Université Paris 6 Pierre et Marie Curie
Master 2 de mathématiques fondamentales

Rapport de stage

Espaces de modules de courbes en genre zéro et opérades

Clément Dupont

Tuteur de stage :
Pierre Lochak

2009

Table des matières

Introduction

Le présent mémoire conclut un stage de cinq mois effectué sous la direction de Pierre Lochak dans le cadre du Master 2 de Mathématiques fondamentales de l'Université Paris 6 Pierre et Marie Curie.

Il trouve son point de départ dans l'étude de l'article "Operads and moduli spaces of genus 0 Riemann surfaces" ([G1]) d'E. Getzler, qui, dans la lignée de l'article fondateur "Koszul duality of operads" ([GK]) de V. Ginzburg et M. Kapranov, lance un pont entre deux domaines a priori très différents.

D'un côté, les espaces de modules de courbes en genre zéro $\mathcal{M}_{0,n}$ sont des objets bien connus des géomètres algébristes ; l'espace $\mathcal{M}_{0,n}$ est une variété qui paramètre les surfaces de Riemann de genre zéro à n points marqués. P. Deligne, D. Mumford et F. F. Knudsen en ont construit une bonne compactification $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ ([DM], [Kn]). La structure stratifiée des espaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ leur donne une combinatoire très riche.

De l'autre côté, le concept d'opérade a été introduit par J. P. May dans les années 60 ([Ma]), et a connu un beau succès dans le monde de la topologie algébrique.

Informellement et dans un cadre plus algébrique, une opérade $\mathcal{P}$ peut être vue comme une suite d'espaces vectoriels

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(n)\}_{n\geq 1}$$

tels que $\mathcal{P}(n)$ soit l'espace des opérations n-linéaires autorisées dans un certain type d'algèbre - appelées à juste titre les algèbres sur $\mathcal{P}$.

Chaque espace $\mathcal{P}(n)$ est muni d'une action du groupe symétrique $\mathbb{S}_n$ qui exprime le comportement des opérations après permutation des variables, et une opérade est munie d'une opération de composition opéradique qui exprime la façon de composer ces opérations entre elles.

Il est aisé d'associer une opérade à un type d'algèbre quelconque grâce à la notion de présentation d'une opérade : les générateurs de l'opérade sont les opérations du type d'algèbre concerné, avec leurs symétries éventuelles, et les relations sont les relations définissant le type d'algèbre, telles que l'associativité. Les opérades les plus classiques sont ainsi notées $\mathcal{A}s$, $\mathcal{C}om$ et $\mathcal{L}ie$ et décrivent respectivement les algèbres associatives, les algèbres commutatives et les algèbres de Lie.

Le lien entre ces deux domaines apparaît avec la dualité de Koszul des opérades. Dans le cadre des algèbres associatives, la dualité de Koszul est dûe à

Priddy ([P]) et étudie les algèbres quadratiques

$$A = T(V)/R$$

avec $R \subset V \otimes V$. Parmi ces algèbres, les algèbres de Koszul sont celles dont le dual quadratique $A^{¡}$ est quasi-isomorphe à la construction bar BA :

$$A^{¡} \xrightarrow{\sim} BA$$

Les constructions homologiques qu'on fait sur les algèbres associatives peuvent être généralisées aux opérades. Les opérades quadratiques sont présentées avec des relations qui utilisent exactement deux opérations élémentaires. Parmi ces opérades, les opérades de Koszul sont celles dont le dual quadratique $\mathcal{P}^{¡}$ est quasi-isomorphe à la construction bar $B\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}^{¡} \xrightarrow{\sim} B\mathcal{P}$$

L'homologie des espaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ forme naturellement une opérade qu'on note $\mathcal{H}\overline{\mathcal{M}}$. La construction bar sur cette opérade est un complexe qui est proche d'une suite exacte issue de l'application de la théorie de Hodge mixte à l'ouvert

$$\mathcal{M}_{0,n} \subset \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$$

De plus l'exactitude de cette suite implique que l'opérade $\mathcal{H}\overline{\mathcal{M}}$ est de Koszul, et l'opérade duale est liée à l'homologie des espaces $\mathcal{M}_{0,n}$.

Un corollaire immédiat de ce fait est le théorème suivant, qui calcule les nombres de Betti des $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ connaissant ceux des $\mathcal{M}_{0,n}$.

Théorème 0.0.1. *Soient les deux séries formelles*

$$f(x,t) := x + t\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=0}^{n-2} b_k(\mathcal{M}_{0,n+1})t^k\right)\frac{x^n}{n!}$$

et

$$\overline{f}(x,t) := x + t\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=0}^{n-2} b_{2k}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1})t^k\right)\frac{x^n}{n!}$$

où on a noté b_k le k-ème nombre de Betti. Ces deux séries formelles vérifient

$$f(\overline{f}(x,t),-t) = \overline{f}(f(x,t),-t) = x$$

On peut calculer les nombres de Betti des $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ plus directement sous forme de relations de récurrence (voir par exemple [Ke]), mais il est frappant de constater que la dualité de Koszul des opérades donne directement l'égalité reliant les séries génératrices.

Organisation du mémoire

Dans une première partie, on rappelle la construction des espaces $\mathcal{M}_{0,n}$ et $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ et on leur applique la théorie de Hodge mixte après avoir décrit la structure stratifiée des $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$.

La deuxième partie est consacrée à une succincte présentation de la théorie des opérades. On s'étend sur la construction de l'opérade libre qui est nécessaire pour comprendre la construction bar des opérades.

