 & 44,2 & 0,4 \\ 44,2 & 112 & 0,6 \\ 0,4 & 0,6 & 28,2 \end{bmatrix}$$

Niveau d’approximation : 8

Figure 2.17 : Convergence de la méthode de Galerkin ($M=3$)

Les différents coefficients de la matrice de rigidité varient peu en fonction du niveau d’approximation, ce qui amène à penser que les résultats obtenus avec $j = 5$ sont de bonne qualité.

Voyons ce qui se passe au niveau microscopique. Pour cela, examinons une coupe de la composante u_1 du déplacement à x_1 constant ($x_1 = 0,3$) qui passe par le centre de la fibre de petite taille, et coupe également celle de plus grande taille (figure 2.18).



$$(M=3, j=5, \dots, 8)$$

Figure 2.18 : Superposition d'une coupe pour chaque niveau d'approximation

On observe qu'au niveau microscopique, le niveau $j = 5$ est relativement peu précise. En effet, le déplacement obtenu au niveau de la petite fibre est lissé. Il en est de même pour le niveau $j = 6$. Par contre, pour les niveaux supérieurs, il apparaît une convergence qui montre que les approximations sont meilleures. Loin de cette petite fibre toutefois, la qualité de la solution au niveau le plus bas est très convenable, ce qui montre que pour abaisser le coût en temps de calcul, il est nécessaire de ne considérer qu'un niveau faible loin de la petite fibre, mais de raffiner autour de celle-ci.

2 – Une première approche du raffinement

Comme nous l'avons étudié dans la première partie, la taille des coefficients de détails sont directement liés à la régularité locale d'une fonction. Afin de préciser cette propriété, nous avons choisi une coupe d'une composante du déplacement ($u_1(x_1, x_2)$ pour $x_1 = 0,3$ et $x_2 \in [0, 1]$) obtenue avec le niveau d'approximation $j = 8$, et nous l'avons décomposé dans l'espace d'approximation $\mathcal{V}_6 \oplus \mathcal{W}_6 \oplus \mathcal{W}_7$ (de $H_p^1(0, 1)$). Nous avons ensuite superposé la coupe du déplacement avec une courbe représentant les coefficients de détails (grossis 20 fois) du niveau 6 et du niveau 7 (figure 2.19).

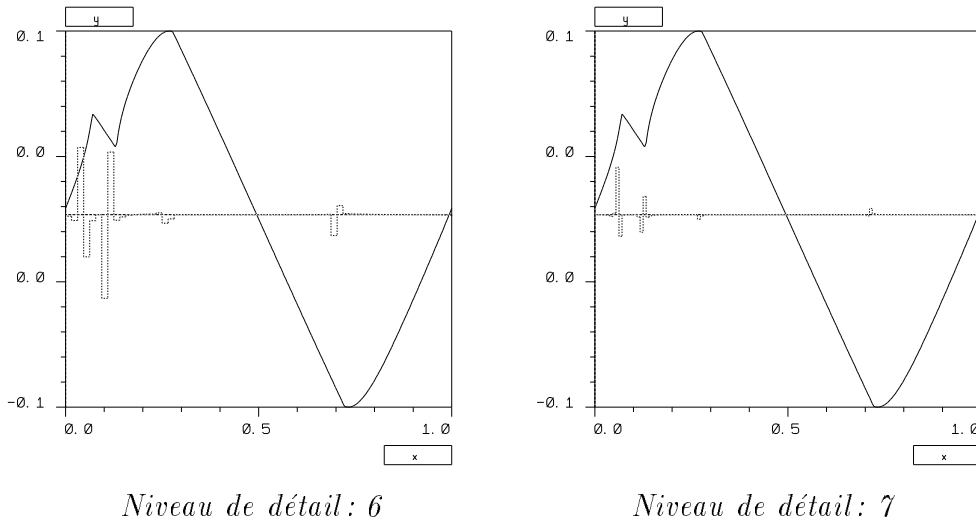


Figure 2.19 : Coefficients de détail d’une coupe du déplacement

On observe tout d’abord que ces coefficients sont petits et ont tendance à converger vers zéro. On remarque ensuite que les seuls coefficients significatifs se trouvent dans les zones à fort gradient, au niveau des interfaces fibres–matrice. Donc, lorsque l’on se préoccupera de raffinement, il suffira de se fixer un seuil s , et de raffiner là où les coefficients de détail seront plus grands que s .

Remarque :

Si l’on raffine autour des singularités, on obtient des résultats du même ordre que si l’on utilise une grille régulière (voir partie 1, paragraphe 2.4.2.c). Mais si les zones où l’on raffine ne sont pas extrêmement localisées, alors, même si le nombre de degrés de liberté est plus petit, le nombre de coefficients non nuls de la matrice d’élasticité peut être plus grand (il est trois fois plus grand dans le cas de l’exemple de la partie 1). Ceci est un problème lorsque l’on voudra inverser cette matrice. Deux solutions existent pour résoudre ce défaut, on peut soit utiliser des ondelettes définies sur des grilles non régulières (et non utiliser une grille dyadique comme dans notre cas), soit utiliser des ondelettes bidimensionnelles qui ne soient pas des produits tensoriels d’ondelettes monodimensionnelles [35], [36].

c – Comparaison des résultats

Les deux exemples (cas d’une fibre et cas de deux fibres) ont été choisis de telle sorte que la fibre du premier exemple possède la même fraction volumique que l’ensemble des deux fibres du second, et que son centre se trouve au “centre de gravité” des deux fibres. On va donc pouvoir comparer les deux résultats.

Les résultats obtenus au niveau macroscopique sont très proches (seul les coefficients \mathbb{K}_{i3}^{hom} , $i = 1, 2$ sont plus élevés dans le cas de deux fibres, montrant que l'anisotropie est plus sensible dans ce cas).

Afin d'observer les différences au niveau microscopique, comparons une coupe d'une composante du déplacement ($u_1(x_1, x_2)$ pour $x_1 = 0,3$ et $x_2 \in [0, 1]$).

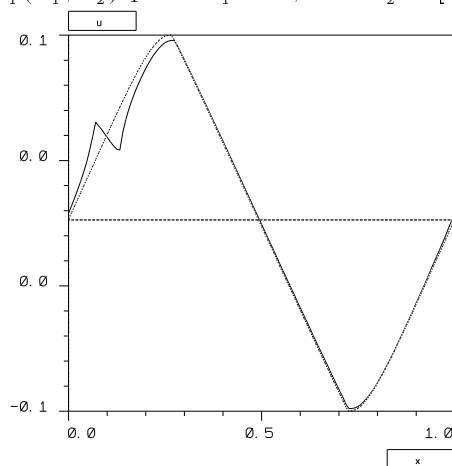


Figure 2.20 : Superposition d'une coupe de chaque exemple

Les différences sont notables surtout au niveau de la petite fibre, mais loin de celle-ci (et notamment sur la grande fibre), les résultats sont quasi-identiques.

1 – Convergence du gradient conjugué

La géométrie du composite étant plus complexe dans le cas de deux fibres (on n'a plus notamment la symétrie par rapport à la première bissectrice), on s'attend à ce que le spectre de la matrice du système linéaire à résoudre soit plus étalé dans le plan des itérés, ralentissant la convergence du gradient conjugué. Pour vérifier l'importance de cette détérioration, on examine le nombre d'itérations nécessaire pour chaque exemple dans le cas d'un essai de traction simple dans la direction 1, en fonction du niveau d'approximation (on rappelle que le seuil d'arrêt du gradient conjugué est fixé à 10^{-4}).

Le nombre d'itérations est de deux à trois plus élevé dans le cas de deux fibres. Cette constatation nous amène à penser que pour des géométries plus complexes, l'emploi d'un préconditionneur sera nécessaire.

Le coût de la méthode est fortement lié au nombre de coefficients non nuls dans la matrice d'élasticité (calcul d'un coefficient, calcul d'une itération du gradient conjugué, ...).

Niveau d’approximation	5	6	7	8
Nombre d’itérations (1 fibre)	226	474	957	1916
Nombre d’itérations (2 fibres)	547	853	1737	5299

Figure 2.21 : Influence de la petite fibre sur la convergence du gradient conjugué

Le nombre théorique de coefficients non nuls dans la matrice est de $2^{2j+2}(4M - 3)$ pour un niveau d’approximation j est une ondelette d’ordre M . Dans la pratique, ce nombre est nettement inférieur grâce à des propriétés d’orthogonalités entre les dérivées d’ondelettes.

Niveau d’approximation	5	6	7	8
Nombre de coeff. (1 fibre)	104 164	377 352	1 426 230	5 538 626
Nombre de coeff. (2 fibres)	104 280	379 532	1 439 158	5 552 788
Nombre de coeff. théorique	166 912	667 648	2 670 592	10 682 368

Ordre de l’ondelette : $M=3$

Figure 2.22 : Nombre de coefficients dans la matrice d’élasticité

Le nombre de coefficients non nuls dans la matrice (dans la pratique, on a considéré les coefficients supérieurs à 10^{-10}) est proche dans les deux exemples, mais légèrement supérieur pour le cas de deux fibres. Par contre, ce nombre est nettement inférieur au nombre théorique (dans un rapport de 1,5 à 2), et cet avantage croît avec le niveau d’approximation.

2 – Temps de calcul

Observons les temps de calcul nécessaires pour déterminer le tenseur de rigidité du matériau homogène équivalent, pour chacun des deux exemples, en fonction du niveau d’approximation. Ces temps de calcul, obtenus sur une machine de type IBM SP2, comprennent le calcul de la matrice d’élasticité (ordre de l’ondelette $M = 3$, niveau d’approximation pour la décomposition des composantes du tenseur de rigidité du composite $\iota = 10$), le calcul des trois vecteurs au second membre (tractions simples dans les directions 1 et 2, cisaillement simple dans les directions 1–2), des trois inversions des systèmes linéaires (on n’a pas tenu compte des symétries du problème pour initialiser le gradient conjugué dans la seconde inversion), et du calcul des 9 coefficients du tenseur de rigidité du matériau homogène équivalent.

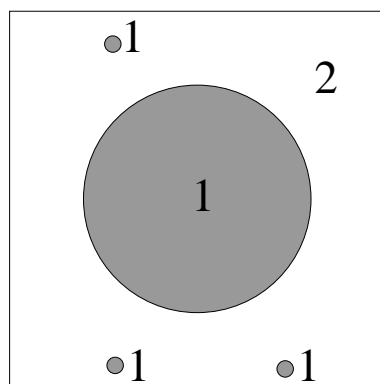
Niveau d'approximation	6	7	8
Temps de calcul (1 fibre)	05'07"	16'17"	1h 24'29"
Temps de calcul (2 fibres)	10'04"	31'36"	4h 09'13"

Figure 2.23 : Temps de calcul des tenseurs de rigidité "homogénéisés" (sur IBM SP2)

On observe que les différences en temps de calcul sont du même ordre que celles du nombre d'itérations du gradient conjugué, montrant par là même qu'il s'agit de la partie la plus coûteuse de l'algorithme.

d – Cas de plusieurs fibres

Afin d'étudier le comportement du code de calcul sur exemple plus complexe, on étudie le cas où le composite (dont la cellule de base est toujours le carré $]0,1[\times]0,1[$) est une matrice d'aluminium entourant quatre fibres de carbure de silicium. Une est centrée dans la matrice et a un rayon égal à 0,3, les trois autres ont pour rayon $R = 0,03$ et ont pour centre $(C_1=(0,1; 0,3); C_2=(0,9; 0,3); C_3=(0,7; 0,1))$. On pourra ainsi comparer les résultats obtenus dans le cas de deux fibres.



Matériau 1: Carbure de silicium
Module d'Young: 410 GPa
Coefficient de Poisson: 0,19

Matériau 2: Aluminium
Module d'Young: 72 GPa
Coefficient de Poisson: 0,32

Figure 2.24 : Géométrie du composite (Cas de quatre fibres)

On présente ensuite la matrice de rigidité du matériau homogène équivalent obtenue par le code en utilisant une ondelette de Daubechies d'ordre $M = 3$, à un niveau d'approximation $j = 8$ (131 072 degrés de liberté), et en choisissant toujours la viscosité égale à 10^{-2} (figure 2.25).

Ces résultats nous montrent que l'ajout de deux fibres (par rapport au cas de deux fibres) renforce le composite, et que l'anisotropie n'est pas accentuée.

$$\mathbb{K}^{hom} = \begin{bmatrix} 113 & 44,6 & -0,4 \\ 44,6 & 114 & -0,9 \\ -0,4 & -0,9 & 28,8 \end{bmatrix}$$

Niveau d’approximation : 8

Figure 2.25 : Matrice de rigidité homogénéisée dans le cas de 4 fibres ($M=3$, 131 072 ddl)

La convergence du gradient conjugué a nécessité 4 910 itérations qui est un nombre tout à fait comparable au cas où il n’y a que deux fibres (5 299 itérations).

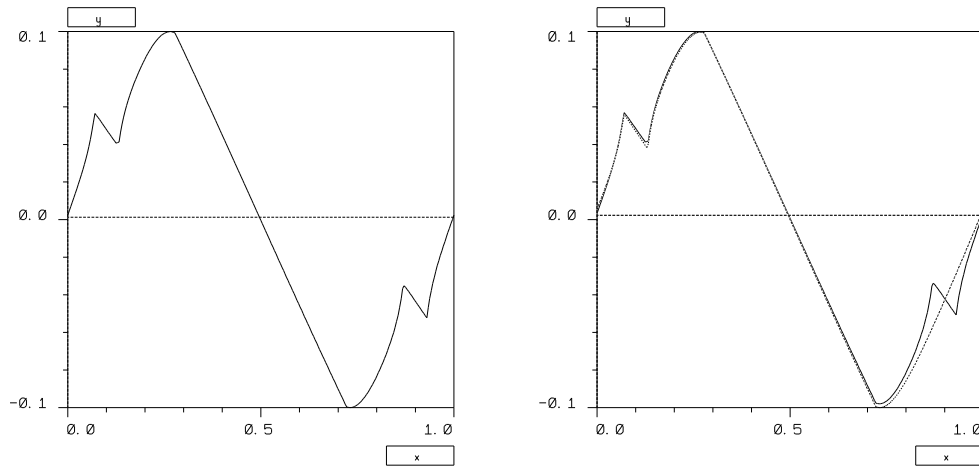
Examinons enfin la différence de comportement au niveau microscopique entre les deux exemples (figure 2.26). Pour cela, on montre une coupe d’une composante du déplacement ($u_1(x_1, x_2)$) pour $x_1 = 0,3$ et $x_2 \in]0, 1[$) dans le cas où le composite est soumis à un effort de cisaillement simple. Cette coupe passe par le centre des deux fibres les plus à gauche, et pourra être comparée au cas où le composite est constitué de deux fibres. Enfin, à cause de la symétrie de la structure, on comparera également la coupe ($u_1(x_1, x_2)$) pour $x_1 = 0,7$ et $x_2 \in]0, 1[$) qui passe par le centre de la petite fibre de droite, à la coupe ($u_1(x_1, x_2)$) pour $x_1 = 0,3$ et $x_2 \in]0, 1[$) du cas où le composite n’a que deux fibres.

Sur la première figure, on observe que les fibres de petites tailles sont bien prises en compte. Sur les deux suivantes, on peut voir que l’introduction d’une fibre supplémentaire entraîne une modification locale du comportement de la structure, ce qui explique la faible variation de la matrice de rigidité des matériaux homogènes équivalents selon les exemples.

2.4.4 Remarques générales

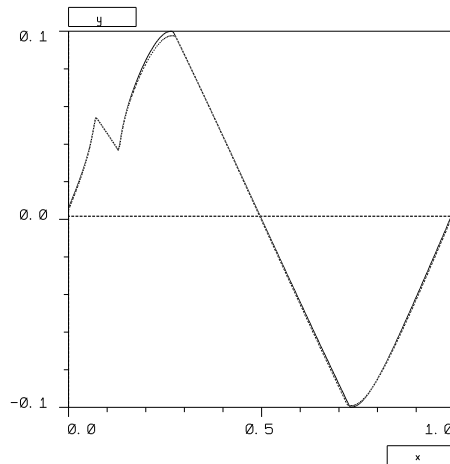
a – Paramètre de viscosité

Comme nous l’avons déjà signalé, si l’on initialise le gradient conjugué avec un vecteur dont la somme des composantes est nulle, alors, grâce aux propriétés de notre matrice d’élasticité et du gradient conjugué, si la convergence est atteinte, la moyenne de la solution sera nulle. Cette propriété n’étant pas forcément établie pour des solveurs plus performants (avec préconditionneur, méthode multigrille, ...), il est nécessaire d’estimer l’influence du paramètre de viscosité. Pour cela, initialisons le gradient conjugué avec un vecteur dont la somme des composantes est non nulle, et voyons, selon la valeur de la viscosité choisie, la moyenne de la solution obtenue.



*Coupe du déplacement
(cas de 4 fibres)*

*Superposition d'une coupe dans chaque cas :
Trait plein : 4 fibres
Trait pointillé : 2 fibres*



*Superposition d'une coupe dans chaque cas :
Trait plein : 4 fibres ($x_1 = 0,7$ constant)
Trait pointillé : 2 fibres ($x_1 = 0,3$ constant))*

Figure 2.26 : Coupes dans le cas de 4 fibres

Nous avons choisi de traiter l’exemple analytique, et la courbe donnant le logarithme de la moyenne en fonction du logarithme de la viscosité (figure 2.27) pourra être comparée à celle donnant le logarithme de l’erreur en fonction du logarithme de la viscosité (figure 2.2). On initialise les itérations du gradient conjugué avec le vecteur $U_0 = \frac{1}{\sqrt{2048.1000}} (1, 1, \dots, 1)^t$, ($\|U_0\| = 10^{-3}$).

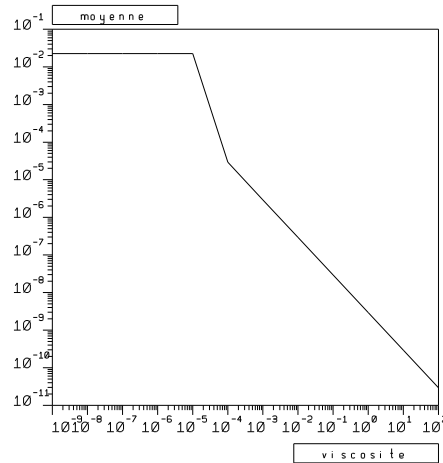


Figure 2.27 : Influence de ε sur la moyenne de la solution ($M=5, j=5$)

On observe tout d’abord que pour une valeur de la viscosité inférieure à 10^{-5} , la moyenne garde une valeur constante ($2 \cdot 10^{-2}$), ce qui est également le cas dans la figure 2.2. On peut donc penser qu’ici la viscosité a une valeur trop petite pour pouvoir agir.

Ensuite, au delà de cette valeur, la moyenne décroît régulièrement (elle est divisée par 10 si l’on multiplie la viscosité par 10), et cette décroissance est exactement inverse à l’augmentation de l’erreur relative. On peut donc conclure que dans cet exemple, une valeur de la viscosité choisie entre 10^{-4} et 10^{-2} semble optimale.

b – Le gradient conjugué

Ce paragraphe concerne quelques rappels sur la méthode du gradient conjugué. On rappelle tout d’abord que la convergence de la méthode est atteinte en au plus N itérations (où N est le nombre total de degrés de liberté), et que la rapidité de cette convergence est directement liée au conditionnement de la matrice. En effet, si l’on note A la matrice du système linéaire à inverser (semi définie positive), le facteur de convergence est inférieur à une constante ρ définie par :

$$\rho = \frac{(\sqrt{K(A)} - 1)^2}{(\sqrt{K(A)} + 1)^2} \quad K(A) = \text{cond}(A) . \tag{2.23}$$

Dans la pratique, l'initialisation se fait par une itération de gradient. La matrice à inverser est stockée sous forme morse, c'est-à-dire que l'on ne conserve que les coefficients non nuls, leurs positions dans la matrice étant connues grâce à des tableaux de pointeurs.

Le test d'arrêt est défini de la façon suivante : on fixe un seuil ε , et on arrête les itérations lorsque la norme ℓ^2 du résidu devient inférieur à ε fois la norme ℓ^2 du second membre.

2.5 Conclusion

Cette première étude sur l'utilisation de la transformée en ondelettes pour traiter des problèmes d'homogénéisation périodique s'avère prometteuse. Sur des problèmes simples, les résultats obtenus par cette méthode sont comparables à ceux provenant d'un code éléments finis. Si l'on observe les temps de calcul, les résultats moins satisfaisants de la transformée en ondelettes proviennent de la régularité (et donc de la taille) de ces ondelettes, correspondant à des éléments finis de type P2. Toutefois, dans ce domaine, une optimisation du code est possible.

Les conclusions que l'on peut tirer de cette étude nous montrent qu'il vaut mieux utiliser des ondelettes peu régulières (ce qui est légitime puisque les opérateurs entrant en jeu sont peu réguliers). La vitesse de convergence de la méthode de Galerkin semble rapide, il suffit que la taille du support de l'ondelette (ou de la fonction d'échelle) analysante ait une taille du même ordre de grandeur que les singularités.

Diverses améliorations du code de calcul sont possibles, notamment pour traiter des problèmes en faisant du raffinement local. Il faudrait avant tout mettre en oeuvre un algorithme automatique (tel qu'on a pu le définir) pour les problèmes non linéaires où apparaîtraient des zones de singularité que l'on ne peut pas localiser a priori. Enfin, toujours si l'on utilise un raffinement local, on peut utiliser des méthodes d'inversion adaptées à la propriété principale des ondelettes : le multiniveau. Des techniques basées sur les multigrilles [73] semblent particulièrement efficaces pour résoudre ce type de problèmes.

Conclusion

Cette étude sur l'utilisation de la transformée discrète en ondelettes est avant tout une étude préliminaire, qui permet d'évaluer son intérêt, et tente d'optimiser les différents paramètres entrant en jeu (ondelettes à utiliser pour mettre en oeuvre la méthode de Galerkin, pour discrétiser l'opérateur de rigidité du matériau composite, paramètre de viscosité, ...).

Les premières conclusions que l'on peut en tirer sont positives. Le rapport qualité-coût de cette méthode, même s'il n'est pas toujours à son avantage sur des exemples simples, n'est pas très éloigné de la méthode des éléments finis, d'autant plus que la transformée en ondelettes ne demande pas la création d'un maillage, partie extrêmement coûteuse mais non comptabilisée dans les temps de calcul de la méthode des éléments finis.

Plusieurs perspectives deviennent désormais envisageables. On peut en effet espérer pouvoir traiter des problèmes où le matériau composite a une géométrie complexe, nécessitant l'utilisation de techniques de traitement de l'image (elles-même basées sur la transformée en ondelettes) pour déterminer les coefficients d'élasticité locaux (module de Young et coefficient de poisson par exemple) du composite.

Une autre voie de recherche pourrait résider dans la mise en oeuvre de techniques plus efficaces pour obtenir les tenseurs de rigidité du matériau homogène équivalent. Une première étude sur ce sujet a d'ailleurs été faite, utilisant la transformée en ondelettes et la transformée de Fourier (la transformée de Fourier présentant l'avantage de pouvoir exprimer simplement la matrice de souplesse dans le cas d'un matériau homogène, mais aussi l'inconvénient de provoquer des phénomènes de Gibbs pour des matériaux hétérogènes) [43], [52].

Enfin, grâce à des techniques de raffinement local automatique, on peut espérer traiter des problèmes non linéaires (viscoplasticité, créations de fissure, ...) plus efficacement que la méthode des éléments finis où le problème du remaillage peut être extrêmement ardu [78], [82].

Partie 3

L'élasticité bidimensionnelle linéarisée

Introduction

En élasticité, la résolution de la plupart des problèmes non linéaires (plasticité ou viscoplasticité, contact et frottement, etc.) s'obtient à l'aide des méthodes de Newton et d'Uzawa, par succession de problèmes linéaires dont les solutions convergent vers le problème initial. Il apparaît donc qu'un premier problème à résoudre est celui de l'élasticité linéarisée avec conditions aux limites de type Neumann (efforts imposés), Dirichlet (déplacement imposés), ou mixte.

La méthode couramment utilisée pour résoudre ce type de problème est celle des éléments finis. Elle consiste à mailler le corps à étudier. Ce maillage, dépendant essentiellement de la géométrie de ce corps, n'est pas sans poser quelques difficultés numériques, en dimension 3 notamment, et demande un coût de calcul important [81]. En effet, un des problèmes est dû au maillage qui peut créer des éléments voisins de tailles très différentes, engendrant ainsi des instabilités numériques. Un autre défaut de cette méthode est la difficulté de détection des zones à fort gradient [78].

Des techniques alternatives ont été proposées, visant essentiellement à supprimer la notion de maillage (éléments diffus [80], analyse de Fourier [64]). Nous en proposons une nouvelle (toujours basée sur l'absence de maillage), notamment à cause de la facilité avec laquelle on peut détecter les zones à fort gradient, basée sur la transformée en ondelettes. Cette technique a d'ailleurs déjà été utilisée pour résoudre plusieurs types d'équations aux dérivées partielles, provenant essentiellement de la mécanique des fluides [22], [23], [24], [34], [67].

En contrepartie, justement à cause de l'absence de la notion de maillage, nous serons dans l'incapacité, dans le cas général, de résoudre le problème directement sur la région occupée par le système. Nous avons donc choisi d'utiliser des techniques de domaines fictifs [70], où le corps considéré est "plongé" dans une région plus grande, de géométrie très simple (un carré par exemple pour le cas de la dimension 2). Il faudra ensuite imposer des conditions aux limites à l'intérieur de ce grand domaine par des méthodes de type pénalisation, Lagrangien ou Lagrangien augmenté. Ceci fera l'objet d'un premier chapitre.

La seconde partie traitera pour sa part de la mise en oeuvre numérique et des résultats obtenus par cette méthode. Nous verrons notamment qu'elle nécessite la connaissance de la projection de l'élément de mesure linéique sur le bord du domaine intérieur, et nous étudierons comment la calculer. Il en sera de même pour les différentes matrices qui entreront en jeu. Nous donnerons ensuite quelques résultats numériques (calcul de longueur de périmètres, exemples analytiques) nous permettant de valider la méthode et d'optimiser certains paramètres.

Chapitre 1

Formulation mathématique du problème

1.1 Ecriture du problème

1.1.1 Introduction

On se propose dans cette partie de résoudre un problème d'élasticité linéarisée en dimension 2, avec conditions aux limites de type Neumann ou Dirichlet, à l'aide de la transformée en ondelettes. L'intérêt de cette méthode est la suppression de la notion de maillage, et, par conséquent, l'élaboration d'une technique utilisable indépendamment de la géométrie du système. Il suffira d'avoir une image "par pixel" de ce corps, ou une fonction analytique définissant sa frontière. Dans le cas où le corps étudié n'a pas une géométrie très simple (de type carré ou rectangle), la technique consiste à écrire le problème sur un domaine carré incluant le précédent (appelé domaine fictif car n'ayant aucune réalité physique), et d'écrire les conditions aux limites à l'intérieur de ce domaine. Ici, plusieurs solutions existent, et nous en étudierons deux : la pénalisation et la méthode du Lagrangien. Nous adopterons et développerons l'analyse d'une troisième méthode combinant les deux précédentes, basée sur la formulation d'un Lagrangien augmenté.

1.1.2 Domaines fictifs

On considère, dans cette partie, un matériau élastique linéarisé, bidimensionnel, de tenseur de rigidité (d'ordre 4) noté \mathbb{K} , occupant un domaine ouvert de \mathbb{R}^2 noté ω , et soumis

à une densité surfacique de force f . On suppose de plus que ω est de frontière suffisamment régulière $\partial\omega$, décomposée en deux parties $\partial\omega_D$ et $\partial\omega_F$ telles que $\partial\omega = \partial\omega_D \cup \partial\omega_F$ et $|\partial\omega_D| > 0$ ($|\partial\omega_D| = \int_{\partial\omega_D} ds$). Sur $\partial\omega_D$, on impose un déplacement u_0 donné, sur $\partial\omega_F$, on soumet le corps à une densité linéique de force g et on recherche la position d'équilibre d'un tel système.

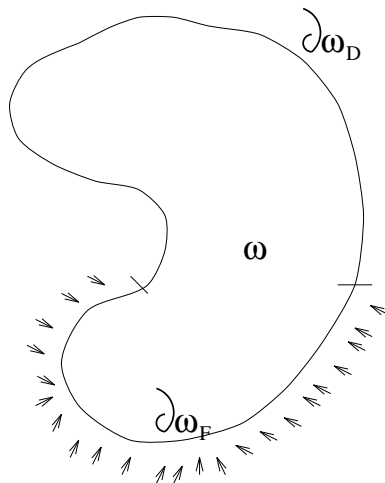


Figure 1.1 : Problème d'élasticité

On est alors amené à résoudre le problème :

Problème 6 — Soit f , u_0 et g donnés, trouver u et σ tels que :

$$(P_\omega) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \sigma + f = 0 & \text{dans } \omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\omega_D \\ \sigma \cdot n = g & \text{sur } \partial\omega_F \\ \sigma = \mathbb{K} \epsilon(u) & \text{(loi de comportement)} \end{cases} \quad (1.1)$$

(n désigne la normale unitaire sortante à $\partial\omega$; $\epsilon(u)$ le tenseur des déformations associé au déplacement u : $\epsilon(u) = \operatorname{grad}_s(u)$).

Classiquement, ce problème d'élasticité linéarisée admet une solution unique (u, σ) si $|\partial\omega_D| > 0$ [69].

On désire résoudre ce problème à l'aide de la transformée en ondelettes. On est malheureusement dans l'incapacité de le résoudre directement avec cette technique car les conditions

aux limites sont posées sur un domaine non rectangulaire. Malgré tout, on peut "plonger" le domaine ω dans un domaine rectangulaire Ω de plus grande taille, et imposer ensuite les conditions aux limites à l'intérieur de Ω . Par commodité numérique, on va supposer de plus que ce problème sur Ω est en fait un problème sur \mathbb{R}^2 qui est Ω -périodique (ceci nous permettra d'utiliser les ondelettes périodiques de Daubechies). Si le domaine Ω est choisi suffisamment grand par rapport à ω , cette hypothèse ne perturbera pas notre problème.

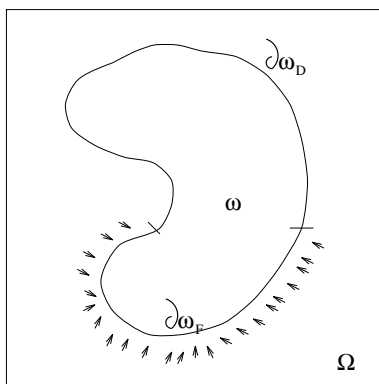


Figure 1.2 : Domaine fictif

Prolongeons tout d'abord f par \tilde{f} dans Ω tout entier. On résout alors sur Ω le problème d'élasticité suivant :

Problème 7 (Domaines fictifs) — Soit \tilde{f} , u_0 et g donnés, trouver \tilde{u} et $\tilde{\sigma}$ tels que :

$$(P_\Omega) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \tilde{\sigma} + \tilde{f} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \tilde{u} = u_0 & \text{sur } \partial\omega_D \\ \tilde{\sigma} \cdot n = g & \text{sur } \partial\omega_F \\ \tilde{\sigma} = \mathbb{K}e(\tilde{u}) & \text{(loi de comportement)} \\ \tilde{u} \text{ } \Omega\text{-périodique} & \end{cases} \quad (1.2)$$

Ce problème admet aussi une solution unique $(\tilde{\sigma}, \tilde{u})$ (si $|\partial\omega_D| > 0$) qui est égale à la solution u du problème (P_ω) sur le domaine ω (la démonstration de cette proposition sera faite à la fin du paragraphe sur le problème posé sur sa dernière forme).

Ce problème, posé sur Ω , n'a plus une forme classique. En effet, les conditions aux limites ne sont pas imposées sur le bord de Ω , mais sur le bord de ω , donc à l'intérieur de Ω . On peut toutefois le ramener à un problème de minimisation sous contraintes, où la fonction à

minimiser est l'énergie potentielle du système, notée ϕ , et les contraintes sont les conditions aux limites imposées sur le bord de ω . On a alors à résoudre le problème de minimisation sous contraintes (théorème de l'énergie potentielle) :

Problème 8 (Minimisation) — Soit \tilde{f} , u_0 et g donnés, trouver u tel que :

$$(P_m) \quad \begin{array}{l} u \in \text{Argmin } \phi(v) \\ \text{sous les contraintes :} \end{array} \quad \begin{cases} u = u_0 & \text{sur } \partial\omega_D \\ \sigma.n = g & \text{sur } \partial\omega_F \end{cases} \quad (1.3)$$

où la quantité :

$$\phi(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(v) : \epsilon(v) \, dx - \int_{\Omega} \tilde{f}v \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{K}\epsilon(v) : \epsilon(v) \, dx - \int_{\Omega} \tilde{f}v \, dx \quad (1.4)$$

est l'énergie potentielle ϕ du système.

Dans le cas où :

$$\begin{aligned} u_0 &\in \left(L^2(\partial\omega_D)\right)^2 \\ g &\in \left(L^2(\partial\omega_F)\right)^2 \\ \tilde{f} &\in \left(L^2(\Omega)\right)^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

on peut montrer [70] que ce problème admet une solution unique (u, σ) avec $u \in \left(H_p^1(\Omega)\right)^2$.

Pour résoudre ce problème de minimisation sous contraintes, plusieurs méthodes sont possibles. On peut utiliser une méthode de pénalisation qui consiste à écrire les équations variationnelles du problème et à y ajouter un terme de pénalisation multiplié par un réel $\frac{1}{\varepsilon}$ le plus grand possible, la solution u_ε du problème pénalisé convergeant vers la solution du problème initial lorsque ε tend vers zéro.

Une autre technique utilisable pour résoudre ce problème de minimisation sous contraintes est la méthode du Lagrangien, ou une amélioration de celle-ci, la méthode du Lagrangien augmenté. Ici, on ajoute de nouvelles inconnues appelées champs de multiplicateurs de Lagrange et on définit une fonctionnelle appelée Lagrangien où apparaissent toutes les équations du problème. La solution est alors un point-selle du Lagrangien.

1.2 Traitement des conditions aux limites

1.2.1 La pénalisation

Cette technique consiste à écrire le problème variationnel associé au problème initial, et à y ajouter des termes dus aux contraintes que l'on a imposées, multipliés par un réel $\frac{1}{\varepsilon}$ qui doit tendre vers l'infini. En d'autres termes, on se ramène à la résolution du problème variationnel suivant :

Problème 9 (Pénalisation) — Soit \tilde{f} , u_0 et g ; ε_1 et ε_2 donnés, trouver u_ε tel que :

$$(P_p) \quad \int_{\Omega} \mathbb{K}e(u_\varepsilon) : e(v) \, dx + \frac{1}{\varepsilon_1} \int_{\partial\omega_D} (u_\varepsilon - u_0)v \, ds + \frac{1}{\varepsilon_2} \int_{\partial\omega_F} (\mathbb{K}e(u_\varepsilon).n - g)v \, ds = \int_{\Omega} \tilde{f}v \, dx \quad (1.6)$$

pour tout champ v cinématiquement admissible.

et on peut montrer [70] que u_ε converge vers la solution u du problème initial lorsque ε_1 et ε_2 tendent vers zéro.

Le défaut de cette méthode est que, lorsque ε_1 et ε_2 sont petits, la matrice obtenue par la projection de l'opérateur du premier membre de l'égalité (1.6) dans une base est très mal conditionnée (et d'autant plus mal que ε_1 et ε_2 sont petits), ce qui entraîne d'importants problèmes numériques (inversion de la matrice) lors de la recherche de la solution.

1.2.2 Le Lagrangien

La technique employée ici est totalement différente. On utilise la formulation "minimisation sous contraintes" du problème. A chacune de ces contraintes, on attache une nouvelle variable, appelée multiplicateur de Lagrange. On construit ensuite, à l'aide de l'énergie potentielle, une nouvelle fonctionnelle appelée Lagrangien, dépendant du déplacement et des champs de multiplicateurs, et présentant un point-selle.

En d'autres termes, on définit le **Lagrangien** du problème (P_m), noté L et défini par :

$$L(v, \mu_1, \mu_2) = \phi(v) + \left\langle \mu_1, v - u_0 \right\rangle_1 + \left\langle \mu_2, \sigma(v).n - g \right\rangle_2, \quad (1.7)$$

les nouvelles variables μ_1 et μ_2 sont appelées **multiplicateurs de Lagrange** du problème, et :

- μ_1 est homogène à une pression,
- μ_2 est homogène à un déplacement.

Définissons tout d'abord les espaces fonctionnels dans lesquels nous allons travailler :

- Sur le domaine carré Ω , le champ de déplacement Ω -périodique sera dans l'espace :

$$V := \left(H_p^1(\Omega) \right)^2 \quad (1.8)$$

- muni de son produit scalaire :

$$(u, v)_V = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left[u_i v_i + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right] dx, \quad (1.9)$$

- et de sa norme $\|\cdot\|_V$ associée.

- On définit sur les parties $\partial\omega_D$ et $\partial\omega_F$ de la frontière $\partial\omega$, les applications traces :

$$\gamma_D \quad : \quad \text{application trace de } \left(H^1(\omega) \right)^2 \text{ sur } \left(H_{00}^{1/2}(\partial\omega_D) \right)^2 ;$$

$$\gamma_F \quad : \quad \text{application trace de } \left(H^1(\omega) \right)^2 \text{ sur } \left(H_{00}^{1/2}(\partial\omega_F) \right)^2 ;$$

- Sur la partie $\partial\omega_D$ de la frontière de ω , on définit :

$$\mathcal{M}_1 = \left(H_{00}^{1/2}(\partial\omega_D) \right)^2 \quad \text{et son dual :} \quad \mathcal{M}'_1 = \left(H^{-1/2}(\partial\omega_D) \right)^2 \quad (1.10)$$

- pour la dualité :

$$\langle w, \mu_1 \rangle_1 = \int_{\partial\omega_D} w \mu_1 ds. \quad (1.11)$$

- \mathcal{M}_1 sera muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{\partial\omega_D} = \int_{\partial\omega_D} uv ds. \quad (1.12)$$

– \mathcal{M}_1 sera muni de la norme :

$$\|w\|_{\mathcal{M}_1} = \inf \left\{ \|v\|_V \quad : \quad v \in H_p^1(\Omega) \quad \gamma_D(v) = w \right\}. \quad (1.13)$$

– \mathcal{M}'_1 sera muni de la norme :

$$\|\mu_1\|_{\mathcal{M}'_1} = \sup_{w \in \mathcal{M}_1} \frac{\langle w, \mu_1 \rangle_1}{\|w\|_{\mathcal{M}_1}}. \quad (1.14)$$

• Sur la partie $\partial\omega_F$ de la frontière de ω , on définit :

$$\mathcal{M}_2 = \left(H_{00}^{1/2}(\partial\omega_F) \right)^2 \quad \text{et son dual} \quad : \quad \mathcal{M}'_2 = \left(H^{-1/2}(\partial\omega_F) \right)^2 \quad (1.15)$$

– pour la dualité :

$$\langle \mu_2, g \rangle_2 = \int_{\partial\omega_F} \mu_2 g \, ds \quad (1.16)$$

– Le produit scalaire sur \mathcal{M}_2 , ainsi que les normes sur \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}'_2 seront définis de façon analogue à celles de \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}'_1 .

On peut montrer qu'alors, le problème de minimisation sous contraintes (P_m) est équivalent au problème de point-selle (P_s) suivant :

Problème 10 (Lagrangien) — *Le point $(u, \lambda_1, \lambda_2)$ de $V \times \mathcal{M}'_1 \times \mathcal{M}_2$ solution de (P_m) est un point-selle de L , c'est à dire qu'il vérifie :*

$$(P_L) \quad \min_{v \in V} \max_{\mu_1 \in \mathcal{M}'_1} \max_{\mu_2 \in \mathcal{M}_2} L(v, \mu_1, \mu_2). \quad (1.17)$$

1.2.3 Le Lagrangien augmenté

Afin d'obtenir une meilleure convergence vers la solution, et pour que l'opérateur entrant en jeu soit coercif, on combine les deux méthodes précédentes. On définit un **Lagrangien augmenté** à partir du précédent de la façon suivante :

$$L_r(v, \mu_1, \mu_2) = L(v, \mu_1, \mu_2) + \frac{r}{2} \|v - u_0\|_{\mathcal{M}_1}^2 \quad (1.18)$$

pour tout $v \in V$, $\mu_1 \in \mathcal{M}'_1$, $\mu_2 \in \mathcal{M}_2$.

où r est un réel strictement positif (il est équivalent au terme " $\frac{1}{\varepsilon}$ " de la pénalisation).