La troisième partie est indépendante du reste du mémoire ; son but est de présenter un exemple "simple" où s'interpénètrent géométrie et opérades. Il s'agit de l'identification par F. Cohen ([C]) de l'opérade des tresses, construite à partir de l'espace de configuration de points dans le plan.

Dans une quatrième partie, on présente les constructions homologiques sur les opérades telles que la construction bar, ainsi que la dualité de Koszul des opérades. Un rappel préalable de la dualité de Koszul des algèbres associatives permet de motiver les définitions.

Enfin, la cinquième partie fait la jonction entre espaces de modules et opérades.

Conventions générales

Dans tout ce mémoire $\mathbb{K}$ désigne un corps de caractéristique zéro. Les espaces vectoriels et les algèbres ont tous pour base le corps $\mathbb{K}$, les produits tensoriels sont pris au-dessus de $\mathbb{K}$. Les groupes d'homologie et de cohomologie sont tous à valeurs dans $\mathbb{K}$. On notera donc $H_\bullet(X) = H_\bullet(X, \mathbb{K})$ et $H^\bullet(X) = H^\bullet(X, \mathbb{K})$.

Conventions sur les arbres

Tous les arbres considérés seront réduits, c'est-à-dire que tout sommet interne a au moins 2 arêtes entrantes.

Notons $\mathcal{T}(n)$ l'ensemble des (classes d'équivalence d') arbres abstraits à n feuilles et $\mathcal{PT}(n)$ l'ensemble des (classes d'équivalence d') arbres planaires à n feuilles.

Notons $\mathcal{T}^{(k)}(n)$ (resp. $\mathcal{PT}^{(k)}(n)$) l'ensemble des n-arbres (resp. n-arbres planaires) avec k sommets internes.

Notons $\mathcal{T}_k(n)$ (resp. $\mathcal{PT}_k(n)$) l'ensemble des n-arbres (resp. n-arbres planaires) avec k arêtes internes. On a

$$\mathcal{T}^{(k)}(n) = \mathcal{T}_{k-1}(n)$$

Pour un sommet interne v, on note $In(v) \geq 2$ le nombre d'entrées de v et $h(v) \geq 1$ la hauteur de v dans t, avec pour convention que la racine est de hauteur 1.

Notons $V(t)$ l'ensemble des sommets internes d'un arbre t. On fixe un ordre sur $V(t)$ comme suit : d'abord la racine, puis les sommets internes des arbres "entrants", dans l'ordre donné par la planarité.

On note aussi $E(t)$ l'ensemble des arêtes internes d'un arbre t.

Si t est un k-arbre (planaire ou pas) et qu'on se donne un i_1-arbre t_1, ..., un i_k-arbre t_k, alors on peut greffer les t_j sur les branches de t pour obtenir un n-arbre ($n = i_1 + ... + i_k$) qu'on note $s = t \circ (t_1, ..., t_k)$.

Chapitre 1

Géométrie des espaces de modules de courbes en genre zéro

1.1 Description de $\mathcal{M}_{0,n}$ et $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

1.1.1 L'espace de modules de courbes en genre zéro

Définition 1.1.1. Pour $n \geq 3$, l'**espace de modules de courbes** en genre zéro, noté $\mathcal{M}_{0,n}$, est l'ensemble des surfaces de Riemann de genre zéro à n points marqués, modulo les homographies.

Si, pour un espace topologique X, on note

$$X_0^n = \{(x_1, ..., x_n) \in X^n \mid \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$$

l'espace de configuration de n points dans X, alors on a

$$\mathcal{M}_{0,n} = \left(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\right)^n_0 / \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$$

où l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ est diagonale.

Comme cette action est triplement transitive, on peut fixer trois points en $0, 1, \infty$ et ainsi avoir

$$\mathcal{M}_{0,n} \cong \left(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}\right)^{n-3}_0$$

Par cette présentation il devient clair que $\mathcal{M}_{0,n}$ est une variété complexe de dimension $n - 3$.

1.1.2 Une bonne compactification

Les espaces de modules de courbes ont des bonnes compactifications $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ construits par Deligne, Mumford et Knudsen ([DM], [Kn]).

Définition 1.1.2. Une **courbe nodale** de genre zéro est une courbe projective dont les seules singularités sont des points doubles, dont chaque composante lisse est isomorphe à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, et dont le graphe d'intersection est de genre zéro.

Un automorphisme d'une courbe nodale est la donnée d'un automorphisme de chaque composante lisse qui fixe les points singuliers.

Définition 1.1.3. On appelle n-**courbe stable** de genre zéro une courbe nodale C avec n points distincts $(x_1, ..., x_n)$ parmi les points lisses de C telle que chaque composante lisse de C contienne au moins 3 points spéciaux (un point spécial étant un point singulier ou l'un des x_i).

Définition 1.1.4. On note $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ l'ensemble des n-courbes stables de genre zéro, modulo les automorphismes.

Il est clair que $\mathcal{M}_{0,n} \subset \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, et on a le théorème suivant :

Théorème 1.1.5. *Pour tout $n \geq 3$, $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ est une variété projective lisse de dimension $n-3$, et le complémentaire*

$$\partial\overline{\mathcal{M}}_{0,n} = \overline{\mathcal{M}}_{0,n} - \mathcal{M}_{0,n}$$

est un diviseur à croisements normaux.