On peut montrer qu'alors le problème de point-selle (P_s) est équivalent au problème suivant pour tout r :

Problème 11 (Lagrangien augmenté) — *Le point $(u, \lambda_1, \lambda_2)$ de $V \times \mathcal{M}'_1 \times \mathcal{M}_2$ solution de (P_m) est un point-selle de L_r , c'est à dire qu'il vérifie :*

$$(P_r) \quad \min_{v \in V} \max_{\mu_1 \in \mathcal{M}'_1} \max_{\mu_2 \in \mathcal{M}_2} L_r(v, \mu_1, \mu_2) . \quad (1.19)$$

Remarques :

- Contrairement à la pénalisation, où la solution du problème "augmenté" converge vers celle du problème initial lorsque r tend vers l'infini, ici, les deux problèmes (lagrangien et lagrangien augmenté) ont la **même solution** en déplacement, et ceci pour tout r , réel strictement positif. Ceci nous permettra de choisir r pas trop grand afin de limiter les problèmes de conditionnement de l'opérateur.

- Le Lagrangien augmenté est un Lagrangien augmenté partiel : seule la première contrainte est concernée ("augmentée").

1.3 Ecriture du problème sous forme variationnelle

1.3.1 Recherche de point-selle

Afin de résoudre le problème de point-selle (P_r) , on caractérise $(u, \lambda_1, \lambda_2)$ comme point critique de L_r , c'est à dire que l'on recherche la solution $(u, \lambda_1, \lambda_2)$ en écrivant que, puisque le point $(u, \lambda_1, \lambda_2)$ solution de (P_m) est aussi un point-selle du lagrangien augmenté L_r , alors la dérivée de L_r en ce point est nulle.

Problème 12 (Point-selle) — *La dérivée de L_r au point $(u, \lambda_1, \lambda_2)$ solution de (P_m) est nulle, c'est à dire qu'elle vérifie :*

$$(P_N) \quad L'_r(u, \lambda_1, \lambda_2)(v, \mu_1, \mu_2) = 0 \quad \text{pour tout } v \in V, \mu_1 \in \mathcal{M}'_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_2. \quad (1.20)$$

Ce qui, en explicitant la dérivée de L_r , s'écrit encore :

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v) \, dx - \int_{\Omega} \tilde{f}v \, dx + r(u - u_0, v)_{\partial\omega_D} + \langle v, \lambda_1 \rangle_1 + \langle \lambda_2, \sigma(v).n \rangle_2 + \langle u - u_0, \mu_1 \rangle_1 + \langle \mu_2, \sigma(u).n - g \rangle_2 = 0 \quad (1.21)$$

pour tout $v \in V, \mu_1 \in \mathcal{M}'_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_2$.

ou encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v) \, dx + r(u, v)_{\partial\omega_D} + \langle v, \lambda_1 \rangle_1 + \langle \lambda_2, \sigma(v).n \rangle_2 = \int_{\Omega} \tilde{f}v \, dx + r(u_0, v)_{\partial\omega_D} \\ \quad \text{pour tout } v \text{ dans } V \\ \langle u, \mu_1 \rangle_1 = \langle u_0, \mu_1 \rangle_1 \quad \text{pour tout } \mu_1 \text{ dans } \mathcal{M}'_1 \\ \langle \mu_2, \sigma(u).n \rangle_2 = \langle \mu_2, g \rangle_2 \quad \text{pour tout } \mu_2 \text{ dans } \mathcal{M}_2 \end{array} \right. \quad (1.22)$$

donc, si l'on définit les opérateurs (linéaires ou bilinéaires) suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v) \, dx + r(u, v)_{\partial\omega_D} \\ b_1(v, \mu_1) = \langle v, \mu_1 \rangle_1 \\ b_2(v, \mu_2) = \langle \mu_2, \sigma(v) \cdot n \rangle_2 \\ h(v) = \int_{\Omega} \tilde{f}v \, dx + r(u_0, v)_{\partial\omega_D} \\ e_1(\mu_1) = \langle u_0, \mu_1 \rangle_1 \\ e_2(\mu_2) = \langle \mu_2, g \rangle_2 \end{array} \right. \quad (1.23)$$

Le problème (P_N) peut alors s'écrire :

Problème 13 Trouver $(u, \lambda_1, \lambda_2)$ dans $V \times \mathcal{M}'_1 \times \mathcal{M}_2$ tels que :

$$(P'_N) \quad \left\{ \begin{array}{lll} a(u, v) + b_1(v, \lambda_1) + b_2(v, \lambda_2) = h(v) & \forall v \in V \\ b_1(u, \mu_1) = e_1(\mu_1) & \forall \mu_1 \in \mathcal{M}'_1 \\ b_2(u, \mu_2) = e_2(\mu_2) & \forall \mu_2 \in \mathcal{M}_2 \end{array} \right. \quad (1.24)$$

Remarques :

- Pour résoudre le problème de minimisation sous contraintes (P_m) , la stratégie a été ici d'augmenter la taille du système en ajoutant de nouvelles inconnues (les multiplicateurs de Lagrange), et de nouvelles équations (les contraintes que l'on impose sur le minimum de ϕ).

- Si, lorsque l'on projette toutes ces équations dans une base, les matrices issues des opérateurs a , b_1 et b_2 s'écrivent respectivement A , E_1 et E_2 , que les vecteurs issus des fonctionnelles h , e_1 et e_2 s'écrivent H , E_1 et E_2 , alors le système linéaire à résoudre est de la forme :

$$\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ B_1^t & 0 & 0 \\ B_2^t & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

où U, Λ_1, Λ_2 sont les projections des solutions $(u, \lambda_1, \lambda_2)$ du problème (P'_N) , B_1^t et B_2^t sont les transposés de B_1 et de B_2 .

Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, il existe des techniques spécifiques de résolution de ce type de système linéaire (l'algorithme d'Uzawa par exemple).

Il reste encore à montrer que le problème (P'_N) admet une solution unique pour affirmer qu'il est équivalent à celui du départ (P_ω) . Ce sera l'objet du paragraphe suivant.

1.3.2 Unicité de la solution

On va s'intéresser dans ce paragraphe à l'unicité de la solution du problème d'élasticité sur le domaine Ω posé sous sa dernière forme. Pour cela, on introduit le théorème suivant [65]:

Théorème 10 (Brezzi) *Soient V et \mathcal{M} deux espaces d'Hilbert, soient $f \in V'$, $g \in \mathcal{M}'$ deux formes linéaires continues sur V et \mathcal{M} , et le problème (P_B) :*

Trouver $(u, \lambda) \in V \times \mathcal{M}$ tels que :

$$(P_B) \quad \begin{cases} a(u, v) + b(v, \lambda) = h(v) & \forall v \in V \\ b(u, \mu) = e(\mu) & \forall \mu \in \mathcal{M} \end{cases} \quad (1.26)$$

Si a et b sont deux formes bilinéaires (a sur $V \times V$, b sur $V \times \mathcal{M}$) telles que :

(i) Continuité : Il existe deux constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que :

$$a(u, v) \leq c_1 \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall (u, v) \in V \times V ; \quad (1.27)$$

$$b(v, \mu) \leq c_2 \|v\|_V \|\mu\|_{\mathcal{M}} \quad \forall (v, \mu) \in V \times \mathcal{M} . \quad (1.28)$$

(ii) K-ellipticité de a : Il existe une constante c strictement positive telle que :

$$a(v, v) \geq c \|v\|_V^2 \quad \forall v \in K \quad (1.29)$$

avec : $K = \{v \in V : b(v, \mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{M}\}$.

(iii) **Condition de Babuska–Brezzi** : Il existe une constante β strictement positive telle que :

$$\sup_{v \in V} \frac{|b(v, \mu)|}{\|v\|_V} \geq \beta \|\mu\|_{\mathcal{M}} \quad \forall \mu \in \mathcal{M}, \quad (1.30)$$

alors le problème (P_B) admet une solution unique (u, λ) dans l'espace $V \times \mathcal{M}$.

– Le problème (P'_N) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} a(u, v) + b_1(v, \lambda_1) + b_2(v, \lambda_2) = h(v) & \forall v \in V \\ b_1(u, \mu_1) + b_2(u, \mu_2) = e_1(\mu_1) + e_2(\mu_2) & \forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{M} = \mathcal{M}'_1 \times \mathcal{M}_2. \end{cases} \quad (1.31)$$

– On définit :

$$\begin{aligned} b(v, (\mu_1, \mu_2)) : \quad V \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, (\mu_1, \mu_2)) &\longmapsto b_1(v, \mu_1) + b_2(v, \mu_2); \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} e(\mu_1, \mu_2) : \quad \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mu_1, \mu_2) &\longmapsto e_1(\mu_1) + e_2(\mu_2), \end{aligned} \quad (1.33)$$

et le problème a une forme analogue à celle du théorème de Brezzi. Montrons alors l'unicité de la solution de ce problème.

(i) *Continuité* :

Il est clair que les formes bilinéaires a et b sont continues sur leurs espaces de définition.

(ii) *K-ellipticité* :

L'espace K étant l'ensemble des champs cinématiquement admissibles et vérifiant les conditions aux limites sur $\partial\omega$, comme le corps est bloqué sur $\partial\omega_D$ qui est de mesure non nulle (il n'y a donc pas de mouvement rigide possible), la forme bilinéaire est K-elliptique (ce résultat classique est une application du théorème de Korn).

(iii) *Condition de Babuska–Brezzi :*

• Montrons la condition pour b_1 , c'est-à-dire qu'il existe une constante β strictement positive telle que :

$$\sup_{v \in V} \frac{|\langle \gamma_D(v), \mu_1 \rangle_1|}{\|v\|_V} \geq \beta \|\mu_1\|_{\mathcal{M}'_1} \quad \forall \mu_1 \in \mathcal{M}'_1 \quad (1.34)$$

Soit $w \in \mathcal{M}_1$, par définition de la norme sur \mathcal{M}_1 , il existe $\beta' > 0$ ($\beta' = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$) et $v \in V$ tel que :

$$\begin{aligned} \gamma_D(v) &= w \\ \|v\|_V &\leq \beta' \|w\|_{\mathcal{M}_1} \end{aligned}$$

donc

$$\frac{|\langle w, \mu_1 \rangle_1|}{\|w\|_{\mathcal{M}_1}} \leq \beta' \frac{|\langle \gamma_D(v), \mu_1 \rangle_1|}{\|v\|_V} \leq \beta' \sup_{v \in V} \frac{|\langle \gamma_D(v), \mu_1 \rangle_1|}{\|v\|_V}$$

et donc :

$$\|\mu_1\|_{\mathcal{M}'_1} = \sup_{w \in \mathcal{M}_1} \frac{|\langle w, \mu_1 \rangle_1|}{\|w\|_{\mathcal{M}_1}} \leq \beta' \sup_{v \in V} \frac{|\langle \gamma_D(v), \mu_1 \rangle_1|}{\|v\|_V},$$

d'où le résultat (en prenant $\beta = \frac{1}{\beta'}$).

• Montrons la condition pour b_2 , c'est-à-dire qu'il existe une constante β strictement positive telle que :

$$\sup_{v \in V} \frac{|\langle \mu_2, \sigma(v).n \rangle_2|}{\|v\|_V} \geq \beta \|\mu_2\|_{\mathcal{M}_2} \quad \forall \mu_2 \in \mathcal{M}_2. \quad (1.35)$$

Soit $\mu_2 \in \mathcal{M}_2$, appelons $\tilde{\mu}_2$ un relèvement de μ_2 sur ω ($\tilde{\mu}_2 \in H^1(\omega)$), alors la formule de Green sur ω donne :

$$\langle \mu_2, \sigma(v).n \rangle_2 = \int_{\omega} \sigma(v) \epsilon(\tilde{\mu}_2) dx - \int_{\omega} \operatorname{div} \sigma(v) \tilde{\mu}_2 dx.$$

Soit $v \in V$ tel que :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(v) = 0 & \text{dans } \omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\omega_D \\ v = \mu_2 & \text{sur } \partial\omega_F \\ \sigma(v) = \mathbb{K}e(v) & \text{(loi de comportement)} \end{cases}$$

alors on peut prendre $\tilde{\mu}_2 = v$ dans la formule de Green, et on obtient :

$$\langle \mu_2, \sigma(v).n \rangle_2 = \int_{\omega} \sigma(v)e(v) dx \geq c_1 \|v\|_{(H^1(\omega))^2}^2$$

avec c_1 strictement positif (Inégalité de Korn car $|\partial\omega_D| \geq 0$).

En utilisant le même procédé sur $\Omega - \omega$, on montre qu'il existe une constante c_2 strictement positive telle que :

$$\langle \mu_2, \sigma(v).n \rangle_2 \geq c_2 \|v\|_{(H_p^1(\Omega-\omega))^2}^2$$

Donc soit $v \in V$ tel que :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(v) = 0 & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\omega_D \\ v = \mu_2 & \text{sur } \partial\omega_F \\ \sigma(v) = \mathbb{K}e(v) & \text{(loi de comportement)} \end{cases}$$

alors :

$$\langle \mu_2, \sigma(v).n \rangle_2 \geq \frac{1}{2} (c_1 \|v\|_{(H^1(\omega))^2}^2 + c_2 \|v\|_{(H_p^1(\Omega-\omega))^2}^2) \geq \beta \|v\|_V^2$$

On a donc pu exhiber un $v \in V$ tel que

$$\frac{b_2(v, \mu_2)}{\|v\|_V} \geq \beta \|v\|_V \geq \beta \|\mu_2\|_{\mathcal{M}_2}$$

(par définition de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_2}$). D'où :

$$\sup_{v \in V} \frac{b_2(v, \mu_2)}{\|v\|_V} \geq \beta \|\mu_2\|_{\mathcal{M}_2}$$

Enfin, comme $b(v, (\mu_1, \mu_2)) = b_1(v, \mu_1) + b_2(v, \mu_2)$, on en déduit immédiatement la condition de Babuska-Brezzi.

On a ainsi montré que le problème (P'_N) satisfait aux conditions du théorème de Brezzi et admet par conséquent une solution unique $(u, \lambda_1, \lambda_2)$ dans $V \times \mathcal{M}'_1 \times \mathcal{M}_2$.

1.4 Conclusion

La technique employée pour résoudre le problème linéaire initial posé sur un ouvert de forme quelconque consiste à l'écrire sur un domaine plus grand, sous sa forme "minimisation sous contraintes", puis à le ramener à la résolution d'un système linéaire. Cette technique n'est pas spécifique aux problèmes linéaires, et peut être employée pour des problèmes non-linéaires (problèmes avec conditions aux limites de type contact, voire contact et frottement), elle est par conséquent un peu lourde pour résoudre un simple problème linéaire. Une autre technique plus efficace serait peut être d'utiliser la méthode de viscosité de H. Attouch qui a été utilisée dans les parties précédentes pour imposer à la moyenne de la solution d'être nulle. Il faudrait alors trouver le terme à ajouter pour obtenir la solution qui satisfasse aux conditions aux limites imposées, chose qui n'est pas encore faite à ce jour.

Une autre difficulté est le calcul, lors de la discrétisation à l'aide d'une base d'ondelettes, des intégrales sur la frontière du domaine intérieur. Il faudra développer une théorie de la mesure afin de déterminer les coefficients d'ondelettes de la projection dans la base d'ondelettes de l'élément de mesure linéique. Ceci sera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Méthode de Galerkin–ondelettes pour l'élasticité linéarisée

2.1 Introduction

Nous avons présenté dans le chapitre précédent les résultats théoriques nous permettant de s'assurer de la convergence de la méthode que l'on souhaite utiliser (domaine fictif et Lagrangien augmenté) sur des problèmes d'élasticité linéarisée avec conditions aux limites de type déplacement imposé et force imposée. Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à la mise en oeuvre de cette méthode en utilisant les ondelettes. Nous verrons tout d'abord que cette méthode nécessite la connaissance des coefficients d'ondelettes sur le bord $\partial\omega$ du domaine sur lequel est posé le problème initial, et nous étudierons comment les calculer. Ensuite, à l'aide de ces résultats, nous pourrions déterminer la projection des différents opérateurs définis dans le chapitre précédent. Dans une seconde partie, nous nous intéressons aux résultats numériques obtenus par cette méthode. Nous calculerons tout d'abord la longueur de différents périmètres afin de valider le calcul de la projection de la mesure linéique sur le bord du domaine intérieur, et nous comparerons nos résultats avec ceux obtenus par une autre équipe [83]. Enfin, nous traiterons deux problèmes d'élasticité linéarisée avec conditions aux limites, le premier où l'on connaîtra une solution analytique, ce qui nous permettra de pouvoir ajuster certains des nombreux paramètres qui entrent en jeu (niveaux d'approximation, taille du domaine fictif, valeur du paramètre d'augmentation du Lagrangien, ...), le second, plus réaliste, nous permettra de juger les capacités de l'algorithme.

2.2 La discrétisation

2.2.1 Calcul des coefficients d'ondelettes de la mesure surfacique

Si l'on souhaite résoudre un problème d'élasticité à l'aide de la transformée en ondelettes, les méthodes exposées dans le chapitre précédent (s'appuyant sur les techniques de domaine fictif et de lagrangien augmenté) nous amènent, pour imposer les conditions aux limites, à calculer des intégrales sur le bord du domaine intérieur (notée $\partial\omega$). Pour ce faire, on va calculer les coefficients d'ondelettes de la mesure linéique sur ce bord, ce qui nous permettra de calculer ces intégrales à l'aide de ces coefficients d'ondelettes et des intégrales entre les produits de trois ondelettes (ces intégrales ont déjà été utilisées dans les deux premières parties, et leurs calculs sont exposés dans l'annexe II).

a – Rappels sur la théorie de la mesure

Afin de calculer les coefficients d'ondelettes de la mesure linéique sur le bord du domaine intérieur, faisons tout d'abord quelques rappels sur la théorie de la mesure. Ces rappels s'inspirent de l'article de R. O. Wells et X. Zhou [83], ainsi que du mémoire de D.E.A. de M. Khalfaoui [76] (Pour plus de détails, se référer également à [74]).

On donne tout d'abord quelques définitions et propositions nous permettant de construire les coefficients d'ondelettes de la mesure linéique sur $\partial\omega$ à partir du gradient de la fonction caractéristique χ_ω de ω .

Définition 4 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et u une fonction Lebesgue-intégrable. Alors u est dite à variation bornée sur U si :

$$\sup_{g \in \mathcal{C}_0^1(U, \mathbb{R}^2); |g| \leq 1} \int_U u \operatorname{div} g \, dx dy < +\infty. \quad (2.1)$$

Supposons que u soit à variation bornée sur un ouvert $U \in \mathbb{R}^2$. Alors, grâce au théorème de représentation de Riesz, il existe une mesure de Radon, notée μ , et une fonction $\nu(x, y)$ mesurable telle que $|\nu(x, y)| = 1$ pour μ -presque tout (x, y) dans U , telle que pour tout g dans $\mathcal{C}_0^1(U, \mathbb{R}^2)$, on ait :

$$\int_U u \operatorname{div} g \, dx dy = \int_U g \mu \, dx dy.$$

En effet, pour tout g à support compact dans U :

$$\begin{aligned} \int_U u \operatorname{div} g \, dx dy &= - \int_U \nabla u \cdot g \, dx dy \quad (\text{car } g \text{ est à support compact dans } U) \\ &= - \int_U g \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla u \\ &= \int_U g \nu \, d\mu, \end{aligned}$$

où $\mu = |\nabla u|$ est la mesure de Radon, et $\nu = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ (∇u désigne le gradient de u : $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)^t$).

Définition 5 Soit ω un domaine de \mathbb{R}^2 et U un ouvert de \mathbb{R}^2 , on dit que ω est à périmètre fini sur U si la fonction caractéristique χ_ω est à variation bornée sur U . En particulier, on dit que ω est à périmètre fini si χ_ω est à variation bornée sur \mathbb{R}^2 .

On a alors la proposition suivante :

Proposition 11 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 . Si ω est à périmètre fini sur U , alors :

$$\int_U |\nabla \chi_\omega| = \sup_{g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^2); |g| \leq 1} \int_\omega \operatorname{div} g \, dx dy. \quad (2.2)$$

En particulier, si $\partial\omega$ est régulier, on a :

$$\int_U |\nabla \chi_\omega| = L(\partial\omega \cap U), \quad (2.3)$$

où $L(\partial\omega \cap U)$ désigne la longueur de $\partial\omega \cap U$.