1.1.3 Arbres et stratification de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

A toute courbe stable $(C, x_0, ..., x_n) \in \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$, on associe un n-arbre abstrait

$$t = t(C, x_0, ..., x_n) \in \mathcal{T}(n)$$

de la manière suivante :

- Les sommets (internes) de t correspondent aux composantes lisses de C, deux sommets internes étant reliés par une arête si les composantes lisses s'intersectent.
- Les feuilles correspondent aux points marqués x_1,..., x_n, la feuille étiquetée i étant attachée au sommet correspondant à la composante lisse de C contenant x_i.
- La racine est attachée au sommet correspondant à la composante lisse de C contenant x_0.

La définition des $(n+1)$-courbes stables de genre zéro assure que $t(C, x_0, ..., x_n)$ est bien un n-arbre et qu'il est réduit.

Définition 1.1.6. Pour tout n-arbre réduit $t \in \mathcal{T}(n)$, notons

$$\mathcal{M}(t) \subset \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$$

l'ensemble des $(n+1)$-courbes stables de genre zéro dont l'arbre associé est t. On note $\overline{\mathcal{M}}(t)$ l'adhérence de $\mathcal{M}(t)$.

On a alors des isomorphismes naturels

$$\mathcal{M}(t) \cong \prod_{v \in V(t)} \mathcal{M}_{0,In(v)+1} \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{M}}(t) \cong \prod_{v \in V(t)} \overline{\mathcal{M}}_{0,In(v)+1}$$

La codimension de $\mathcal{M}(t)$ dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$ est le nombre d'arêtes internes de t. Notamment les $\overline{\mathcal{M}}(t)$, pour t à une arête interne, sont les composantes irréductibles du diviseur à l'infini $\partial\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$.

La stratification qu'on vient de décrire a une combinatoire très riche. On en trouvera une description dans [BFLSV], par exemple.

1.2 Cohomologie et structures de Hodge

1.2.1 Calcul de la cohomologie de $\mathcal{M}_{0,n}$

Rappelons qu'on a noté

$$\mathbb{C}_0^n = \{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \forall i \neq j, z_i \neq z_j\}$$

l'espace de configuration de n points dans le plan. Le calcul de l'algèbre de cohomologie de $\mathbb{C}_0^n$ est dû à Arnol'd ([A]).

Théorème 1.2.1. *L'anneau de cohomologie de $\mathbb{C}_0^n$ est l'anneau anticommutatif gradué engendré en degré 1 par des éléments $\omega_{i,j}$, $1 \leq i \neq j \leq n$, avec les relations :*
- $\omega_{j,i} = \omega_{i,j}$
- *(relation d'Arnol'd)* $\omega_{i,j}\omega_{j,k} + \omega_{j,k}\omega_{k,i} + \omega_{k,i}\omega_{i,j} = 0$.

Et on peut choisir pour $\omega_{i,j}$ la classe de la forme différentielle, notée de la même façon par abus :

$$\omega_{i,j} = \frac{1}{2i\pi}\frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j}$$

La démonstration s'appuie sur la fibration $\mathbb{C}_0^{n+1} \to \mathbb{C}_0^n$; le théorème de Leray-Hirsch donne directement le polynôme de Poincaré de $\mathbb{C}_0^n$:

$$P_{\mathbb{C}_0^n}(t) = (1+t)(1+2t)...(1+(n-1)t)$$

De plus, on a un isomorphisme

$$\mathbb{C}_0^n \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathcal{M}_{0,n+1}$$

donné par

$$(z_1, ...z_n) \mapsto (z_1, z_2 - z_1, \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}, ..., \frac{z_n - z_1}{z_2 - z_1})$$

Ainsi on a

$$H^\bullet(\mathbb{C}_0^n) \cong H^\bullet(\mathbb{C}^*) \otimes H^\bullet(\mathcal{M}_{0,n+1})$$

Si on veut simplement calculer les nombres de Betti de $\mathcal{M}_{0,n+1}$, cette remarque donne directement le polynôme de Poincaré de $\mathcal{M}_{0,n+1}$:

$$P_{\mathcal{M}_{0,n+1}}(t) = (1+2t)(1+3t)...(1+(n-1)t)$$

On peut aussi identifier la structure de Hodge mixte sur la cohomologie de $\mathcal{M}_{0,n}$:

Corollaire 1.2.2. *Pour tout k, la structure de Hodge mixte de $H^k(\mathcal{M}_{0,n})$ est pure de poids $2k$.*

Démonstration. D'après ce qui précède, la structure de Hodge mixte de $H^k(\mathbb{C}_0^n)$ est pure de poids $2k$, et on a une injection $H^k(\mathcal{M}_{0,n}) \hookrightarrow H^k(\mathbb{C}_0^n)$ □

1.2.2 Application de la théorie de Hodge mixte

Une suite spectrale de Deligne

On décrit brièvement une suite spectrale dûe à Deligne ([D]). On trouvera aussi des explications dans [V].

Soit X une variété complexe projective lisse, U un ouvert lisse de X tel que le complémentaire $D = X - U$ est un diviseur à croisements normaux. On se restreint au cas où D est union de diviseurs irréductibles lisses :

$$D = \bigcup_{i \in I} D_i$$

où on a fixé un ordre total sur I.

Si K est un sous-ensemble de I, on note D_K la sous-variété lisse de codimension k

$$D_K = \bigcap_{i \in K} D_i$$

et pour tout entier k, on pose

$$D^{(k)} = \coprod_{|K|=k} D_K$$

On note $j_k : D^{(k)} \to X$ l'application naturelle.

Soit $\Omega_X^\bullet(\log D)$ le faisceau des formes différentielles sur X à singularités logarithmiques sur D, muni de sa filtration par le poids, notée W. D'après un résultat classique dû à Deligne, le complexe $\Omega_X^\bullet(\log D)$ calcule la cohomologie de l'ouvert U.

L'application résidu de Poincaré donne des isomorphismes

$$\mathrm{gr}_k^W \Omega_X^j(\log D) \xrightarrow{\cong} (j_k)_* \left(\Omega_{D^{(k)}}^{j-k}\right)$$

La suite spectrale associée vérifie

$$E_1^{-p,q} = H^{-2p+q}(D^{(p)})$$

et la différentielle d_1 est, aux signes près, induite par les morphismes de Gysin des inclusion $D_K \hookrightarrow D_L$. Elle converge vers

$$E_\infty^{-p,q} = \mathrm{gr}_p^W H^{-p+q}(U)$$

et dégénère en E_2.

Application aux espaces de modules de courbes en genre zéro

On applique la suite spectrale définie ci-dessus au cas où $U = \mathcal{M}_{0,n+1}$ et $X = \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$. Rappelons qu'on note $\mathcal{T}_k(n)$ l'ensemble des n-arbres à k arêtes internes.

Pour tout entier k on a

$$D^{(k)} = \coprod_{t \in \mathcal{T}_k(n)} \overline{\mathcal{M}}(t)$$

et donc le terme E_1 de la suite spectrale est donné par

$$E_1^{-p,q} = \bigoplus_{t\in\mathcal{T}_p(n)} H^{-2p+q}(\overline{\mathcal{M}}(t))$$

Le théorème 1.2.2 implique qu'en-dehors des

$$E_2^{-k,2k} = H^k(\mathcal{M}_{0,n+1})$$

tous les termes de la limite de la suite spectrale sont nuls.

On a donc pour tout q impair une suite exacte

$$\ldots \to \bigoplus_{t\in\mathcal{T}_2(n)} H^{q-4}(\overline{\mathcal{M}}(t)) \to \bigoplus_{t\in\mathcal{T}_1(n)} H^{q-2}(\overline{\mathcal{M}}(t)) \to H^q(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}) \to 0$$

qui permet de montrer par récurrence sur q impair et n le fait suivant :

Proposition 1.2.3. *Les espaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$ n'ont pas de cohomologie en degré impair.*

Pour q pair, on obtient des résolutions des groupes de cohomologie de $\mathcal{M}_{0,n+1}$.

Proposition 1.2.4. *Pour tout entier p on a une suite exacte*

$$0 \to H^p(\mathcal{M}_{0,n+1}) \to \bigoplus_{t\in\mathcal{T}_p(n)} H^0(\overline{\mathcal{M}}(t)) \to \bigoplus_{t\in\mathcal{T}_{p-1}(n)} H^2(\overline{\mathcal{M}}(t)) \to \ldots$$

$$\ldots \to \bigoplus_{t\in\mathcal{T}_1(n)} H^{2p-2}(\overline{\mathcal{M}}(t)) \to H^{2p}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}) \to 0$$

et les flèches à partir de la troisième sont données, aux signes près, par les morphismes de Gysin des inclusions

$$\overline{\mathcal{M}}(t) \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}(t')$$

Sur les nombres de Betti de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$

L'espace $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$ peut être construit à partir de $\left(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\right)^{n-2}$ en procédant à des éclatements successifs. On peut alors déterminer récursivement ses nombres de Betti $b_k(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1})$.

Dans [Ke], Keel utilise une méthode similaire et donne une formule de récurrence pour calculer ces entiers. On peut alors démontrer la formule suivante, qui la résume :

Théorème 1.2.5. *Soient les deux séries formelles*

$$f(x,t) := x + t\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=0}^{n-2} b_k(\mathcal{M}_{0,n+1})t^k\right)\frac{x^n}{n!}$$

et

$$\overline{f}(x,t) := x + t\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=0}^{n-2} b_{2k}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1})t^k\right)\frac{x^n}{n!}$$

où on a noté b_k le k-ème nombre de Betti. Ces deux séries formelles vérifient

$$f(\overline{f}(x,t),-t) = \overline{f}(f(x,t),-t) = x$$

Chapitre 2

Opérades algébriques

2.1 Opérades

On résume ici les bases de la théorie des opérades algébriques, présentée à la manière moderne comme dans [MMS], [LV] ou [GJ].

2.1.1 $\mathbb{S}$-modules et foncteurs de Schur

Définition 2.1.1. On appelle $\mathbb{S}$-**module** une collection $M = \{M(n)\}_{n\geq 1}$, où chaque $M(n)$ est une représentation linéaire (à gauche) du groupe symétrique $\mathbb{S}_n$. Un morphisme $\Phi : M \to N$ de $\mathbb{S}$-modules est une collection d'applications linéaires $\{\Phi_n : M(n) \to N(n)\}_{n\geq 1}$, où chaque Φ_n est $\mathbb{S}_n$-équivariant.

On note $\mathbb{S}$-`Mod` la catégorie des $\mathbb{S}$-modules. Remarquons que notre définition n'est pas classique puisqu'en général les $\mathbb{S}$-modules peuvent avoir une composante $M(0)$. Cela étant dit, tous les $\mathbb{S}$-modules que nous rencontrerons vérifieront $M(0) = 0$, qu'on ne mentionnera donc jamais.