Preuve : voir [76], [83].

Supposons maintenant que le domaine intérieur ω soit défini de la façon suivante :

$$\omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad F(x, y) \leq 0\}, \quad (2.4)$$

où F est une fonction lipschitzienne. La frontière de ω sera alors donnée par :

$$\partial\omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad F(x, y) = 0\} ,$$

le vecteur normal unitaire n sur le bord de ω est défini par :

$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}. \quad (2.5)$$

Si on prolonge la normale n (définie sur $\partial\omega$) à \mathbb{R}^2 par un élément de $C_0^1(\mathbb{R}^2)$, on peut montrer [76], [83] que l'on a alors :

$$L(\partial\omega) = - \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \chi_\omega \cdot n \, dx dy .$$

Plus généralement, pour toute fonction f intégrable définie sur $\partial\omega$, après un prolongement régulier de f à \mathbb{R}^2 , on a :

$$\int_{\partial\omega} f \, ds = - \int_{\mathbb{R}^2} f \, \|\partial\omega\|, \quad (2.6)$$

où $\|\partial\omega\|$ est la mesure définie par :

$$\|\partial\omega\| = -\nabla \chi_\omega \cdot n . \quad (2.7)$$

b – Application : calcul des coefficients d'ondelettes de la mesure linéique

Les coefficients d'ondelettes de la mesure linéique sur le bord $\partial\omega$ vont être calculés à partir de la formule (2.7). Comme on peut le voir, ce calcul repose sur la connaissance des coefficients d'ondelettes des fonctions χ_ω (pour calculer $\nabla \chi_\omega$), et F (pour calculer n).

Une autre idée de ce calcul est d'écrire que, si l'on choisit un niveau d'approximation ι suffisamment élevé, et une fonction d'échelle ϕ telle que l'ondelette associée ait un nombre suffisant de moments nuls, alors la valeur du coefficient d'ondelettes $f_{\iota k}$ d'une fonction f (dans $H_p^1(0, 1)$) peut être raisonnablement approchée par (voir formule (1.33), Partie 1)) :

$$f_{i,k} = \langle f, \phi_{i,k} \rangle \simeq \frac{1}{2^{i/2}} f\left(\frac{k+c}{2^i}\right) \quad (2.8)$$

où c est défini par : $c = \int_{\mathbb{R}} x \varphi(x) dx$ (φ étant l'ondelette de $L^2(\mathbb{R})$ à partir de laquelle est construite ϕ). Cette formule se généralise à $(H_p^1(\Omega))^2$.

Appelons $\{\Theta_{\underline{k}}^i; i \in \mathbb{N}, \underline{k} \in \Lambda_i\}$ la base de $H_p^1(\Omega)$ que l'on utilise pour discrétiser les fonctions F et χ_ω , alors, à l'aide de la remarque précédente, on peut décomposer F et χ_ω de la façon suivante :

$$\chi_\omega(x, y) \simeq \sum_{\underline{k} \in \Lambda_i} \chi_{\underline{k}}^i \Theta_{\underline{k}}^i(x, y) \quad ; \quad F(x, y) \simeq \sum_{\underline{k} \in \Lambda_i} F_{\underline{k}}^i \Theta_{\underline{k}}^i(x, y), \quad (2.9)$$

où :

$$\chi_{\underline{k}}^i \simeq \frac{1}{2^i} \chi_\omega\left(\frac{k_1+c}{2^i}, \frac{k_2+c}{2^i}\right) \quad ; \quad F_{\underline{k}}^i \simeq \frac{1}{2^i} F\left(\frac{k_1+c}{2^i}, \frac{k_2+c}{2^i}\right). \quad (2.10)$$

On calcule ensuite le gradient de ces fonctions à l'aide des produits scalaires entre une ondelette et sa dérivée. En d'autres termes, on a :

$$\frac{\partial \chi_\omega}{\partial x}(x, y) \simeq \sum_{\underline{k} \in \Lambda_i} \left(\frac{\partial \chi_\omega}{\partial x}\right)_{\underline{k}}^i \Theta_{\underline{k}}^i(x, y) \quad ; \quad \frac{\partial \chi_\omega}{\partial y}(x, y) \simeq \sum_{\underline{k} \in \Lambda_i} \left(\frac{\partial \chi_\omega}{\partial y}\right)_{\underline{k}}^i \Theta_{\underline{k}}^i(x, y), \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \simeq \sum_{\underline{k} \in \Lambda_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\underline{k}}^i \Theta_{\underline{k}}^i(x, y) \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \simeq \sum_{\underline{k} \in \Lambda_i} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\underline{k}}^i \Theta_{\underline{k}}^i(x, y), \quad (2.12)$$

où :

$$\left(\frac{\partial \chi_\omega}{\partial x}\right)_{\underline{k}}^i = \sum_{\ell=0}^{2^i-1} \chi_{(\ell, k_2)}^i r_{k_1-\ell}^{1i} \quad ; \quad \left(\frac{\partial \chi_\omega}{\partial y}\right)_{\underline{k}}^i = \sum_{\ell=0}^{2^i-1} \chi_{(k_1, \ell)}^i r_{k_2-\ell}^{1i}, \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\underline{k}}^i = \sum_{\ell=0}^{2^i-1} F_{(\ell, k_2)}^i r_{k_1-\ell}^{1i} \quad ; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\underline{k}}^i = \sum_{\ell=0}^{2^i-1} F_{(k_1, \ell)}^i r_{k_2-\ell}^{1i}. \quad (2.14)$$

On approche ensuite les coefficients d'ondelettes des composantes de la normale ($n_{\underline{k}x}^\iota$ et $n_{\underline{k}y}^\iota$) à l'aide de leurs définitions :

$$n_x(x, y) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\right)^2}} \quad ; \quad n_y(x, y) = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\right)^2}}, \quad (2.15)$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$n_{\underline{k}x}^\iota = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\underline{k}}^\iota}{\sqrt{\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\underline{k}}^\iota\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\underline{k}}^\iota\right)^2}} \quad ; \quad n_{\underline{k}y}^\iota = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\underline{k}}^\iota}{\sqrt{\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\underline{k}}^\iota\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\underline{k}}^\iota\right)^2}}. \quad (2.16)$$

On peut montrer qu'alors [83], si F est deux fois différentiable, la suite $(n^\iota)_\iota = (n_x^\iota, n_y^\iota)_\iota$, définie par :

$$n_x^\iota = \sum_{\underline{k} \in \Lambda_\iota} n_{\underline{k}x}^\iota \Theta_{\underline{k}}^\iota(x, y) \quad ; \quad n_y^\iota = \sum_{\underline{k} \in \Lambda_\iota} n_{\underline{k}y}^\iota \Theta_{\underline{k}}^\iota(x, y) \quad (2.17)$$

converge dans $H_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ lorsque ι tends vers l'infini.

Par conséquent, on peut approximer la mesure linéique $\|\partial\omega\|$ à l'aide d'une base d'ondelettes à un niveau d'approximation ι par :

$$\|\partial\omega\|^\iota \simeq \sum_{\underline{k} \in \Lambda_\iota} \mu_{\underline{k}}^\iota \Theta_{\underline{k}}^\iota(x) \quad (2.18)$$

où :

$$\mu_{\underline{k}}^\iota = -\frac{\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_{\underline{k}}^\iota \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\underline{k}}^\iota + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)_{\underline{k}}^\iota \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\underline{k}}^\iota}{\sqrt{\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\underline{k}}^\iota\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\underline{k}}^\iota\right)^2}}. \quad (2.19)$$

Donc, si l'on considère une fonction f définie sur $\partial\omega$ à valeurs dans \mathbb{R} , on peut approcher l'intégrale de f sur $\partial\omega$ par :

$$\int_{\partial\omega} f \, ds \simeq \sum_{\underline{k} \in \Lambda_\iota} f_{\underline{k}}^\iota \mu_{\underline{k}}^\iota \quad (2.20)$$

où $f_{\underline{k}}^\iota$ est la projection de f dans un espace d'approximation à un niveau ι . On peut montrer [83], que lorsque ι tend vers l'infini, la seconde partie de l'égalité converge vers la première.

Remarque :

Dans la pratique, vu le nombre important d'approximations qui sont faites, le niveau d'approximation ι à choisir si l'on souhaite obtenir une bonne approximation doit être relativement élevé.

2.2.2 La matrice d'élasticité

Rappelons que dans ce chapitre, nous désirons résoudre un problème d'élasticité avec conditions aux limites de type Dirichlet (voir Partie 1):

Problème 14 — Soit f et u_0 donnés, trouver u tel que :

$$(P_\omega) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\mathbb{K}\epsilon(u)) + f = 0 & \text{dans } \omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad (2.21)$$

Pour cela, on va utiliser la méthode des domaines fictifs consistant à “plonger” ω dans un carré Ω de taille plus grande, et à imposer les conditions aux limites sur $\partial\omega$ par la technique du Lagrangien augmenté.

Comme ici, la frontière $\partial\omega$ est considérée sur sa totalité (on ne la divise plus en deux parties $\partial\omega_D$ et $\partial\omega_F$), on est amené à définir :

$$\gamma_{\partial\omega} \quad : \quad \text{application trace de } \left(H^1(\omega)\right)^2 \text{ sur } \left(H^{1/2}(\partial\omega)\right)^2 ;$$

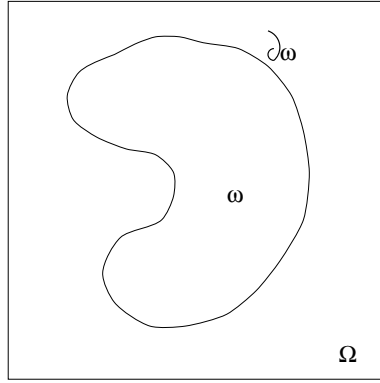


Figure 2.1 : Problème d'élasticité avec conditions de Dirichlet sur $\partial\omega$

ainsi que les espaces vectoriels :

$$\mathcal{M} = \left(H^{1/2}(\partial\omega) \right)^2 = \left(\gamma_{\partial\omega}(H^1(\omega)) \right)^2 \quad \text{et son dual :} \quad \mathcal{M}' = \left(H^{-1/2}(\partial\omega) \right)^2 \quad (2.22)$$

– pour la dualité :

$$\langle u, \lambda \rangle_{\partial\omega} = \int_{\partial\omega} u \lambda \, ds \quad (2.23)$$

– \mathcal{M} sera muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{\partial\omega} = \int_{\partial\omega} uv \, ds. \quad (2.24)$$

La méthode décrite précédemment revient alors à remplacer le problème initial par le suivant (que l'on écrit sous forme variationnelle) :

Problème 15 — Soit f , u_0 et donnés, trouver $(u, \lambda) \in V \times \mathcal{M}'$ tel que :

$$(PV_{\Omega}) \quad \begin{cases} a_r(u, v) + \langle v, \lambda \rangle_{\partial\omega} = r(u_0, v)_{\partial\omega} + \int_{\Omega} \tilde{f} v \, dxdy & \forall v \in V \\ \langle \gamma, u \rangle_{\partial\omega} = \langle \gamma, u_0 \rangle_{\partial\omega} & \forall \gamma \in \mathcal{M}' \end{cases} \quad (2.25)$$

où $a_r(u, v) = \int_{\Omega} (\mathbb{K}e(u)) : e(v) \, dxdy + r(u, v)_{\partial\omega}$, et \tilde{f} et la prolongée de f (définie dans ω) sur Ω .

Lors de la discrétisation, le système linéaire peut se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_r & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_r \\ U_o \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Nous nous intéressons dans ce paragraphe au calcul de la matrice, donc au calcul des sous-matrices \mathcal{A}_r et \mathcal{B} .

a – Calcul de la matrice \mathcal{A}_r

Cette matrice provient de la discrétisation de l'opérateur :

$$a_r(u, v) = \int_{\Omega} (\mathbb{K}\epsilon(u)) : \epsilon(v) \, dx dy + r(u, v)_{\partial\omega} \quad (2.27)$$

où la matrice de rigidité sera constante sur Ω . La première partie de la somme sera calculée comme dans les parties 1 et 2 (à l'aide des produits scalaires entre les dérivées deux ondelettes).

Appelons tout d'abord $\{\Psi_{\underline{k}}^j; j \in \mathbb{N}, \underline{k} \in \Lambda_j\}$ l'ondelette de $H_p^1(\Omega)$ que l'on utilise pour mettre en oeuvre la méthode de Galerkin, et définissons le sous-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$L_j = \left\{ \underline{\ell} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad : \quad \text{Support}(\Phi_{j\underline{\ell}}) \cap \partial\omega \neq \emptyset \right\} \quad (2.28)$$

alors, on a, de façon évidente, la proposition suivante :

Proposition 12 *La projection, dans une base d'ondelettes, de l'opérateur " $r(u, v)_{\partial\omega}$ " provenant de la mise en oeuvre de la méthode du Lagrangien augmenté est une matrice $I^{\partial\omega}$ de dimension $N_j \times N_j$ ($N_j = 2^{2j+1}$), avec :*

$$\left[I_{(i_1, i_2)(\ell_1, \ell_2)}^{\partial\omega} \right] = \left[\mathcal{I}_{\underline{i}\underline{\ell}}^{\partial\omega} \right]_{\underline{i}, \underline{\ell} \in \Lambda_j} \quad (2.29)$$

où $\mathcal{I}_{\underline{i}\underline{\ell}}^{\partial\omega}$ est la matrice "élémentaire" 2×2 :

$$\mathcal{I}_{\underline{i}\underline{\ell}}^{\partial\omega} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{\underline{i}\underline{\ell}}^j & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{\underline{i}\underline{\ell}}^j \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

où

$$\mathcal{I}_{\underline{i}\underline{\ell}}^j = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{i} \notin L_j \text{ ou } \underline{\ell} \notin L_j; \\ \int_{\partial\omega} \Psi_{\underline{i}}^j \Psi_{\underline{\ell}}^j ds = \int_{\Omega} \Psi_{\underline{i}}^j \Psi_{\underline{\ell}}^j \|\partial\omega\| & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.31)$$

Remarque :

Dans la pratique, on calcule les intégrales $\mathcal{I}_{\underline{i}\underline{\ell}}^{\partial\omega}$ à l'aide des coefficients d'ondelettes de la mesure linéique $\|\partial\omega\|$ et les intégrales des produits de trois ondelettes :

$$\mathcal{I}_{\underline{i}\underline{\ell}}^j \simeq \sum_{\underline{k} \in L_j} \mu_{\underline{k}}^i \int_{\Omega} \Theta_{\underline{k}}^i \Psi_{\underline{i}}^j \Psi_{\underline{\ell}}^j dx dy . \quad (2.32)$$

b – Calcul de la matrice \mathcal{B}

Le calcul de la matrice \mathcal{B} se fait de façon analogue à celui de la matrice $I^{\partial\omega}$.

Si l'on note $\{\xi_{J\underline{\ell}} ; J \in \mathbf{N}, \underline{\ell} \in \Lambda\}$ l'ondelette définie sur Ω telle que sa trace sur $\partial\omega$ engendre $H^{-1/2}(\partial\omega)$ que l'on utilise pour la discrétisation du multiplicateur λ , et L_J^λ le sous-ensemble de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$:

$$L_J^\lambda = \{\underline{\ell} \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : \text{support}(\xi_{J\underline{\ell}}) \cap \partial\omega \neq \emptyset\} , \quad N_J^\lambda = \text{card}(L_J^\lambda) \quad (2.33)$$

alors on a, de façon évidente, la proposition :

Proposition 13 *La projection, à l'aide d'une base d'ondelettes, de l'opérateur b_1 (notation du chapitre 1) issu de la mise en oeuvre de la méthode du Lagrangien augmenté est une matrice \mathcal{B} de dimension $N_j \times N_j^\lambda$ avec :*

$$\left[\mathcal{B}_{(i_1, i_2)(\ell_1, \ell_2)}^{\partial\omega} \right] = \left[\mathcal{B}_{\underline{i}\underline{\ell}}^{\partial\omega} \right]_{\substack{\underline{i} \in \Lambda_j \\ \underline{\ell} \in L_j^\lambda}} \quad (2.34)$$

où $\mathcal{B}_{\underline{i}\underline{\ell}}^{\partial\omega}$ est la matrice "élémentaire" 2×2 :

$$\mathbb{B}_{\underline{i}\underline{\ell}}^{\partial\omega} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{\underline{i}\underline{\ell}}^{j,j} & 0 \\ 0 & \mathbb{B}_{\underline{i}\underline{\ell}}^{j,j} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

où

$$\mathbb{B}_{\underline{i}\underline{\ell}}^{j,j} = \int_{\partial\omega} \Psi_{\underline{i}}^j \Psi_{\underline{\ell}}^j ds = \int_{\Omega} \Psi_{\underline{i}}^j \Psi_{\underline{\ell}}^j \|\partial\omega\|. \quad (2.36)$$

Remarque :

Dans la pratique, on calcule les intégrales $\mathbb{B}_{\underline{i}\underline{\ell}}^{j,j}$ à l'aide des coefficients d'ondelettes de la mesure linéique $\|\partial\omega\|$ et intégrales des produits de trois ondelettes :

$$\mathbb{B}_{\underline{i}\underline{\ell}}^{j,j} \simeq \sum_{\underline{k} \in L_j} \mu_{\underline{k}}^i \int_{\Omega} \Theta_{\underline{k}}^i \Psi_{\underline{i}}^j \xi_{\underline{\ell}}^j dx dy . \quad (2.37)$$

2.2.3 Le second membre

Le calcul du second membre utilise les mêmes techniques que le calcul des matrices. En effet, la projection de la densité de force surfacique f dans l'espace d'approximation intervenant dans la mise en oeuvre de la méthode de Galerkin est un simple produit scalaire entre f et l'ondelette (ou la fonction d'échelle). Ce calcul a été exposé dans la partie 1 (formule (1.33)). Les deux autres termes se calculent à l'aide des coefficients d'ondelettes de la mesure de frontière $\|\partial\omega\|$.

a – Calcul du vecteur F_r

Comme nous l'avons déjà signalé, le terme provenant de la prise en compte de la force volumique se fait par une simple projection de celle-ci dans l'espace d'approximation.

Le terme “ $r(u_0, v)_{\partial\omega}$ ” provenant de l'augmentation du Lagrangien se calcule à l'aide des coefficients d'ondelettes de la mesure de frontière $\|\partial\omega\|$. En effet, supposons que l'on soit en mesure de relever u_0 (défini sur $\partial\omega$) en une fonction \tilde{u}_0 définie sur Ω , alors, en décomposant \tilde{u}_0 dans la base d'ondelettes $\{\Psi_{\underline{\ell}}^j ; j \in \mathbb{N}, \underline{\ell} \in \Lambda\}$, on obtient la proposition suivante :

Proposition 14 *La projection, à l'aide d'une base d'ondelettes, de la fonctionnelle h (notation du chapitre 1) issu de la mise en oeuvre de la méthode du Lagrangien augmenté est un vecteur F^r de dimension N_j avec :*

$$\left[F^r_{(i_1, i_2)} \right] = \left[\mathcal{F}^r_{\underline{i}} \right]_{\underline{i} \in \Lambda_j} \quad (2.38)$$

où $\mathcal{F}^r_{\underline{i}}$ est le vecteur “élémentaire” (de dimension 2) :

$$\mathcal{F}^r_{\underline{i}} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}^j_{\underline{i}} \\ \mathcal{F}^j_{\underline{i}} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

où

$$\mathcal{F}^j_{\underline{i}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{i} \notin L_j \text{ ou } \underline{\ell} \notin L_j; \\ \sum_{\underline{k} \in \Lambda_j} u^j_{o\underline{k}} \int_{\partial\omega} \Psi^j_{\underline{i}} \Psi^j_{\underline{k}} ds = \sum_{\underline{k} \in \Lambda_j} u^j_{o\underline{k}} \int_{\Omega} \Psi^j_{\underline{i}} \Psi^j_{\underline{k}} \|\partial\omega\| & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.40)$$

b – Calcul du vecteur U_0

Le vecteur U_0 provenant du produit de dualité de u_0 avec le multiplicateur de Lagrange, est calculé à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 15 *La projection, à l'aide d'une base d'ondelettes, de la fonctionnelle e_1 (notation du chapitre 1) issu de la mise en oeuvre de la méthode du Lagrangien augmenté est un vecteur U^0 de dimension N_j^λ avec :*

$$\left[U^0_{(\ell_1, \ell_2)} \right] = \left[\mathcal{U}^0_{\underline{\ell}} \right]_{\underline{\ell} \in L_j^\lambda} \quad (2.41)$$

où $\mathcal{U}^0_{\underline{\ell}}$ est le vecteur “élémentaire” (de dimension 2) :

$$\mathcal{U}^0_{\underline{\ell}} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}^j_{\underline{\ell}, J} \\ \mathcal{U}^j_{\underline{\ell}, J} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

où

$$\mathcal{U}^j_{\underline{\ell}, J} = \sum_{\underline{k} \in \Lambda_j} u^j_{o\underline{k}} \int_{\partial\omega} \Psi^j_{\underline{k}} \xi^j_{\underline{\ell}} ds = \sum_{\underline{k} \in \Lambda_j} u^j_{o\underline{k}} \int_{\Omega} \Psi^j_{\underline{k}} \xi^j_{\underline{\ell}} \|\partial\omega\| . \quad (2.43)$$

2.3 Résolution numérique : la méthode d'Uzawa

L'algorithme d'Uzawa est un algorithme itératif de résolution des systèmes linéaires du type (2.26) [70]. Il consiste à trouver le déplacement (à l'aide d'une inversion d'un système linéaire) associé à un multiplicateur donné, puis à réactualiser le multiplicateur (à l'aide de multiplications matrice-vecteur) à partir du déplacement trouvé, et à réitérer le procédé tant que le résidu (sur u^k , sur λ^k ou sur l'ensemble des deux) est supérieur à un seuil ε choisi. Dans le cas de notre exemple, on peut résumer cet algorithme par le schéma suivant :

$$(1) \gamma^0 \in \mathbb{R}^{\lambda_j} \text{ donné ;}$$

(2) Etape de minimisation sur v , qui revient à résoudre ($k \geq 1$) :

trouver $u^k (\in \mathbb{R}^{N_j})$ tel que :

$$A_r u^k = F_r - B \gamma^k ;$$

(3) Actualisation du multiplicateur :

$$\gamma^{k+1} = \gamma^k + \rho_k (B u^k - U_0) ;$$

(4) Si $\|u^{k+1} - u^k\|_{\ell^2(\mathbb{R}^{N_j})} \geq \varepsilon$, retourner à l'étape (2).