Définition 2.1.2. Le **foncteur de Schur** associé à un $\mathbb{S}$-module M est le foncteur $M : \mathtt{Vect} \to \mathtt{Vect}$ défini par

$$M(V) = \bigoplus_{n\geq 1} M(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} V^{\otimes n}$$

On se permet de noter de la même façon un $\mathbb{S}$-module et le foncteur de Schur correspondant. Dans beaucoup de contextes, il est équivalent de travailler au niveau des $\mathbb{S}$-modules ou des foncteurs de Schur, comme l'explique le fait suivant (pour une preuve et une généralisation, voir l'article [J] d'A. Joyal) :

Proposition 2.1.3. *Si deux $\mathbb{S}$-modules M et N déterminent des foncteurs de Schur isomorphes, alors on a un isomorphisme de $\mathbb{S}$-modules canonique $M \cong N$.*

Définition 2.1.4. Si M et N sont deux $\mathbb{S}$-modules, on définit le $\mathbb{S}$-module $M \circ N$ par la formule :

$$(M \circ N)(n) = \bigoplus_{k\geq 1} M(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} \left(\bigoplus \mathrm{Ind}^{\mathbb{S}_n}_{\mathbb{S}_{i_1} \times \ldots \times \mathbb{S}_{i_k}} (N(i_1) \otimes \ldots \otimes N(i_k)) \right)$$

où la deuxième somme directe est prise sur les k-uplets $(i_1, ..., i_k)$ d'entiers positifs tels que $i_1 + ... + i_k = n$.

La notation est justifiée par le fait suivant :

Proposition 2.1.5. *Si M et N sont deux $\mathbb{S}$-modules, alors au niveau des foncteurs de Schur on a $(M \circ N)(V) = M(N(V))$.*

On vérifie que l'opération $\circ$ fait de $\mathbb{S}$-`Mod` une catégorie monoïdale unitaire, l'unité étant donnée par le $\mathbb{S}$-module $I = \{\mathbb{K}, 0, 0, ...\}$, dont le foncteur de Schur est l'identité de `Vect`.

Remarque 2.1.6. *Soit E un espace vectoriel, considérons le $\mathbb{S}$-modules M_E tel que $M_E(1) = E$ et $M_E(n) = 0$ pour $n \neq 1$. Le foncteur de Schur associé est $M_E(V) = E \otimes V$.*

Si E et F sont deux espaces vectoriels, alors $M_E \circ M_F = M_{E\otimes F}$. Ainsi la catégorie monoïdale $(\mathtt{Vect}, \otimes, \mathbb{K})$ est une sous-catégorie de la catégorie monoïdale des $\mathbb{S}$-modules.

2.1.2 Opérades algébriques

Définition 2.1.7. Une **opérade** (algébrique) est un monoïde dans la catégorie des $\mathbb{S}$-modules, c'est-à-dire un $\mathbb{S}$-module $\mathcal{P}$ et des morphismes de $\mathbb{S}$-modules $\gamma : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ et $\iota : I \to \mathcal{P}$ qui font commuter les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}\circ\mathcal{P}\circ\mathcal{P} \arrow[r, "\gamma\circ I"] \arrow[d, "I\circ\gamma"'] & \mathcal{P}\circ\mathcal{P} \arrow[d, "\gamma"] \\ \mathcal{P}\circ\mathcal{P} \arrow[r, "\gamma"'] & \mathcal{P} \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} I\circ\mathcal{P} \arrow[r, "\iota\circ I"] \arrow[dr, equal] & \mathcal{P}\circ\mathcal{P} \arrow[d, "\gamma"] & \mathcal{P}\circ I \arrow[l, "I\circ\iota"'] \arrow[dl, equal] \\ & \mathcal{P} & \end{tikzcd}$$

Remarquons qu'une opérade est notamment une monade sur `Vect` au sens de McLane ([Mc]).

On peut rendre cette définition plus explicite. Tout d'abord, un morphisme $\gamma : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ donne des morphismes dits de **composition opéradique**

$$\gamma_{i_1,...,i_k} : \mathcal{P}(k) \otimes \mathcal{P}(i_1) \otimes ... \otimes \mathcal{P}(i_k) \to \mathcal{P}(i_1 + ... + i_k)$$

et on notera $\gamma_{i_1,...,i_k}(\mu, \mu_1, ..., \mu_k) = \mu \circ (\mu_1, ..., \mu_k)$ (cette notation sera justifiée plus tard).

Ensuite la donnée d'un morphisme $\iota : I \to \mathcal{P}$ est équivalente à la donnée d'un élément **identité**, noté id, dans $\mathcal{P}(1)$.

Enfin, ces éléments définissent une opérade si et seulement si ils vérifient :

- Condition d'équivariance 1 :

$$(\sigma.\mu) \circ (\mu_1, ...\mu_k) = \mu \circ (\mu_{\sigma(1)}, ..., \mu_{\sigma(k)})$$

- Condition d'équivariance 2 :

$$(\sigma.\mu) \circ (\sigma_1.\mu_1, ..., \sigma_k.\mu_k) = (\sigma[\sigma_1, ..., \sigma_k]).(\mu \circ (\mu_1, ..., \mu_k)$$

  où $\sigma[\sigma_1, ..., \sigma_k]$ est la permutation définie par blocs par σ et les σ_j.
- Condition d'associativité :

$$\mu\circ(\mu_1 \circ (\mu_{1,1}, ..., \mu_{1,k_1}), ..., \mu_n \circ (\mu_{n,1}, ..., \mu_{n,k_n})) = (\mu\circ(\mu_1, ..., \mu_n))\circ(\mu_{1,1}, ..., \mu_{k,k_n})$$

– Condition d'unité :

$$\mu \circ (id, ..., id) = \mu = id \circ \mu$$

Pour $\mu \in \mathcal{P}(n)$, l'entier n sera appelé l'**arité** de μ.

Définition 2.1.8. Pour un espace vectoriel V et $n \geq 1$ on note

$$\mathcal{E}nd_V(n) = \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V)$$

muni de l'action naturelle de $\mathbb{S}_n$. Ce $\mathbb{S}$-module est muni d'une structure opéradique avec

$$f \circ (f_1, ..., f_k)(x_{1,1}, ..., x_{k,i_k}) = f(f_1(x_{1,1}, ..., x_{1,i_1}), ..., f_k(x_{k,1}, ..., x_{k,i_k}))$$

l'élément id étant l'identité de V. Cette opérade est appelée l'**opérade d'endomorphisme**.

Définition 2.1.9. Un morphisme d'opérades $\Phi : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ est un morphisme de monoïdes, c'est-à-dire un morphisme de $\mathbb{S}$-modules qui fait commuter les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \arrow[r, "\Phi\circ\Phi"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{P}}"'] & \mathcal{Q} \circ \mathcal{Q} \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{Q}}"] \\ \mathcal{P} \arrow[r, "\Phi"'] & \mathcal{Q} \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "\iota_{\mathcal{P}}"'] \arrow[dr, "\iota_{\mathcal{Q}}"] & \\ \mathcal{P} \arrow[rr, "\Phi"'] & & \mathcal{Q} \end{tikzcd}$$

De manière plus explicite, un morphisme $\Phi : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ est composée de morphismes $\mathbb{S}_n$-équivariants $\Phi_n : \mathcal{P}(n) \to \mathcal{Q}(n)$ tels que

$$\Phi_n(\mu \circ (\mu_1, ..., \mu_k)) = \Phi_k(\mu) \circ (\Phi_{i_1}(\mu_1), ..., \Phi_{i_k}(\mu_k))$$

et

$$\Phi_1(id_{\mathcal{P}}) = id_{\mathcal{Q}}$$

Les opérades forment alors une catégorie notée $\mathtt{Op}$.

De même que les groupes ne sont rien sans les ensembles sur lesquels ils agissent, les opérades ne sont rien sans leurs algèbres. Une algèbre sur $\mathcal{P}$ est un espace vectoriel muni d'opérations multilinéaires qui réalisent explicitement les opérations abstraites de $\mathcal{P}$:

Définition 2.1.10. Une **algèbre** sur une opérade $\mathcal{P}$, aussi appelée $\mathcal{P}$-algèbre, est la donnée d'un espace vectoriel A et d'un morphisme d'opérades $\mathcal{P} \to \mathcal{E}nd_A$.

Cela revient à se donner des morphismes $\mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \to A$ qui respectent l'action de $\mathbb{S}_n$, les compositions et les identités.

Définition 2.1.11. Un morphisme entre deux $\mathcal{P}$-algèbres A et B est une application linéaire $f : A \to B$ qui fait commuter les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \arrow[r] \arrow[d, "id\otimes f^{\otimes n}"'] & A \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{P}(n) \otimes B^{\otimes n} \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Les $\mathcal{P}$-algèbres forment alors une catégorie notée $\mathcal{P}$-`Alg`.

Si V est un espace vectoriel, on remarque que
- le morphisme γ de composition opéradique permet de munir $\mathcal{P}(V)$ d'une structure naturelle de $\mathcal{P}$-algèbre
- le morphisme ι permet de définir une inclusion naturelle $V \hookrightarrow \mathcal{P}(V)$ d'image $\mathbb{K}id \otimes V$.

Proposition 2.1.12. *Munie de ce morphisme $V \hookrightarrow \mathcal{P}(V)$, $\mathcal{P}(V)$ est la $\mathcal{P}$-algèbre libre sur V.*

De plus, pour $V = \mathbb{K}^n$, les morphismes structurels

$$\mathcal{P}(n) \to \mathrm{Hom}((\mathcal{P}(\mathbb{K}^n))^{\otimes n}, \mathcal{P}(\mathbb{K}^n))$$

sont injectifs et les éléments de $\mathcal{P}(n)$ peuvent donc être vus comme des opérations n-aires dans une certaine $\mathcal{P}$-algèbre.

Cette remarque justifie la terminologie de "composition opéradique", d'"identité" et d'"arité", ainsi que la notation

$$\gamma_{i_1,...,i_k}(\mu, \mu_1, ..., \mu_k) = \mu \circ (\mu_1, ..., \mu_k)$$

Les algèbres associatives unitaires sont des opérades

Soit R un espace vectoriel, considérons le $\mathbb{S}$-module M_R défini par la remarque 2.1.6. Une structure d'opérade sur M_R est équivalente à une structure d'algèbre associative unitaire sur R. Une structure d'algèbre sur cette opérade est équivalente à une structure de R-module (à gauche).

En ce sens, la notion d'opérade généralise la notion d'algèbre associative unitaire.

L'opérade $\mathcal{A}s$ des algèbres associatives

Il existe une opérade, notée $\mathcal{A}s$, dont les algèbres sont exactement les algèbres associatives (non nécessairement unitaires). Le foncteur de Schur associé est

$$\mathcal{A}s(V) = \widetilde{T}(V) = \bigoplus_{n \geq 1} V^{\otimes n}$$

et on a $\mathcal{A}s(n) = \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$ la représentation régulière de $\mathbb{S}_n$, pour $n \geq 1$.

Un élément de base σ est représenté par l'opération n-aire $\mu(x_1, ..., x_n) = x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(n)}$. La composition $\mathcal{A}s(\mathcal{A}s(V)) \to \mathcal{A}s(V)$ est donnée par la composition des polynômes (non commutatifs).