Remarques :

- Il existe des algorithmes ("à pas variable") consistant à choisir, pour chaque $k \geq 1$, une valeur optimale pour ρ_k . Dans notre cas, nous prendrons ρ_k constant pour tout le processus itératif.

- L'inversion du système linéaire à réaliser à chaque itération de la méthode d'Uzawa est fait grâce à la méthode du gradient conjugué que l'on initialisera à chaque pas avec la solution du pas précédent.

2.4 Exemples numériques

Nous allons étudier dans ce paragraphe, les résultats obtenus lorsque l'on utilise la transformée en ondelettes pour traiter des problèmes d'élasticité linéarisée. Tout d'abord, afin d'évaluer la qualité du calcul des coefficients d'ondelettes de la mesure linéique sur le bord du domaine intérieur (voir paragraphe 2.2.1.a de cette partie), nous présentons les résultats obtenus sur le calcul de périmètres. Ensuite, nous présenterons deux exemples de problèmes d'élasticité avec conditions aux limites de type Dirichlet, un exemple où la solution analytique peut être calculée, et un autre exemple où la condition de Dirichlet que l'on impose sur le bord est de type déplacement normal à la frontière.

a – Calcul de périmètres

Nous présentons ici, afin de valider le calcul des coefficients d'ondelettes de la mesure linéique sur le bord intérieur, les résultats que l'on a obtenus avec notre logiciel que l'on appellera *lagond* par la suite, lorsque l'on calcule la longueur du périmètre du domaine intérieur (voir formule 2.20 avec $f = 1$). On donne aussi les résultats de R.O. Wells et X. Zhou [83] sur des exemples identiques, obtenus par une méthode analogue.

1 – Influence du niveau d'approximation

Pour évaluer l'influence du niveau d'approximation (et donc du nombre de degrés de liberté) sur la qualité de la mesure du périmètre, nous avons choisi deux géométries. La première est un disque centrée (de centre $(0,5; 0,5)$) de rayon $R = 0,3$ (périmètre: 1,88495) dans un carré $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. L'ondelette choisie cette discrétisation est l'ondelette de Daubechies, à des niveaux d'approximation indiqués dans le tableau 2.2. On donne les résultats obtenus par Wells et Zhou [83] ainsi que les notres. Dans chaque cas, on donne l'erreur relative commise, définie par :

$$e = \frac{\ell^{ex} - \ell^{cal}}{\ell^{ex}},$$

où ℓ^{ex} (resp. ℓ^{cal}) est la longueur du périmètre exacte (resp. calculée).

Les résultats obtenus montre qu'il y a convergence et que le niveau d'approximation $\iota = 5$ donne des résultats déjà satisfaisants.

Niveau	Wells-Zhou	Erreur relative	Lagond	erreur relative
$\iota = 5$	1,86741	$9,3 \cdot 10^{-3}$	1,88479	$8,5 \cdot 10^{-5}$
$\iota = 6$	1,89049	$2,9 \cdot 10^{-3}$	1,88491	$1,8 \cdot 10^{-5}$
$\iota = 7$	1,88448	$2,5 \cdot 10^{-4}$	1,88498	$1,3 \cdot 10^{-5}$

Figure 2.2 : Calcul de longueur de périmètre (disque de rayon $R = 0,3$)

Voyons maintenant ce qu'il en est sur un domaine plus complexe. Pour cela, nous avons choisi de traiter le cas du losange, où il y a quatre points de non différentiabilité. Le domaine fictif est toujours le carré $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, et le losange est défini par :

$$|x - 0,5| + |y - 0,5| < 0,3.$$

Il s'agit donc d'un losange centré, de côté ($c = 0,3 \cdot \sqrt{2}$), qui a pour périmètre $\ell \simeq 1,69705$. On traite toujours cet exemple avec une ondelette de Daubechies d'ordre $M = 3$.

Niveau	Wells-Zhou	Erreur relative	Lagond	erreur relative
$\iota = 5$	1,72207	$1,7 \cdot 10^{-2}$	1,58257	$6,7 \cdot 10^{-2}$
$\iota = 6$	1,71796	$1,2 \cdot 10^{-2}$	1,66748	$1,7 \cdot 10^{-2}$
$\iota = 7$	1,70751	$6,2 \cdot 10^{-3}$	1,67567	$1,3 \cdot 10^{-2}$

Figure 2.3 : Calcul de longueur de périmètre (losange de diagonale $d = 0,3$)

Comme on pouvait s'y attendre, on observe que ces résultats sont nettement moins bons que les précédents (de l'ordre de 1000 fois moins bons, dans le cas où $\iota = 7$). La non différentiabilité du contour affecte donc fortement le calcul des coefficients d'ondelettes de la mesure linéique, et il sera donc plus difficile de traiter des problèmes où le bord du domaine possédera des irrégularités. En particulier, on devra choisir un ordre d'approximation supérieur.

2 – Influence de la taille du domaine intérieur

On sera amené, dans une seconde partie de notre étude, à s'intéresser à l'influence de la taille du domaine fictif par rapport à celle du domaine intérieur. Voyons tout d'abord ce qu'il en est de cette influence sur le calcul du périmètre d'un disque. Au lieu d'augmenter la taille du domaine fictif, nous allons diminuer la taille du domaine intérieur, ce qui revient

au même. On choisit toujours pour domaine fictif le carré $Y =]0, 1[\times]0, 1[$ et on évalue à l'aide de la transformée en ondelettes (toujours l'ondelette de Daubechies d'ordre $M = 3$ à un niveau d'approximation $\iota = 5$), la longueur du périmètre de disques de différents rayons.

Rayon du cercle	périmètre exact	Périmètre obtenu	erreur relative
$R = 0, 2$	1,25664	1,25705	$3,3 \cdot 10^{-4}$
$R = 0, 3$	1,88495	1,88479	$8,5 \cdot 10^{-5}$
$R = 0, 4$	2,51327	2,51346	$8,1 \cdot 10^{-5}$
$R = 0, 45$	2,82743	2,83013	$9,5 \cdot 10^{-4}$

Figure 2.4 : Calcul de longueur de périmètre (en fonction du rayon du disque)

On observe que pour un disque ayant un petit rayon ($R = 0, 2$), les résultats obtenus sont moins bons. Ceci s'explique par le choix de la fonction F que l'on utilise pour relever la normale (définie sur le bord du domaine intérieur) sur le domaine fictif. En effet, on a choisi :

$$F(x, y) = (x - 0, 5)^2 + (y - 0, 5)^2$$

ce qui entraîne que le relèvement de la normale présente une singularité au point $(x, y) = (0, 5; 0, 5)$. Donc, si le cercle est petit, et si le support de l'ondelette est trop grand, alors ce support peut intercepter à la fois le bord du domaine intérieur et son centre, perturbant par là-même le calcul des coefficients d'ondelettes de la mesure linéique sur le bord de ce domaine. Pour des cercles très petits, il est donc nécessaire d'augmenter le nombre de points d'approximation.

Ensuite, lorsque R augmente, la valeur est stable (autour de $8 \cdot 10^{-5}$) et dépend essentiellement du niveau d'approximation choisi (voir tableau 2.2). Enfin, lorsque le rayon devient suffisamment grand pour que le support de l'ondelette rencontre à la fois le bord des deux domaines (pour $R = 0.45$ par exemple) alors des perturbations entraînent un mauvais résultat au niveau du calcul des coefficients d'ondelettes de la mesure linéique. Un bon choix de la taille du domaine extérieur par rapport à celle du domaine intérieur se trouve donc dans le cas où les rapports entre les rayons sont compris entre 1,1 et 3,5.

b – Exemple analytique

Pour mettre en oeuvre la méthode exposée dans le chapitre précédent sur un problème d'élasticité réaliste, on choisit tout d'abord de traiter un exemple où l'on connaît la solution analytique. On considère pour cela un corps ω élastique composé d'aluminium ($\nu = 0,19$, $E = 72GPa$) dont on définira la géométrie par la suite. On suppose que ω est inclu dans le carré $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ qui sera choisi pour domaine fictif, et que, dans ω , le corps est soumis à la densité de force (surfactive) :

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y) = 4\pi^2 \left[\mathbb{K}_{11} + \mathbb{K}_{12} + 2 \mathbb{K}_{33} \right] \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \\ f_2(x, y) = 4\pi^2 \left[\mathbb{K}_{12} + \mathbb{K}_{22} + 2 \mathbb{K}_{33} \right] \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) \end{cases} \quad (2.44)$$

où $(x, y) \in \omega$.

qui peut être prolongée de façon évidente sur Ω . Sur $\partial\omega$, on suppose que la structure a un déplacement imposé par :

$$u_0(x, y) = \begin{cases} u_1^0(x, y) = \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \\ u_2^0(x, y) = \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) \end{cases} \quad (2.45)$$

où $(x, y) \in \partial\omega$.

et on montre simplement qu'alors, la structure a un déplacement défini par :

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) = \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \\ u_2(x, y) = \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) \end{cases} \quad (2.46)$$

où $(x, y) \in \omega$.

Pour traiter ce problème ainsi que le suivant, nous avons choisi de prendre pour les trois ondelettes nécessaires (une pour la discrétisation du déplacement, une pour le multiplicateur, une pour la discrétisation de la mesure linéique), l'ondelette de Daubechies d'ordre $M = 3$ à un niveau d'approximation, qui sera défini par la suite. Une étude reste donc à faire sur le choix optimal de ces diverses ondelettes, ainsi que sur le niveau d'approximation à choisir pour chaque des discrétisation.

1 – Influence de l'augmentation du Lagrangien

Le terme d'augmentation dans l'écriture du Lagrangien jouant le rôle d'un préconditionneur, voyons l'influence de ce terme sur la convergence de la méthode. Pour cela, on traite le cas où le domaine intérieur est un cercle de rayon $R = 0,25$ centré. On utilise toujours une ondelette de Daubechies d'ordre $M = 3$, à un niveau d'approximation $j = 5$ (2048 degrés de liberté) pour toutes les discrétisations, et on arrête les itérations de la méthode d'Uzawa dès que la norme du résidu devient inférieure à 10^{-4} . Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 2.5. On donne dans la première colonne la valeur de l'augmentation ; dans la seconde, le nombre d'itérations de la méthode d'Uzawa, et dans la quatrième, la somme du nombre d'itérations du gradient conjugué nécessaire à chaque itération (le test d'arrêt, choisi fixe au cours des itérations, sera pris égal à 10^{-3}). Enfin, dans la quatrième colonne, nous donnons l'erreur relative commise ϵ définie par :

$$\epsilon = \frac{\|u^{\epsilon x} - u^{cal}\|_{L^2}}{\|u^{\epsilon x}\|_{L^2}}$$

où les différentes intégrales sont calculés par la méthode des trapèzes.

Augmentation	Itérations d'Uzawa	Itérations du G.C.	erreur relative
10^4	10	132	2.10^{-2}
10^5	9	165	1.10^{-2}
10^6	16	136	1.10^{-3}

Figure 2.5 : Influence de l'augmentation du Lagrangien

Remarquons tout d'abord que la valeur de $r = 10^6$ (qui est approximativement 10 fois plus grande que le terme diagonal de la matrice \mathcal{K}) est la valeur maximale que l'on puisse prendre pour que le gradient conjugué converge au début du processus, car on n'utilise pas de préconditionneur. On observe ensuite que le fait d'augmenter le Lagrangien améliore bien la solution (l'erreur relative est divisée par 20 si l'on multiplie r par 100), sans ajouter un surcoût de calcul (le nombre d'itérations de la méthode d'Uzawa est analogue, ainsi que le nombre total d'itération du gradient conjugué).

2 – Influence du paramètre de descente

L'algorithme d'Uzawa contient un paramètre que l'on a noté ρ_k (que nous ne ferons pas dépendre ici de l'itération k) servant à réactualiser le multiplicateur à chaque itération. Ce paramètre influe à la fois sur le nombre d'itérations de la méthode d'Uzawa (si ρ croît, le nombre d'itération doit décroître), et sur le nombre total d'itérations du gradient conjugué (si ρ croît, le nombre d'itération du gradient conjugué croît également). Pour étudier ces phénomènes, on choisit de traiter l'exemple analytique dans le cas où le domaine ω est un cercle de rayon $R = 0,3$, de centre $(0,5; 0,5)$, avec un niveau d'approximation $j = 5$ (2048 degrés de liberté) avec une augmentation du Lagrangien égale à $r = 10^6$, et on fait varier le paramètre ρ de 10^3 à 5.10^4 . On donne les résultats ainsi obtenus dans le tableau 2.6 où l'on a mis dans la première colonne la valeur de ρ , dans la seconde le nombre d'itérations de la méthode d'Uzawa (que l'on arrête lorsque le résidu est inférieur à 10^{-4}), dans la troisième, le nombre total d'itérations du gradient conjugué ($\varepsilon_{GC} = 10^{-3}$), et enfin dans la dernière, l'erreur relative ϵ commise dans chaque cas.

Paramètre ρ	Itérations d'Uzawa	Itérations du G.C.	erreur relative
10^3	85	501	1.10^{-1}
5.10^3	52	418	7.10^{-2}
10^4	36	313	2.10^{-2}
5.10^4	29	152	5.10^{-3}

Figure 2.6 : Influence du paramètre de descente

On observe bien que le nombre d'itérations nécessaire pour avoir une bonne approximation augmente lorsque ρ diminue. En effet, lorsque $\rho = 10^3$, après 85 itérations de la méthode d'Uzawa (et 501 du gradient conjugué), l'erreur est encore de 10%, alors que pour $\rho = 5.10^4$, après 35 itérations de la méthode d'Uzawa (et 152 du gradient conjugué), l'erreur est déjà de 0,5 %. Remarquons également que pour une valeur de ρ supérieure à 5.10^4 , la méthode d'Uzawa diverge.

3 – Influence de la taille du domaine fictif

Une autre paramètre à gérer est la taille du domaine fictif par rapport au domaine intérieur sur lequel est posé le problème initial. En effet, si le domaine fictif est trop petit, alors des phénomènes d'interactions entre le bord du domaine intérieur et celui du domaine

fictif peuvent apparaître. D'un autre côté, si le domaine fictif est trop grand, alors le nombre de degrés de liberté nécessaire pour bien discrétiser les opérateurs agissant sur le domaine intérieur doit être élevé. Pour évaluer ce phénomène, nous avons choisi un domaine fictif fixe ($\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$) dans lequel le domaine intérieur sera de plus en plus petit (ce qui revient à prendre un domaine fictif de plus en plus grand autour d'un domaine intérieur fixe). Ce domaine intérieur est un disque centré (de centre $(0,5; 0,5)$) et de rayon R indiqué dans la première colonne du tableau 2.7, la seconde indiquant le nombre d'itérations de la méthode d'Uzawa nécessaire pour obtenir un résidu inférieur à 10^{-4} , et la troisième le nombre total d'itérations du gradient conjugué ($\varepsilon_{GC} = 10^{-3}$).

Rayon R	Itérations d'Uzawa	Itérations du G.C.	erreur relative
0,2	31	241	1.10^{-2}
0,3	29	152	5.10^{-3}
0,4	20	197	4.10^{-3}

Figure 2.7 : Influence de la taille du domaine fictif (2048 ddl)

On observe que si le domaine fictif est trop grand par rapport au domaine intérieur (si le rapport entre la surface du domaine fictif sur celle du domaine intérieur est supérieure à 5), on retrouve les résultats édictés précédemment, à savoir que si le disque est trop petit alors le support de l'ondelette analysante peut intercepter à la fois le bord du domaine intérieur et son centre où le relèvement de la normale présente une singularité, ce qui amène les erreurs que l'on peut constater. Au delà, les résultats s'améliorent lorsque le rayon R augmente. Le fait que l'on ne constate pas de problème pour un rayon grand provient de l'exemple que l'on a choisi, où la solution exacte ne dépend pas du choix du rayon du disque. Il n'en sera pas de même dans le cas contraire.

4 – Etude des déformées obtenues

On montre dans ce paragraphe la déformée obtenue sur tout le domaine Ω dans le cas où le rayon R du disque intérieur sur lequel est posé le problème initial est égal à 0,25. L'exemple est traité avec une ondelette de Daubechies d'ordre $M = 3$ à niveau d'approximation $j = 5$ (2048 ddl), avec une augmentation du Lagrangien égale à 10^6 . Dans la résolution par la méthode d'Uzawa, le paramètre ρ est pris égal à 5.10^4 et on arrête les itérations dès que le résidu devient inférieur à 10^{-4} (on rappelle que dans ce cas, l'erreur relative par rapport à la solution exacte est de l'ordre de 0,1%).

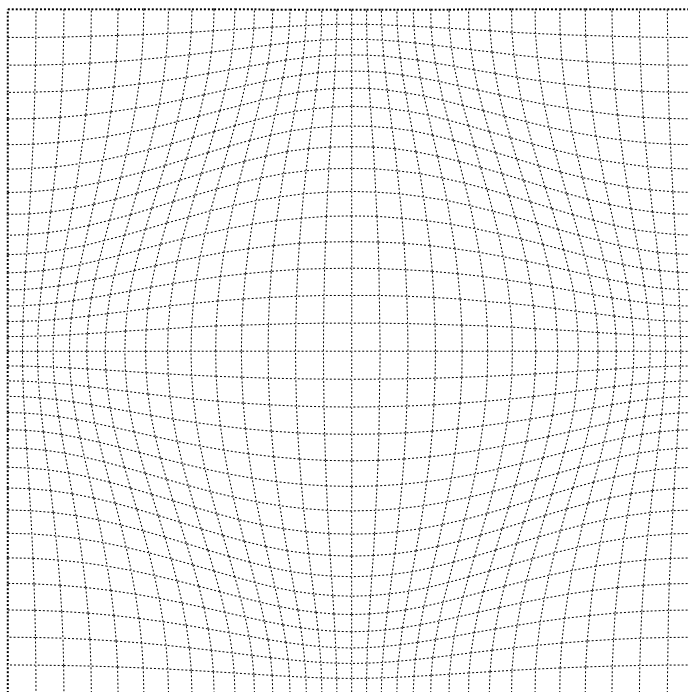


Figure 2.8 : Déformée obtenue dans le cas où $R = 0,25$ (2048 ddl)

On peut observer que l'influence de la prise en compte des conditions aux limites ne se voit pas sur une telle figure. Pour étudier cela de plus près, on trace sur la figure suivante une coupe du déplacement précédent ($u_1(x, y)$, $x \in]0, 1[$; $y = 0,5$) sur le domaine intérieur.