L'opérade $\mathcal{C}om$ des algèbres commutatives

Il existe une opérade, notée $\mathcal{C}om$, dont les algèbres sont les algèbres commutatives (et associatives, non nécessairement unitaires). Le foncteur de Schur associé est

$$\mathcal{C}om(V) = \widetilde{S}(V) = \bigoplus_{n \geq 1} (V^{\otimes n})_{\mathbb{S}_n}$$

et on a $\mathcal{C}om(n) = \mathbb{K}$ muni de la représentation triviale de $\mathbb{S}_n$, pour $n \geq 1$.

L'opération n-aire de base est $\mu_n(x_1, ..., x_n) = x_1...x_n$. La composition $\mathcal{C}om(\mathcal{C}om(V)) \to \mathcal{C}om(V)$ est donnée par la composition des polynômes.

L'opérade $\mathcal{L}ie$ des algèbres de Lie

L'opérade $\mathcal{L}ie$, régissant les algèbres de Lie, est plus difficile à décrire. Notons $\mathrm{Lie}(V)$ l'algèbre de Lie libre sur un espace vectoriel V, vue comme sous-espace vectoriel de l'algèbre tensorielle réduite $\widetilde{T}(V)$.

On peut montrer que le foncteur $V \mapsto \mathrm{Lie}(V)$ est bien un foncteur de Schur de coefficients $\mathcal{L}ie(n)$. Alors on peut définir la composition $\gamma : \mathrm{Lie}(\mathrm{Lie}(V)) \to \mathrm{Lie}(V)$ comme la composition des "polynômes de Lie", l'unité $\iota : V \to \mathrm{Lie}(V)$ comme l'inclusion canonique, et vérifier que cela forme bien une opérade.

Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt donne un isomorphisme naturel $\widetilde{S}(\mathrm{Lie}(V)) \cong U(\mathrm{Lie}(V))$ et donc $\widetilde{S}(\mathrm{Lie}(V)) \cong \widetilde{T}(V)$, ce qui donne un isomorphisme de $\mathbb{S}$-modules

$$\mathcal{A}s \cong \mathcal{C}om \circ \mathcal{L}ie$$

Cet isomorphisme permet notamment de calculer la dimension des espaces $\mathcal{L}ie(n)$:

Proposition 2.1.13. *On a* $\dim(\mathcal{L}ie(n)) = (n-1)!$ *pour tout* $n \geq 1$.

2.1.3 Opérade libre, présentation d'une opérade

On a un foncteur `Op` $\to$ $\mathbb{S}$-`Mod` qui oublie la structure opéradique sur un $\mathbb{S}$-module.

On cherche à en construire un adjoint à gauche, c'est-à-dire une opérade libre sur un $\mathbb{S}$-module M, qu'on notera $\mathcal{T}M$.

Considérons d'abord un $\mathbb{S}$-module M tel que $M(1) = 0$.

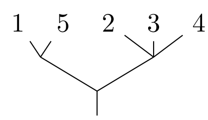
Définition 2.1.14. Pour un $\mathbb{S}$-module M et un arbre planaire $t \in \mathcal{PT}(n)$, on définit

$$M(t) = \bigotimes_{v \in V(t)} M(In(v))$$

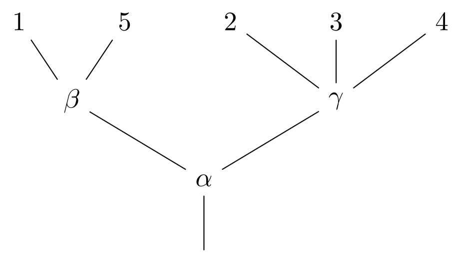
avec comme convention que si $t \in \mathcal{PT}(1)$ est l'unique arbre sans sommet interne, le côté droit de cette égalité est le corps $\mathbb{K}$.

Il est pratique de voir $M(t)$ comme l'espace vectoriel des décorations sur l'arbre t par des éléments de M, et un élément de $M(t)$ comme une somme d'arbres décorés.

Exemple 2.1.15. *Si t est l'arbre*



alors $M(t)$ est engendré par les arbres décorés

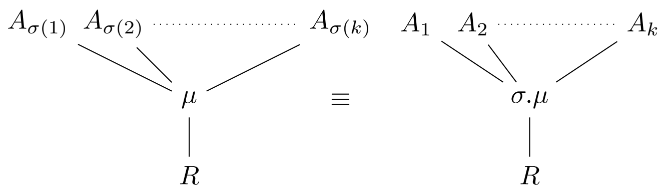


avec $\alpha \in M(2)$, $\beta \in M(2)$, $\gamma \in M(3)$.

Définition 2.1.16. On pose

$$\mathcal{T}M(n) = \left(\bigoplus_{t \in \mathcal{PT}(n)} M(t) \right) / \equiv$$

où $\equiv$ est la relation d'équivalence engendrée par



où k est un entier quelconque, $\mu \in M(k)$, $A_1, ..., A_k, R$ des arbres décorés.

Le groupe symétrique $\mathbb{S}_n$ agit sur $\mathcal{T}M(n)$ par permutation des feuilles des n-arbres.