On observe également qu'ici, la solution exacte et la solution approchée sont très proche, même si au niveau des bords du domaine intérieur, on a une légère différence.

c – Exemple d'un déplacement normal imposé sur le bord

Le second exemple est le cas où le domaine intérieur ω sur lequel on pose le problème d'élasticité initial est un disque centré de centre $(0,5; 0,5)$, de rayon qui sera défini par la suite, sur le bord duquel on impose au déplacement d'être colinéaire à la normale. On impose de plus une force surfacique nulle à l'intérieur du domaine. En d'autres termes, on désire résoudre le problème d'élasticité :

$$(P_\omega) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbb{K}e(u)) = 0 & \text{dans } \omega \\ u = \alpha n & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

où n est la normale extérieure à ω , et α est une constante qui sera choisie égale à 0,1. On suppose de plus que le corps élastique est composée d'aluminium ($E = 72GPa$, $\nu = 0,19$).

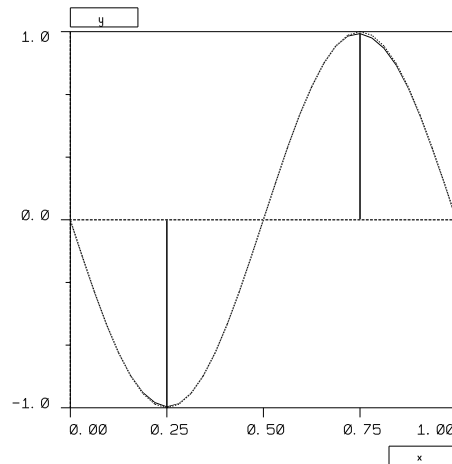


Figure 2.9 : Superposition d'une coupe et de la solution exacte ($R = 0,25$)

1 – Influence du paramètre de descente

On choisit dans cet exemple d'utiliser l'ondelette de Daubechies d'ordre $M = 3$ à un niveau d'approximation $j = 5$ (2048 degrés de liberté) pour discrétiser le déplacement, le multiplicateur de Lagrange ainsi que la mesure linéique. Dans ce paragraphe, on fixe également l'augmentation du Lagrangien égale à 10^6 et on étudie le nombre d'itérations de la méthode d'Uzawa nécessaire pour obtenir un résidu inférieur à 10^{-4} , le nombre total d'itérations du gradient conjugué (troisième colonne, $\varepsilon_{GC} = 10^{-3}$) ainsi que l'erreur commise (sur le bord) dans la quatrième colonne, en fonction du paramètre ρ (première colonne).

Paramètre ρ	Itérations d'Uzawa	Itérations du G.C.	erreur
$5 \cdot 10^3$	64	656	$3 \cdot 10^{-2}$
10^4	44	460	$2 \cdot 10^{-2}$
$5 \cdot 10^4$	28	193	$1 \cdot 10^{-2}$

Figure 2.10 : Influence de la taille du domaine fictif

On observe que l'augmentation du paramètre ρ diminue considérablement le nombre d'itérations dans la méthode d'Uzawa, ainsi que le nombre total d'itérations du gradient conjugué, tout en nous permettant d'obtenir une solution de meilleure qualité. On retrouve bien les résultats nous prédisant que le paramètre ρ influe fortement sur la rapidité de convergence de la méthode d'Uzawa. Remarquons cependant que pour une valeur de ρ supérieure à $5 \cdot 10^4$, la méthode d'Uzawa diverge.

2 – Influence de la taille du domaine fictif

Comme pour l'exemple précédent, on étudie l'influence de la taille du domaine fictif en fonction de la taille domaine intérieur ω sur lequel est posé le problème. Pour cela, on choisit un domaine fictif de taille fixe ($\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$) et on fait varier le rayon du disque intérieur. On traite toujours cet exemple avec une ondelette de Daubechies d'ordre $M = 3$, à un niveau d'approximation $j = 5$ (2048 degrés de liberté). On arrête les itérations de la méthode d'Uzawa lorsque le résidu devient inférieur à 10^{-4} , et on note alors le nombre d'itérations qui ont été nécessaires (deuxième colonne), le nombre total d'itérations du gradient conjugué (troisième colonne, $\varepsilon_{GC} = 10^{-3}$), ainsi que l'erreur commise en déplacement sur le bord (dernière colonne).

Rayon R	Itérations d'Uzawa	Itérations du G.C.	erreur
0,1	70	504	$5 \cdot 10^{-2}$
0,2	56	224	$5 \cdot 10^{-4}$
0,25	42	197	$1 \cdot 10^{-3}$
0,3	44	193	$2 \cdot 10^{-2}$
0,4	103	264	$8 \cdot 10^{-2}$

Figure 2.11 : Influence de la taille du domaine fictif

On observe que dans cet exemple, la taille du domaine fictif a une grande importance. Si le domaine fictif est trop grand (5 fois plus grand), à cause de la singularité du relèvement de la normale à l'origine, les mauvais résultats obtenus obligent à choisir un niveau d'approximation plus élevé (donc un nombre de degrés de liberté plus important) si l'on veut améliorer cette solution. Dans le cas où le domaine fictif est petit, des problèmes de bord peuvent apparaître, que l'on peut facilement expliquer (voir figures 2.13).

3 – Etude des déformées obtenues

Afin d'étudier d'où proviennent les erreurs que l'on peut commettre sur la déformée, et notamment en fonction de la taille relative du domaine fictif et du domaine sur lequel on pose le problème initial, on montre les déformées obtenues dans deux exemples.

La première déformée est celle obtenue dans le cas où le domaine intérieur est un disque de rayon $R = 0.25$ (qui était le cas où l'on avait obtenu un des meilleurs résultats). La seconde provient du cas où le domaine intérieur est un disque de rayon $R = 0,4$, dont les résultats

étaient de moins bonne qualité (dans les deux cas, on a pris : $M = 3$; $j = 5$ (2048ddl) ; $r = 10^6$; $\rho = 5.10^4$; $\varepsilon_{GC} = 10^{-3}$; $\varepsilon_{Uzawa} = 10^{-4}$).

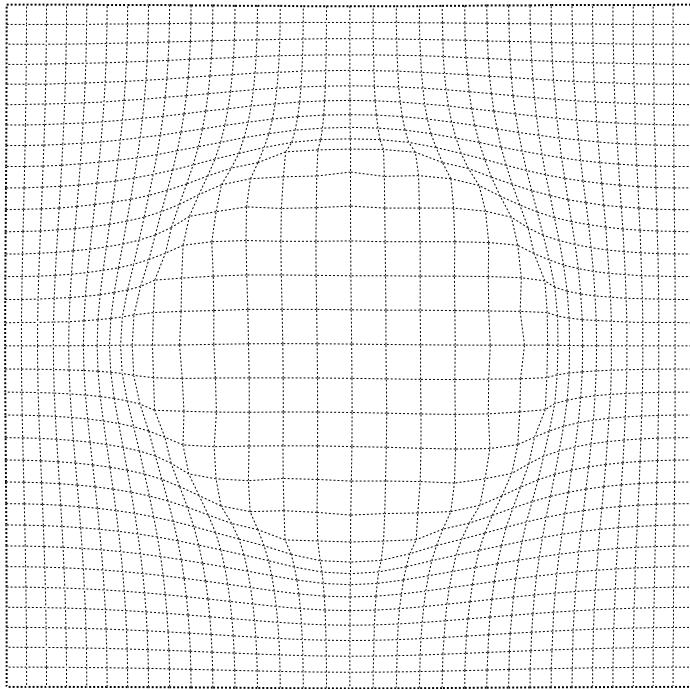


Figure 2.12 : Déformée obtenue dans le cas où $R = 0,25$ (2048 ddl)

On observe qu'ici, la solution est moins régulière sur le bord du domaine intérieur. En effet, le rôle prépondérant de la matrice \mathcal{B} et du second membre U_0 dans le calcul de la déformée, et la mauvaise qualité d'approximation de la mesure linéique sur le bord du domaine intérieur perturbant ce calcul sont à l'origine de ce résultat. Notons toutefois que la solution semble de bonne qualité. On peut de plus observer sur ces dessins combien la taille du domaine fictif par rapport au domaine intérieur joue un rôle prépondérant, ne devant être ni trop grande (comme c'est le cas dans la figure 2.13), ni trop petite.

Afin de mesurer les perturbations qui peuvent apparaître sur le bord du domaine intérieur, on trace une coupe ($u_1(x, y)$ $x \in]0, 1[$, $y = 0,5$) du déplacement de la figure 2.12 (où le domaine intérieur était un disque de rayon égal à 0,25).

On observe que les perturbations sont localisées autour de la frontière du disque, mais que loin de celle-ci, la solution est régulière.

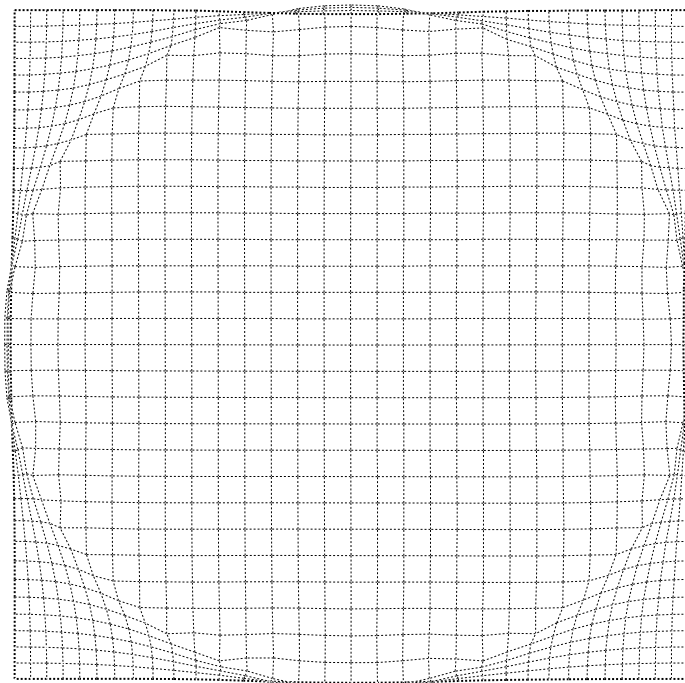


Figure 2.13 : Déformée obtenue dans le cas où $R = 0,4$ (2048 ddl)

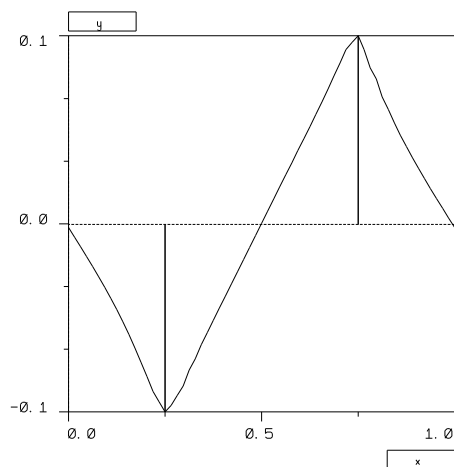


Figure 2.14 : Coupe dans le cas où $R=0,25$ (2048 ddl)

2.5 Conclusion

La mise en oeuvre de cet algorithme basé sur l'utilisation d'un Lagrangien augmenté et d'une base d'ondelettes est difficile à optimiser à cause du nombre important de paramètres qui entrent en jeu (taille du domaine fictif, valeur de l'augmentation du Lagrangien, valeur du paramètre ρ_k et du test d'arrêt du gradient conjugué à chaque itération de la méthode d'Uzawa, valeur du test d'arrêt de la méthode d'Uzawa, ordre et niveau des différentes ondelettes, ...). Ceci rend difficile l'obtention automatique de bons résultats d'autant plus que tous ces paramètres dépendent du problème que l'on a à traiter. On peut toutefois remarquer que l'obtention d'une erreur relative de l'ordre de 1% peut être facilement obtenue sur des exemples simples.

Un autre obstacle à la bonne performance de la méthode est l'imprécision que l'on commet sur le calcul des coefficients d'ondelettes de la mesure linéique, à cause du trop grand nombre d'approximations qui sont faites. Dans ce domaine, un important travail d'optimisation reste à faire.

Conclusion

On s'était proposé, dans cette partie, de résoudre un problème d'élasticité sur un ouvert ω de forme quelconque avec conditions aux limites, et ceci à l'aide de la transformée en ondelettes. Etant dans l'incapacité de traiter directement les conditions aux limites avec cette technique, nous avons choisi d'utiliser la méthode dite des domaines fictifs, qui consiste à "plonger" le domaine ω occupé par le corps dans un domaine plus grand (fictif) Ω et à imposer les conditions aux limites sur le bord du domaine intérieur $\partial\omega$ par une méthode de Lagrangien.

Comme nous avons pu l'étudier, cette méthode nous amène à calculer les coefficients d'ondelettes de la mesure linéique sur le bord du domaine intérieur $\partial\omega$. Malheureusement, le calcul de ces coefficients nous oblige à faire d'importantes approximations, ce qui nuit fortement à la précision des résultats. Il faudra, si cela est possible, améliorer cette partie du calcul si l'on veut que l'algorithme devienne plus performant.

Un autre inconvénient de cette technique est le nombre très important de paramètres qui entrent en jeu, tant au niveau de la discrétisation (choix des ondelettes et des niveaux d'approximation de la mesure linéique, du déplacement et du multiplicateur), qu'au niveau de la résolution du système linéaire (test d'arrêt de la méthode d'Uzawa, du gradient conjugué, paramètre d'augmentation du Lagrangien, paramètre de descente dans la méthode d'Uzawa). Une importante étude reste donc à faire dans ce domaine.

Diverses améliorations sur l'algorithme restent possibles pour améliorer ses performances. En effet, on peut espérer que si l'on prend un domaine fictif suffisamment grand par rapport au domaine Ω sur lequel est posé le problème initial, alors on pourra négliger les coefficients d'ondelettes qui sont dans $\Omega - \omega$ et éloignés de ω , ce qui nous permettra de réduire le nombre de degrés de liberté, et de ne plus avoir à imposer de conditions de périodicité sur le bord de Ω .

Une autre solution pourrait être de choisir une technique radicalement différente du Lagrangien pour imposer les conditions aux limites sur le bord de ω . On pourrait en effet

tenter d'utiliser la méthode de viscosité exposée dans le chapitre 2, et l'adapter au problème que l'on a à traiter ici. Malheureusement, l'opérateur qui doit être ajouté à l'opérateur d'élasticité n'a toujours pas été déterminé à ce jour. Il en va de même pour les méthodes dynamiques.

Conclusion générale

Ce travail de recherche avait pour objectif l'élaboration d'une technique performante pour la modélisation numérique de non linéarités localisées (géométriques ou comportementales) en mécanique du solide. Pour ce faire, nous avons choisi d'utiliser la transformée en ondelettes. Celle-ci étant, de par sa structure même (translation et surtout dilatation d'une seule fonction), particulièrement adaptée à l'étude de phénomènes où différentes échelles entrent en jeu.

Aucun travail, à notre connaissance, n'existait sur ce sujet. Nous nous sommes donc tout d'abord intéressés à un problème fondamental, celui de l'élasticité linéarisée – sachant que, dans le cas non linéaire, une technique de résolution consiste bien souvent à se ramener à une suite de problèmes linéaires. C'est pourquoi nous avons généralisé les travaux de G. Beylkin [4] sur les opérateurs à inconnues scalaires, afin de calculer la projection de l'opérateur de l'élasticité linéarisée dans une base d'ondelettes. Cet opérateur est en effet un opérateur vectoriel avec couplage des inconnues, qui n'a quasiment pas été traité avec une base d'ondelettes à ce jour. Nous avons ensuite résolu un problème permettant de valider les algorithmes que nous avons au préalable proposés. Parmi les bases d'ondelettes à utiliser par la suite, nous avons choisi les ondelettes de Daubechies. Celles-ci étant à support compact, la matrice issue de la projection de l'opérateur d'élasticité dans un tel type de bases a ainsi une structure creuse, condition bien utile pour la résolution de problèmes de tailles importantes. Les premiers résultats ont révélé un phénomène de Gibbs plus limité qu'avec l'analyse de Fourier, mais aussi que la détection des zones à fort gradient, où un raffinement local est nécessaire, est plus facile à réaliser qu'en utilisant la technique des éléments finis.

Nous avons pu alors nous intéresser à deux types de problèmes de mécanique bidimensionnelle des solides : l'homogénéisation périodique linéarisée et l'élasticité linéarisée sur un domaine de forme quelconque avec conditions aux limites.

L'homogénéisation périodique linéarisée bidimensionnelle amène souvent à l'étude de phénomènes d'échelles différentes. C'est de plus un premier pas en vue du traitement de problèmes non linéaires, avec viscoplasticité ou couplage thermodynamique par exemple. Les résultats obtenus sur des cas simples sont comparables à ceux que l'on peut avoir grâce à la technique des éléments finis (au niveau du temps de calcul, des résultats, ...). Par contre sur les exemples plus complexes (dans le cas de fibres de tailles très différentes dans une matrice notamment), les comparaisons donnent à penser que la transformée en ondelettes s'avèrera plus performante.

Un autre problème de mécanique des solides que nous avons traité de manière nouvelle en utilisant les ondelettes est celui de l'élasticité linéarisée bidimensionnelle avec conditions aux limites de type Dirichlet (déplacements imposés). C'est un problème de base qui sert, par linéarisations successives, au traitement des problèmes non linéaires, de type contact et frottement, plasticité et autres. Les conclusions à tirer du traitement de quelques exemples ne doivent pas cacher les quelques lacunes dont souffre l'algorithme. La principale vient du calcul de la mesure linéique sur le bord du domaine, qui contient trop d'approximations pour être précis. Les matrices des systèmes linéaires à inverser étant très mal conditionnées, cette imprécision peut amener de mauvais résultats. Mais dans le cas où le corps a une géométrie simple, et où les singularités se trouvent loin du bord, la technique ici mise au point est pleine d'intérêt.

Bien des améliorations restent toutefois possibles. Dans le cas de matériaux dont la structure est très complexe, on pourra en effet utiliser des techniques de traitement de l'image (où la transformée en ondelettes est particulièrement efficace) afin de déterminer les coefficients d'élasticité de ce matériau. La résolution des problèmes alors obtenus devra être réalisée par des solveurs performants et adaptés à la structure d'une base d'ondelettes, en préconditionnant la matrice d'élasticité par exemple, et en utilisant pour la résolution du système linéaire des techniques de multigrilles [72], [75]. Ces dernières sont particulièrement bien adaptées puisque basées, comme la transformée en ondelettes, sur la notion de multiveau. Une autre voie de recherche consistera aussi à utiliser des ondelettes (orthogonales ou plus sûrement biorthogonales) adaptées au problème que l'on aura à traiter. On peut ainsi construire, comme cela a été fait dans le cas d'opérateurs à inconnues scalaires [21], une base d'ondelettes dans laquelle l'opérateur d'élasticité est diagonal, du moins dans le cas où les coefficients d'élasticité du matériau sont constants sur toute la structure. Ceci permettrait, entre autre, l'utilisation d'algorithmes plus performants pour résoudre des problèmes d'homogénéisation [52]. La construction d'ondelettes bidimensionnelles [35], [36] nous per-

mettrait également de simplifier les procédures de raffinement par l'emploi d'un seul filtre au lieu d'un produit de deux.

Un important travail reste à faire sur le solveur, avec utilisation indispensable d'un pré-conditionneur si l'on veut pouvoir augmenter le Lagrangien avec de plus grandes valeurs. De plus, la mise en oeuvre de techniques de type multigrilles sera nécessaire pour réduire le coût de la résolution du système linéaire. Enfin, et à plus long terme, une solution à la prise en compte efficace des conditions aux limites pourrait être d'utiliser une technique mixte éléments finis - ondelettes ; éléments finis sur le bord pour traiter les conditions aux limites, ondelettes à l'intérieur pour traiter les non linéarités. Pour des problèmes non linéaires, la transformée en ondelettes permet d'élaborer simplement des critères de raffinement automatique peu coûteux.

On peut donc légitimement penser, au vu de ces premières recherches, que la transformée en ondelettes est capable de se poser – sur certains types de problèmes tout au moins – en alternative aux méthodes préexistantes que sont la transformée de Fourier et les éléments finis.

Annexes

Annexe I

Produits scalaires entre les dérivées de deux ondelettes

1 – Calcul des coefficients

Le calcul des coefficients de la matrice d'élasticité (*cf. Chap. 1.2*) ainsi que le calcul du second membre (*cf. Chap. 2.1 et 3.1*) est basé (via l'algorithme pyramidal et un changement de variable) sur la connaissance des produits scalaires entre les dérivées de deux fonctions d'échelle de $L^2(\mathbb{R})$, notés r_k^n et définis par :

$$r_k^n = \int_{\mathbb{R}} \theta(x - k) \varphi^{(n)}(x) dx \quad (\text{A1.1})$$

où la fonction θ (resp. φ) est la fonction d'échelle de Daubechies de $L^2(\mathbb{R})$ d'ordre \mathcal{M} (resp. M).

Le calcul de ces coefficients est basé sur la proposition suivante :

Proposition 16 *Les coefficients $\{r_k^n ; k = -2M + 2, 2M - 2\}$ sont les vecteurs propres associés à la valeur propre 2^{-n} de la matrice \mathbb{A} de taille $(4M - 3) \times (4M - 3)$ définie par :*

$$\mathbb{A}_{i\ell} = \sum_{k=0}^{2\mathcal{M}-1} H(k) h(2i + k - \ell) \chi_{[0, 2\mathcal{M}-1]}(2i + k - \ell) \quad (\text{A1.2})$$

et la condition de normalisation :

$$\sum_{k=0}^{2M-1} k^n r_k^n = (-1)^n n! \quad (\text{A1.3})$$

où la suite $\{H(i)\}_{i=0, \dots, 2\mathcal{M}-1}$ (resp. $\{h(i)\}_{i=0, \dots, 2M-1}$) est le filtre associé à la fonction d'échelle Θ (resp. φ). ($\chi_{[0, p]}(n) = 1$ si n est dans l'intervalle $[0, p]$ et 0 sinon).

La démonstration de cette proposition est basée sur les travaux de Beylkin [4], adaptée au cas où les deux ondelettes sont différentes.

Preuve :

Les ondelettes θ et φ vérifient les relations :

$$\theta(x) = \sqrt{2} \sum_{k_1=0}^{2M-1} H(k_1) \theta(2x - k_1) \quad (A1.4)$$

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k_2=0}^{2M-1} h(k_2) \varphi(2x - k_2) \quad (A1.5)$$

donc

$$\begin{aligned} r_i^n &= \int_{\mathbb{R}} \theta(x - i) \varphi^{(n)}(x) dx \\ &= 2^{n+1} \sum_{k_1=0}^{2M-1} \sum_{k_2=0}^{2M-1} H(k_1) h(k_2) \int_{\mathbb{R}} \theta(2x - 2i - k_1) \varphi^{(n)}(2x - k_2) dx \\ &= 2^{n+1} \sum_{k_1=0}^{2M-1} \sum_{k_2=0}^{2M-1} H(k_1) h(k_2) \int_{\mathbb{R}} \theta(2x - 2i - k_1 + k_2) \varphi^{(n)}(2x) dx \end{aligned}$$

On fait les changements de variable :

$$X = 2x; \quad \ell = 2i + k_1 - k_2; \quad k = k_1$$

et on obtient alors :

$$r_i^n = 2^n \sum_{k=0}^{2M-1} \sum_{\ell=2i+k}^{2i+k+2M-1} H(k) h(2i + k - \ell) r_\ell^n$$

sachant que le support de la fonction d'échelle d'ordre M est inclus dans l'intervalle $[0, 2M - 1]$, les coefficients r_ℓ^n sont nuls si ℓ n'est pas dans l'intervalle $[-2M + 2, 2M - 2]$, donc :

$$\begin{aligned}
 r_i^n &= 2^n \sum_{\ell=-2M+2}^{2M-2} \sum_{k=0}^{2M-1} H(k) h(2i+k-\ell) \chi_{[0,2M-1]}(2i+k-\ell) r_\ell^n \\
 &= 2^n \sum_{\ell=-2M+2}^{2M-2} \mathbb{A}_{i\ell} r_\ell^n
 \end{aligned}$$

où $\mathbb{A}_{i\ell}$ est défini par l'égalité (A1.2).

2 – Tableaux des coefficients r_i^n

La première série de tableaux donne les coefficients r_i^n où la première ondelette est la fonction d'échelle de Haar et où la seconde ondelette est la fonction d'échelle de Daubechies d'ordre M avec $M = 3, 4, 5$, et $n = 0$ ou 1 (nécessaire pour le calcul du second membre pour l'homogénéisation périodique).

La seconde série de tableaux donne les coefficients r_i^n dans le cas où les ondelettes sont les ondelettes de Daubechies d'ordre M ($M = 2, \dots, 5$) et $n = 1$ ou 2 (le cas $n = 0$ n'est pas intéressant puisque $r_0^n = \delta_{0,n}$).

a – Produits entre l'ondelette de Haar et une ondelette de Daubechies

1. Ondelette d'ordre 3

r_ℓ^n	$n = 0$	$n = 1$
$\ell = 0$	0.60074157D+00	0.12863351D+01
$\ell = 1$	0.49596988D+00	-0.16721720D+01
$\ell = 2$	-0.11122472D+00	0.48110451D+00
$\ell = 3$	0.14172363D-01	-0.91033200D-01
$\ell = 4$	0.34091099D-03	-0.42343456D-02

2. Ondelette d'ordre 4

r_{ℓ}^n	$n = 0$	$n = 1$
$\ell = 0$	0.37993441D+00	0.10071700D+01
$\ell = 1$	0.77344743D+00	-0.10410069D+01
$\ell = 2$	-0.19895392D+00	0.73447417D-01
$\ell = 3$	0.51937611D-01	-0.51374821D-01
$\ell = 4$	-0.58645916D-02	0.10566401D-01
$\ell = 5$	-0.50478006D-03	0.12167870D-02
$\ell = 6$	0.38431279D-05	-0.18829413D-04

3. Ondelette d'ordre 5

r_{ℓ}^n	$n = 0$	$n = 1$
$\ell = 0$	0.22061401D+00	0.69613606D+00
$\ell = 1$	0.89605964D+00	-0.24707845D+00
$\ell = 2$	-0.16040442D+00	-0.63131161D+00
$\ell = 3$	0.58307915D-01	0.21948583D+00
$\ell = 4$	-0.16379208D-01	-0.35714248D-01
$\ell = 5$	0.15641904D-02	-0.32443714D-02
$\ell = 6$	0.23574537D-03	0.17643657D-02
$\ell = 7$	0.21203882D-05	-0.37395343D-04
$\ell = 8$	0.48969559D-08	-0.17407613D-06

b – Produits entre deux mêmes fonctions d'échelle de Daubechies

1. Ondelette d'ordre 2

r_{ℓ}^n	$n = 1$
$\ell = 0$	0
$\ell = 1$	$-\frac{2}{3}$
$\ell = 2$	$\frac{1}{12}$

2. Ondelette d'ordre 3

r_ℓ^n	$n = 1$	$n = 2$
$\ell = 0$	0	$-\frac{295}{56}$
$\ell = 1$	$-\frac{272}{365}$	$\frac{356}{105}$
$\ell = 2$	$\frac{53}{365}$	$-\frac{92}{105}$
$\ell = 3$	$-\frac{16}{1095}$	$\frac{4}{35}$
$\ell = 4$	$-\frac{1}{2920}$	$\frac{3}{560}$

3. Ondelette d'ordre 4

r_ℓ^n	$n = 1$	$n = 2$
$\ell = 0$	0	$-\frac{342.643}{82.248}$
$\ell = 1$	$-\frac{39.296}{49.553}$	$\frac{2.852.128}{1.079.505}$
$\ell = 2$	$\frac{76.113}{396.424}$	$-\frac{12.053.651}{17.272.080}$
$\ell = 3$	$-\frac{1.664}{49.553}$	$\frac{162.976}{1.079.505}$
$\ell = 4$	$\frac{2.645}{1.189.272}$	$-\frac{60.871}{5.757.360}$
$\ell = 5$	$\frac{128}{743.295}$	$-\frac{352}{215.901}$
$\ell = 6$	$-\frac{1}{1.189.272}$	$\frac{55}{3.454.416}$

4. Ondelette d'ordre 5

r_ℓ^n	$n = 1$	$n = 2$
$\ell = 0$	0	$-\frac{2.370.618.501.415}{618.154.371.936}$
$\ell = 1$	$-\frac{957.310.976}{1.159.104.017}$	$\frac{1.632.655.076.608}{676.106.344.305}$
$\ell = 2$	$\frac{265.226.398}{1.159.104.017}$	$-\frac{439.132.551.286}{676.106.344.305}$
$\ell = 3$	$-\frac{735.232}{13.780.629}$	$\frac{367.031.529.728}{2.028.319.032.915}$
$\ell = 4$	$\frac{17.297.069}{2.318.208.034}$	$-\frac{80.883.901.277}{2.704.425.377.220}$
$\ell = 5$	$-\frac{1.386.496}{5.795.520.085}$	$\frac{107.449.600}{135.221.268.861}$
$\ell = 6$	$-\frac{563.818}{10.431.936.153}$	$\frac{148.937.594}{405.663.806.583}$
$\ell = 7$	$-\frac{2.048}{8.113.728.119}$	$\frac{32.000}{19.317.324.123}$
$\ell = 8$	$-\frac{5}{18.545.664.272}$	$\frac{4.375}{1.236.308.743.872}$

Annexe II

Produits scalaires entre les dérivées de trois ondelettes

1 – Calcul des coefficients

Le calcul des coefficients de la matrice d'élasticité (*cf. Chap. 1.2*) nécessite la connaissance des intégrales entre les produits des dérivées de trois ondelettes, notés $\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{\Delta}$, et définis par :

$$\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{\Delta} = \int_{\mathbb{R}} \theta(x) \varphi^{(n_1)}(x - \ell_1) \varphi^{(n_2)}(x - \ell_2) dx \quad (\text{A2.1})$$

où la fonction θ (resp. φ) est la fonction d'échelle de Daubechies de $L^2(\mathbb{R})$ d'ordre \mathcal{M} (resp. M), et $\underline{\Delta} = (n_1, n_2)$.

Comme pour le cas du produit de deux ondelettes, le calcul de ces coefficients consiste à rechercher un vecteur propre d'une matrice de petite dimension. Plus précisément, on a la proposition :

Proposition 17 *Soit les coefficients définis par (A2.1) où θ (resp. φ) est une ondelette de Daubechies d'ordre \mathcal{M} (resp. M) sur $L^2(\mathbb{R})$, ces coefficients vérifient l'égalité :*

$$\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{\Delta} = 2^{n_1+n_2} \sum_{\ell_1, \ell_2=2-2M}^{2M-2} \mathbb{B}_{\ell_1, \ell_2, i_1, i_2} \Gamma_{i_1, i_2}^{\Delta} \quad (\text{A2.2})$$

où \mathbb{B} est le tenseur d'ordre 4 défini par :

$$\mathbb{B}_{\ell_1, \ell_2, i_1, i_2} = \sqrt{8} \sum_{k=0}^{2M-1} H(k) h(i_1 - 2\ell_1 + k) h(i_2 - 2\ell_2 + k) \chi_{[0, 2M-1]}(i_1 - 2\ell_1 + k) \chi_{[0, 2M-1]}(i_2 - 2\ell_2 + k) \quad (\text{A2.3})$$

et l'équation de normalisation :

$$\sum_{k=0}^{2M-1} k^\ell r_k^\ell = (-1)^\ell \ell! \quad (\text{A2.4})$$

où la suite $\{H(i)\}_{i=0,\dots,2M-1}$ (resp. $\{h(i)\}_{i=0,\dots,2M-1}$) est le filtre associé à la fonction d'échelle Θ (resp. φ).

Preuve :

Sachant que θ et φ vérifient les relations :

$$\theta(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} H(k) \theta(2x - k) \quad ; \quad \varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} h(k) \varphi(2x - k) , \quad (A2.5)$$

on a l'égalité suivante :

$$\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{\Delta} = 2^{n_1+n_2} \sqrt{8} \sum_{k=0}^{2M-1} \sum_{k_1, k_2=0}^{2M-1} H(k) h(k_1) h(k_2) \Gamma_{2\ell_1+k_1-k, 2\ell_2+k_2-k}^{\Delta} . \quad (A2.6)$$

On fait les changements de variable :

$$i_1 = 2\ell_1 + k_1 - k \quad ; \quad i_2 = 2\ell_2 + k_2 - k ,$$

et on a alors :

$$\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{\Delta} = 2^{n_1+n_2} \sqrt{8} \sum_{k=0}^{2M-1} \sum_{i_1=2\ell_1-k}^{2\ell_1-k+2M-1} \sum_{i_2=2\ell_2-k}^{2\ell_2-k+2M-1} H(k) h(i_1 - 2\ell_1 + k) h(i_2 - 2\ell_2 + k) \Gamma_{i_1, i_2}^{\Delta} .$$

Or $\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{\Delta} = 0$ pour $\ell_1, \ell_2 \notin [2 - 2M, 2M - 2]$

donc :

$$\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{\Delta} = 2^{n_1+n_2} \sum_{\ell_1, \ell_2=2-2M}^{2M-2} \mathbb{B}_{\ell_1, \ell_2, i_1, i_2} \Gamma_{i_1, i_2}^{\Delta}$$

où \mathbb{B} est définie par l'égalité (A2.3).

La recherche de ces coefficients $\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{\Delta}$ consiste donc en la recherche d'une matrice propre du tenseur d'ordre 4 noté \mathbb{B} associée à la valeur propre $2^{n_1+n_2}$. Par un procédé de rangement, on peut se ramener à la recherche de vecteurs propres. A chaque valeur propre, le vecteur propre n'est pas unique (il suffit que la somme des dérivées soit égale à $n_1 + n_2$), il faudra alors utiliser plusieurs fois l'équation de normalisation pour obtenir le vecteur souhaité.

a – Calcul des coefficients $\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(0,0)}$

Pour obtenir les coefficients $\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(0,0)}$, il est nécessaire de calculer un vecteur propre de la matrice \mathbb{B} associé à la valeur propre 1. On doit de plus introduire une condition supplémentaire pour obtenir l'unique vecteur qui nous intéresse.

Les fonctions θ et φ vérifient les égalités :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta(x - k) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{A2.7})$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \varphi(x - k) dx = \delta_{0,k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (\text{A2.8})$$

donc la condition de normalisation s'écrit :

$$\sum_{\ell_1, \ell_2=2-2M}^{2M-2} \Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(0,0)} = 1. \quad (\text{A2.9})$$

b – Calcul des coefficients $\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(0,1)}$

Les coefficients $\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(0,1)}$ correspondent à un vecteur propre de la matrice \mathbb{B} associé à la valeur propre $\frac{1}{2}$. Ecrivons une condition de normalisation :

Soit $\gamma_{\ell_1, \ell_2} = \int_{\mathbb{R}} \theta^{(1)}(x) \varphi(x - \ell_1) \varphi(x - \ell_2) dx$, alors $\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(0,1)}$ et γ_{ℓ_1, ℓ_2} sont deux vecteurs propres non colinéaires de la matrice \mathbb{B} , ces deux vecteurs vérifient les égalités :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell_1, \ell_2=2-2M}^{2M-2} \ell_2 \Gamma_{-\ell_1, \ell_2 - \ell_1}^{(0,1)} = 1 & \quad ; & \quad \sum_{\ell_1, \ell_2=2-2M}^{2M-2} \ell_2 \gamma_{-\ell_1, \ell_2 - \ell_1} = 0 ; \\ \sum_{\ell_1, \ell_2=2-2M}^{2M-2} \ell_1 \Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(0,1)} = 0 & \quad ; & \quad \sum_{\ell_1, \ell_2=2-2M}^{2M-2} \ell_1 \gamma_{\ell_1, \ell_2} = 1 ; \end{aligned}$$

Donc, pour calculer $\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(0,1)}$ et sachant que sous-espace propre de la matrice \mathbb{B} associé à la valeur propre $\frac{1}{2}$ est de dimension 2, la technique consiste à obtenir deux vecteurs propres \mathcal{A} et \mathcal{B} de \mathbb{B} linéairement indépendant, et de déterminer ensuite α et β tels que :

$$\alpha \left(\sum_{\ell_1, \ell_2=2-2M}^{2M-2} \ell_2 \mathcal{A}_{-\ell_1, \ell_2 - \ell_1} \right) + \beta \left(\sum_{\ell_1, \ell_2=2-2M}^{2M-2} \ell_2 \mathcal{B}_{-\ell_1, \ell_2 - \ell_1} \right) = 1 ;$$

$$\alpha \left(\sum_{\ell_1, \ell_2=2-2M}^{2M-2} \ell_1 \mathcal{A}_{\ell_1, \ell_2} \right) + \beta \left(\sum_{\ell_1, \ell_2=2-2M}^{2M-2} \ell_1 \mathcal{B}_{\ell_1, \ell_2} \right) = 0 ,$$

et ensuite :

$$\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(0,1)} = \alpha \mathcal{A}_{\ell_1, \ell_2} + \beta \mathcal{B}_{\ell_1, \ell_2} . \quad (A2.10)$$

c – Calcul des coefficients $\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(1,1)}$

Les coefficients $\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(1,1)}$ correspondent à un vecteur propre de la matrice \mathbb{B} associé à la valeur propre $\frac{1}{4}$. Les vecteurs propres :

$$\mathcal{A}_{\ell_1, \ell_2} = \int_{\mathbb{R}} \theta(x - \ell_1) \varphi^{(1)}(x - \ell_2) \varphi^{(1)}(x) dx ;$$

$$\mathcal{B}_{\ell_1, \ell_2} = \int_{\mathbb{R}} \theta(x - \ell_1) \varphi(x - \ell_2) \varphi^{(2)}(x) dx ;$$

sont deux autres vecteurs propres linéairement indépendants de \mathbb{B} associés à la valeur propre $\frac{1}{4}$. Le sous-espace-propre de \mathbb{B} associés à la valeur propre $\frac{1}{4}$ étant de dimension 3, on peut, comme dans le paragraphe précédent, calculer trois vecteurs propres linéairement indépendants et déterminer $\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(1,1)}$ à l'aide de trois conditions de normalisation.

2 – Tableaux des coefficients $\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{\Delta}$

On donne, dans les trois tableaux suivants, les coefficients $\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{\Delta}$ ($\Delta = (0, 0), (0, 1), (1, 1)$) dans le cas où l'ondelette θ est la fonction d'échelle de Haar, et où la seconde est la fonction d'échelle de Daubechies d'ordre $M = 3$ et 4.

a – Ondelette d'ordre 3

ℓ_1	ℓ_2	$\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(0,0)}$	$\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(0,1)}$	$\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(1,1)}$
-4	-4	0.14779113D-05	-0.89648432D-05	0.19835924D-03
-4	-3	0.32493517D-04	-0.80147782D-04	0.15307948D-02
-4	-2	-0.13438872D-03	0.18874485D-03	-0.47794645D-02
-4	-1	0.44132828D-03	-0.44209798D-03	0.84074534D-02
-4	0	0.00000000D+00	0.34246575D-03	-0.53571429D-02
-3	-4	0.32493517D-04	-0.32324793D-03	0.15307948D-02
-3	-3	0.13384609D-02	-0.45289878D-02	0.46023610D-01
-3	-2	-0.56847878D-02	0.10909327D-01	-0.12829957D+00
-3	-1	0.18927524D-01	-0.21111061D-01	0.20343833D+00
-3	0	-0.44132828D-03	0.15053970D-01	-0.12269317D+00
-2	-4	-0.13438872D-03	0.14450222D-02	-0.47794645D-02
-2	-3	-0.56847878D-02	0.26251809D-01	-0.12829957D+00
-2	-2	0.31063533D-01	-0.69897128D-01	0.46736464D+00
-2	-1	-0.11767594D+00	0.16648346D+00	-0.10118172D+01
-2	0	-0.18793136D-01	-0.12428316D+00	0.67753161D+00
-1	-4	0.44132828D-03	-0.50046893D-02	0.84074534D-02
-1	-3	0.18927524D-01	-0.10306869D+00	0.20343833D+00
-1	-2	-0.11767594D+00	0.29307441D+00	-0.10118172D+01
-1	-1	0.47094873D+00	-0.75289388D+00	0.30518616D+01
-1	0	0.12332824D+00	0.56789284D+00	-0.22518902D+01
0	-4	0.00000000D+00	-0.34246575D-03	-0.53571429D-02
0	-3	-0.44132828D-03	-0.96071829D-02	-0.12269317D+00
0	-2	-0.18793136D-01	0.24682915D+00	0.67753161D+00
0	-1	0.12332824D+00	-0.10642085D+01	-0.22518902D+01
0	0	0.49664780D+00	0.82732896D+00	0.17024089D+00

b – Ondelette d'ordre 4

ℓ_1	ℓ_2	$\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(0,0)}$	$\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(0,1)}$	$\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(1,1)}$
-6	-6	0.16790899D-09	-0.17727340D-09	0.66945513D-07
-6	-5	-0.10366669D-07	-0.66789737D-07	-0.10578900D-05
-6	-4	-0.60875409D-07	-0.27745217D-06	-0.22295504D-05
-6	-3	0.29349897D-06	0.24272533D-05	0.15131902D-04
-6	-2	-0.47542067D-06	-0.67563820D-05	-0.16770556D-04
-6	-1	0.40961224D-05	0.38326974D-05	0.20780799D-04
-6	0	0.00000000D+00	0.84085054D-06	-0.15921649D-04
-5	-6	-0.10366667D-07	0.89346575D-07	-0.10578900D-05
-5	-5	0.14289982D-05	-0.71737393D-06	0.14174959D-03
-5	-4	0.10582822D-04	0.29664059D-04	0.85023662D-04
-5	-3	-0.53499879D-04	-0.19811191D-03	-0.15791451D-02
-5	-2	0.10167038D-03	0.63839558D-03	0.27343194D-02
-5	-1	-0.56085589D-03	-0.29328081D-03	-0.29904858D-02
-5	0	-0.40961224D-05	-0.17603889D-03	0.16095961D-02
-4	-6	-0.60874138D-07	0.49896814D-06	-0.22295504D-05
-4	-5	0.10582823D-04	-0.43779819D-04	0.85023662D-04
-4	-4	0.18207829D-03	-0.68482511D-04	0.56391260D-02
-4	-3	-0.85916963D-03	-0.62878906D-03	-0.21092361D-01
-4	-2	0.17750513D-02	0.55762292D-02	0.27951981D-01
-4	-1	-0.75344048D-02	-0.29116643D-02	-0.26161524D-01
-4	0	0.56133131D-03	-0.19240125D-02	0.13579984D-01
-3	-6	0.29349899D-06	-0.31730951D-05	0.15131902D-04
-3	-5	-0.53499879D-04	0.24534205D-03	-0.15791451D-02
-3	-4	-0.85916963D-03	0.11088739D-02	-0.21092361D-01
-3	-3	0.49761867D-02	-0.71529432D-03	0.11104916D+00
-3	-2	-0.13663784D-01	-0.18948098D-01	-0.22876632D+00
-3	-1	0.54105143D-01	-0.17538699D-01	0.26793436D+00
-3	0	0.74324409D-02	0.35851049D-01	-0.12756083D+00

ℓ_1	ℓ_2	$\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(0,0)}$	$\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(0,1)}$	$\Gamma_{\ell_1, \ell_2}^{(1,1)}$
-2	-6	-0.47542067D-06	0.73935120D-05	-0.16770556D-04
-2	-5	0.10167038D-03	-0.67818498D-03	0.27343194D-02
-2	-4	0.17750513D-02	-0.60217510D-02	0.27951981D-01
-2	-3	-0.13663784D-01	0.19822404D-01	-0.22876632D+00
-2	-2	0.48370652D-01	0.21202465D-03	0.69293999D+00
-2	-1	-0.17971040D+00	0.16649623D+00	-0.89840734D+00
-2	0	-0.55826633D-01	-0.17983811D+00	0.40356414D+00
-1	-6	0.40961224D-05	-0.22797117D-04	0.20780799D-04
-1	-5	-0.56085589D-03	0.14991906D-02	-0.29904858D-02
-1	-4	-0.75344048D-02	0.14800908D-01	-0.26161524D-01
-1	-3	0.54105143D-01	-0.21957700D-01	0.26793436D+00
-1	-2	-0.17971040D+00	-0.13375696D+00	-0.89840734D+00
-1	-1	0.71292107D+00	-0.50662321D+00	0.21534924D+01
-1	0	0.19422278D+00	0.64606057D+00	-0.14938882D+01
0	-6	0.00000000D+00	-0.84085054D-06	-0.15921649D-04
0	-5	-0.40961224D-05	0.19500331D-03	0.16095961D-02
0	-4	0.56133131D-03	0.71746555D-03	0.13579984D-01
0	-3	0.74324409D-02	-0.47699757D-01	-0.12756083D+00
0	-2	-0.55826633D-01	0.21973258D+00	0.40356414D+00
0	-1	0.19422278D+00	-0.68014013D+00	-0.14938882D+01
0	0	0.23354859D+00	0.50719568D+00	0.12027112D+01

Bibliographie

Bibliographie

La transformée en ondelettes

- [1] P. AUSCHER, *Ondelettes à support compact et conditions aux limites*, J. Functional Analysis, t. III, pp. 29-43, 1993.
- [2] P. AUSCHER, *Solutions of two problems on wavelets*, J. Geom. Analysis, vol. 4, no.4, 1994.
- [3] G. BATTLE, *A block spin construction of ondelettes, Part. 1: Lemarié functions*, Comm. Math. Phys., vol. 110, pp. 607-615, 1987.
- [4] G. BEYLKIN, *On the Representation of Operators in Bases of Compactly Supported Wavelets*, SIAM, J. Num. Analysis, vol. 6, no. 6, pp. 1716-1740, 1992.
- [5] G. BEYLKIN, R. COIFMAN, V. ROKLHIN, *Fast wavelet Transform and Numerical Algorithms I*, Comm. in Pure and Applied Math., vol. XLIV, no. , pp. 141-183, 1991.
- [6] A. COHEN, *Ondelettes, analyses multirésolutions et filtres miroirs en quadrature*, Annales de l'Institut H. Poincaré, Analyse non linéaire, 1990.
- [7] A. COHEN, *Ondelettes, analyses multirésolutions et traitement numérique de l'image*, Thèse de doctorat, CEREMADE, Université Paris-Dauphine, 1990.
- [8] A. COHEN, I. DAUBECHIES, P. VIAL, *Wavelets on the interval and fast wavelet transform*, J. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1993.
- [9] P. CHARTON, V. PERRIER, *Méthode d'ondelettes pour un produit rapide matrice vecteur : application à la mécanique des fluides*, prépublication, 1995.

-
- [10] P. CHARTON, V. PERRIER, *Factorisation sur bases d'ondelettes sur le noyau de la chaleur et algorithmes matriciels rapides associés*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 320, série 1, pp. 1013-1018, 1995.
- [11] I. DAUBECHIES, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. in Pure and Applied Math., vol. XLI, no. 7, pp. 909-996, octobre 1988.
- [12] I. DAUBECHIES, *Two recent results on wavelets : wavelet bases on interval, and biorthogonal wavelets diagonalizing the derivative operator*, Wavelet analysis and its applications, vol. 3, pp. 237-257, 1994.
- [13] S. DUMONT, F. LEBON, *Ondelettes et équations aux dérivées partielles*, Note interne no. 93-1, Université Montpellier 2, Oct. 1993.
- [14] S. DUMONT, F. LEBON, *Representation of plane elastostatics operators in Daubechies wavelets*, Prépublication no. 94-3, Université Montpellier 2, Dec. 1994, soumis.
- [15] S. DUMONT, F. LEBON, *Méthode de Galerkin-Ondelettes en homogénéisation périodique* 1995, soumis.
- [16] A. GROSSMANN, J. MORLET, *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets on constant shape*, SIAM J. Math Anal., vol. 15, pp. 723-736, 1984.
- [17] A. HAAR, *Zur Theorie der Orthogonalen Funktionensysteme*, Gottingen, Juillet 1909.
- [18] M. HOLSCHNEIDER, P. TCHAMITCHIAN, *On the Wavelet Analysis of Riemann's function*, Note CPT, Centre de Physique Théorique, CNRS, Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, Février 1989. Inventiones Mathematicae.
- [19] S. JAFFARD, *Exposant de Hölder en des points données et coefficients d'ondelettes*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, pp. 79-81, 1989.
- [20] S. JAFFARD, Y. MEYER, *Bases d'ondelettes dans des ouverts de \mathbb{R}^n* , J. Math. Pures et Appli., vol 68, pp. 95-108, 1989.
- [21] S. LAZAAR, J. LIANDRAT, P. TCHAMITCHIAN, *Détermination de l'inverse d'opérateurs à coefficients variables*, preprint IMST, 1993.
- [22] J. LIANDRAT, P. TCHAMITCHIAN, *Resolution of the 1.D regularized Burgers equation using a spatial wavelet approximation, algorithm and numerical result*, ICASE Report, NASA, Hampton, Virginia, 1989.

-
- [23] J. LIANDRAT, V. PERRIER, P. TCHAMITCHIAN, *Numerical resolution of the regularized Burgers equation using the wavelet transform*, rapport CPT-89, p. 2320, Proc. Conf. "Wavelets and applications", Marseille, 29 mai-2 Juin 1989.
- [24] J. LIANDRAT, V. PERRIER, P. TCHAMITCHIAN, *Numerical resolution of non linear partial differential equations using the wavelet approach*, Invited lecture in CBSM-NSF Conference "Wavelets and their applications", Lowell, Juin 1990.
- [25] P.G. LEMARIE, Y. MEYER, *Ondelettes et bases hilbertiennes*, Rev. Mat. Iberoamericana, vol. 2, 1986.
- [26] S. MALLAT, *A Theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation*, Technical report MS-CIS-87-22, Univ. of Pennsylvania, May. 1987, IEEE, Transactions on PAMI, vol. 2, no. 7, July 1989.
- [27] Y. MADAY, *Contribution à l'analyse numérique des méthodes spectrales*, Thèse de Doctorat d'état, Université Paris VI, 1987.
- [28] Y. MEYER, *Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbre d'opérateurs*, Séminaire Bourbaki, no 662, 1985-86.
- [29] Y. MEYER, *Ondelettes, filtres miroirs en quadratures et traitement numérique de l'image*, Gazette des mathématiciens, vol. 40, pp. 31-42, avril 1989.
- [30] Y. MEYER, *Ondelettes et opérateurs*, tome I, Actualités mathématiques, Hermann, 1990.
- [31] P. MONASSE, V. PERRIER, *Ondelettes sur l'intervalle pour la prise en compte de conditions aux limites*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I, 1995.
- [32] J. MORLET, *Sampling theory and wave propagation*, proc. 51st Annual Meeting of the society of Exploration Geophysicists, Los Angeles, 1981.
- [33] V. PERRIER, C. BASDEVANT, *La décomposition en ondelettes périodiques, un outil pour l'analyse de champs inhomogènes. Théorie et algorithmes*. La recherche aérospatiale, no. 1989-3, pp. 53-67, Juin 1989.
- [34] V. PERRIER, *Ondelettes et simulation numérique*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1991.
- [35] D. STANHILL, Y. ZEEVI, *Two-dimensional orthogonal wavelets with vanishing moments*, Preprint, Technion, Université d'Haifa, 1995.

- [36] D. STANHILL, Y. ZEEVI, *Two-dimensional linear phase orthogonal filter-banks and wavelets*, Preprint, Technion, Université d'Haifa, 1995.
- [37] G. STRANG, *Wavelets and dilatation equations: A brief introduction*, SIAM, Vol. 31, no. 4, pp. 614-627, Dec. 1989.

Homogénéisation périodique

- [38] H. ATTOUCH, *Viscosity solutions of minimization problems*, Prépublication no. 1994/07, Laboratoire d'Analyse Convexe, Université Montpellier 2, 1994.
- [39] H. ATTOUCH, R. COMINETTI, *A dynamical approach to convex minimization coupling approximation with the steepest descent method*, Prépublication no.1994/29, Laboratoire d'Analyse Convexe, Université Montpellier 2, 1994.
- [40] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [41] H. BREZIS, *Asymptotic behavior of some evolution systems, non linear evolution equations*, Academic Press, 1978.
- [42] S. DUMONT, F. LEBON, *Wavelet-Galerkin method for heterogeneous media*, à paraître dans Computers and Structures, 1995.
- [43] D. GIRARD, *Une méthode de calcul rapide des propriétés macroscopiques linéaires des matériaux composites*, mémoire de D.E.A., Université Montpellier 2, Juillet 1995.
- [44] Z. HASHIN, *The elastic moduli of heterogeneous materials*, ASME J. Appl. Mech., Vol. 29, pp. 143-150, 1962.
- [45] Z. HASHIN, S. STRIKMAN, *A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials*, J. of Mech. and Phys. of Sol., Vol. 11, pp. 127-140, 1963.
- [46] R. HILL, *Theory of mechanical properties of fiber-strengthened material*, J. of Mech. and Phys. of Sol., Vol. 12, pp. 199-212, 1964.
- [47] P. JOLY, *Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis*, Mathématiques et applications, Ellipses, 1990.

-
- [48] H. B. KELLER, *On the solution of singular and semi definite linear system by iterations*, Siam J. Numer. Anal., Ser. B, Vol 2, 1965.
- [49] F. LEBON, S. DUMONT, *Visco-dynamic method for periodic homogenization using wavelet-Galerkin formulation*, en préparation.
- [50] F. LENE, *Contribution à l'étude des matériaux composites et de leur endommagement*, Thèse, Université Paris 6, 1984.
- [51] C. LICHT, *Frottement, viscoplasticité et homogénéisation*, Thèse, Université Montpellier 2, 1987.
- [52] H. MOULINEC, P. SUQUET, *A fast numerical method for computing the linear and non linear mechanical properties of composites*, C.R. Acad. Sci. Paris, Vol. 318, pp. 1417-1423, 1994.
- [53] R. PEYROUX, *Caractéristiques thermoélastiques de matériaux composites à fibres courtes*, Thèse de doctorat, Université Montpellier 2, Mai 1990.
- [54] R. PEYROUX, C. LICHT, *Homogenization in thermoelasticity: application to composite materials*, Journal de physique IV, Colloque C7, supplément au Journal de Physique III, Vol. 3, novembre 1993.
- [55] E. SANCHEZ-PALENCIA, *Non homogeneous media and vibration theory*, lecture notes in Physics no. 127, 1980.
- [56] P. SUQUET, *Méthodes d'homogénéisation en Mécanique des solides*, 15 ème Congrès du Groupe Français de Mécanique de Rhéologie, Paris, 1980.
- [57] P. SUQUET, *Plasticité et homogénéisation*, thèse de doctorat d'état, Université Paris 6, 1982.
- [58] L. TARTAR, *Estimations de coefficients homogénéisés*, lecture notes in Math., no. 704, pp. 364-373, 1979.
- [59] J. WILLIS, *Elasticity theory of composites*, in Mech. of Sol., Pergamon Press, Oxford, pp 353-386, 1982.

Elasticité bidimensionnelle

- [60] P. ALART, F. LEBON, *Solution of frictional contact problems using ILU and coarse/fine preconditioners*, Computational Mechanics, vol. 16, pp. 98-105, 1995.
- [61] I. BABUSKA, *The finite element method with Lagrangian multipliers*, Numer. Math., vol. 20, pp. 179-192, Springer-Verlag, 1973.
- [62] I. BABUSKA, W.C. RHEINBOLDT, *A posteriori error estimates for the finite element method*, Intern. J. of Numerical Method in Engineering, vol 12, pp 1597-1615, 1978.
- [63] R.E. BANK, *PLTMG Users' Guide*, Dept. Of Math., Univ. of California, San Diego, 1981.
- [64] C. BERNARDI, Y. MADAY, *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*, Mathématiques et applications, no. 10, Springer Verlag Paris, 1991.
- [65] F. BREZZI, *On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers*, RAIRO, Anal. Numer., pp. 129-151, 1974.
- [66] S. DUMONT, F. LEBON, P. ALART, *Elasticité et ondelettes : Formulations mathématiques et mise en oeuvre numérique*, 2ème Coll. Cal. des struct., pp. 827-832, Hermès, Mai 1995.
- [67] W. DAHMEN, A. KUNOTH, *Multilevel preconditioning*, Numer. Math., no. 63, pp. 315-344, 1992.
- [68] W. DAHMEN, A. KUNOTH, K. URBAN, *A Wavelet-Galerkin method for the Stokes Equations*, Computing, à paraître, 1995.
- [69] G. DUVAUT, J.L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*, dunod, Paris, 1972.
- [70] M. FORTIN, R. GLOWINSKI, *Méthode de Lagrangien augmenté- Applications à la résolution numérique de problèmes aux limites*, Méthodes Mathématiques de l'informatique, Dunod, 1982.
- [71] R. GLOWINSKI, T.W. PAN, R.O. WELLS Jr., X. ZHOU, *Wavelet and finite element solutions for the Neumann problem using fictitious domains*, Preprint 92-01, 1992.

-
- [72] R. GLOWINSKI, A. RIEDER, R.O. WELLS Jr., X. ZHOU, *A wavelet multilevel method for Dirichlet boundary value problems in general domains*, Preprint, 1993.
- [73] R. GLOWINSKI, A. RIEDER, R.O. WELLS Jr., X. ZHOU, *Method for dirichlet boundary value problems in general domains*, Technical Report no. 93-06, 1993.
- [74] E. GUISTI, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Birkhauser, Boston, 1984.
- [75] W. HACKBUSCH, *Multi-grid methods and applications*, Springer series in comp. math., Springer-Verlag, New-York, 1985.
- [76] M. KHALFAOUI, *Contact unilatéral et ondelettes : Formulation du problème*, Mémoire de D.E.A., Juillet 1994.
- [77] A. KUNOTH, *Multilevel preconditioning – Appending boundary conditions by Lagrange multipliers*, Advances in Comp. Math., vol. 4, no.1-2, pp. 145-170, 1995.
- [78] P. LADEVEZE, J.P. PELLE, *Accuracy in finite element computation for eigenfrequencies*, International Journal Numerical method in Engineering, 1990.
- [79] F. LEBON, *Two-grid method for regularized frictional elastostatics problems*, Engineering computations, Vol. 12, pp. 657-664, 1995.
- [80] B. NAYROLES, G. TOUZOT, P. VILLON, *Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements*, Computational mechanics, Vol 10, pp. 307-318, 1992.
- [81] J. P. PELLE, *Sur la maîtrise des calculs éléments finis : état actuel et perspective*, 2ème Coll. Cal. des struct., pp. 43-54, Hermès, 1995.
- [82] M.C. RIVARA, *A grid generator based on 4-triangles conforming mesh-refinement algorithm*, International Journal Numerical method in Engineering, Vol 24, pp 1343-1354, 1987.
- [83] R.O. WELLS Jr., X. ZHOU, *Wavelet solutions for the Dirichlet problem*, Numer. Math., Vol. 70, pp 379-396, Springer-Verlag, 1995.
- [84] O.C. ZIENKIEWICZ, J.Z. ZHU, *A simple error estimator and adaptative procedure for practical engineering analysis*, International Journal Numerical method in Engineering, Vol. 24, pp. 337-357, 1987.

Résumé

En mécanique du solide, la résolution de problèmes complexes de taille croissante exige la conception d'algorithmes performants, robustes et précis. Ce mémoire vise à proposer une méthode pour la modélisation numérique de non linéarités localisées (géométriques et comportementales). La technique choisie a été la transformée en ondelettes, celle-ci étant, de par sa structure même, adaptée à l'étude de phénomènes où différentes échelles entrent en jeu. Puisque, à notre connaissance, aucun travail n'existait sur le sujet, une généralisation des travaux de G. Beylkin (sur les opérateurs à inconnues scalaires) pour construire l'opérateur d'élasticité (qui est à inconnues vectorielles avec couplages) a tout d'abord été nécessaire. Ceci nous a ensuite permis de traiter deux problèmes fondamentaux de la mécanique des solides : l'homogénéisation périodique et l'élasticité linéarisée avec conditions aux limites sur un ouvert de forme quelconque.

Dans le cas de l'homogénéisation périodique, une méthode de viscosité a été mise en oeuvre pour imposer une condition assurant l'unicité de la solution. Les résultats obtenus par la méthode sont alors comparés avec ceux d'un code d'éléments finis.

Pour le cas de l'élasticité linéarisée, les conditions aux limites sur le bord d'un domaine quelconque ne pouvant pas être traitées directement avec la transformée en ondelettes, nous avons choisi d'utiliser des techniques de domaine fictif et de Lagrangien augmenté. Là encore, une étude numérique a été menée à bien afin d'évaluer les performances de la méthode.

Mots clefs :

Elasticité, Homogénéisation périodique,

Ondelettes, Méthode de Galerkin,

Méthode de viscosité, Lagrangien augmenté, Domaine fictif.