Remarque 2.1.17. *D'après la définition de la relation d'équivalence $\equiv$, on a*

$$\mathcal{T}M(n) \cong \bigoplus_{t \in \mathcal{T}(n)} M(t)$$

On trouve plus souvent la définition précédente avec cette nouvelle expression, qui a le mérite de ne pas comporter de quotient, mais nous semble moins canonique. En effet, si t est un arbre abstrait et qu'on veut savoir à quelle opération explicite correspond un élément de $M(t)$, il est préférable d'avoir fixé un ordre sur les entrées de chaque noeud interne, ce qui est équivalent à considérer que l'arbre est planaire. Il en va de même pour l'action des groupes symétriques.

Reste à préciser la structure opéradique. L'identité est donnée par l'unité de $\mathbb{K} = \mathcal{T}M(1)$.

Pour $t \in \mathcal{PT}(k)$, $t_1 \in \mathcal{PT}(i_1)$, ..., $t_k \in \mathcal{PT}(i_k)$, on remarque que

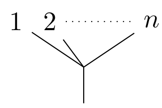
$$V(t \circ (t_1, ..., t_k)) = V(t) \sqcup V(t_1) \sqcup ... \sqcup V(t_k)$$

on a donc un (iso)morphisme naturel

$$M(t) \otimes M(t_1) \otimes ... \otimes M(t_k) \to M(t \circ (t_1, ..., t_k))$$

qui après passage au quotient donne les opérations de composition de $\mathcal{T}M$. On vérifie que ces opérations définissent bien une structure d'opérade.

Pour tout $n \geq 1$ notons c_n l'arbre suivant, souvent appelé **corolle** :



On a $M(c_n) = M(n)$, ce qui définit une injection $\mathbb{S}_n$-équivariante

$$M(n) \hookrightarrow \mathcal{T}M(n)$$

Proposition 2.1.18. *L'opérade $\mathcal{T}M$ munie du morphisme $M \hookrightarrow \mathcal{T}M$ est l'opérade libre sur le $\mathbb{S}$-module M.*

On introduit une graduation sur l'opérade libre : on appelle **poids** d'un élément de $\mathcal{T}M$ le nombre d'opérations élémentaires, c'est-à-dire venant de M, utilisées pour le construire.

Plus précisément, rappelons qu'on a noté $\mathcal{T}_n^{(r)}$ (resp. $\mathcal{PT}_n^{(r)}$) l'ensemble des n-arbres (resp. n-arbres planaires) avec r sommets internes.

Définition 2.1.19. La graduation par le poids sur $\mathcal{T}M$ est définie, pour $r \geq 0$, par

$$\mathcal{T}M^{(r)}(n) = \left(\bigoplus_{t \in \mathcal{PT}^{(r)}(n)} M(t) \right) / \equiv$$

ou encore

$$\mathcal{T}M^{(r)}(n) = \bigoplus_{t \in \mathcal{T}^{(r)}(n)} M(t)$$

en tenant compte de la remarque 2.1.17

Les $\mathcal{T}M^{(r)}$ sont des $\mathbb{S}$-modules, notamment on a $\mathcal{T}M^{(0)} = I$ et $\mathcal{T}M^{(1)} = M$.

Dans le cas où on ne suppose pas que $M(1) = 0$, on peut aussi construire l'opérade libre sur M ; il suffit de remplacer les arbres réduits par les arbres non nécessairement réduits.

Exemple 2.1.20. *Si M est l'espace vectoriel V concentré en arité 1, alors l'opérade libre sur M est l'algèbre tensorielle $T(V)$ concentrée en arité 1. La graduation par le poids est la graduation classique $T(V) = \bigoplus_{r \geq 0} V^{\otimes r}$.*

Si on a défini des opérades libres, c'est pour les quotienter et aboutir à la notion de présentation d'une opérade ; on introduit donc la notion d'idéal opéradique :

Définition 2.1.21. Un **idéal opéradique** d'une opérade $\mathcal{P}$ est un sous-$\mathbb{S}$-module I de $\mathcal{P}$ tel qu'on ait $\mu \circ (\mu_1, ..., \mu_k) \in I$ dès que μ ou l'un de μ_j est dans I.

Cette propriété assure que le quotient $\mathcal{P}/I$ défini par $(\mathcal{P}/I)(n) = \mathcal{P}(n)/I(n)$ est une opérade.

On a aussi la notion d'idéal engendré par une famille d'opérations F, qui est le sous-$\mathbb{S}$-module engendré par les $\mu \circ (\mu_1, ..., \mu_k) \in I$ où au moins μ ou l'un de μ_j est dans F.

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour construire des opérades décrivant des types d'algèbres plus complexes que $\mathcal{A}s$, $\mathcal{C}om$ ou $\mathcal{L}ie$.

Informellement, un type d'algèbre `P` est la donnée d'un certain nombre d'opérations μ_i ayant une arité n_i, avec des contraintes de symétrie pour chaque opération, et de relations multilinéaires entre elles.

Une algèbre de type `P` est alors un espace vectoriel A muni d'opérations $\mu_i : A^{\otimes n_i} \to A$ vérifiant les contraintes de symétries et les relations prescrites par `P`. Cette définition englobe les algèbres associatives, commutatives et de Lie, mais aussi des types plus compliqués comme les algèbres de Poisson. La notion d'opérade nous permet de préciser la notion de type d'algèbre.

Définition 2.1.22. Un **type d'algèbre** `P` est un couple (E, R) où E est un $\mathbb{S}$-module et R un sous-$\mathbb{S}$-module de $\mathcal{T}E$. Un élément de E est appelé une **opération élémentaire**, et un élément de R une **relation**.

L'action des groupes symétriques sur E traduit les contraintes de symétrie du type d'algèbre considéré.

Pour un type d'algèbres $\texttt{P} = (E, R)$, on note

$$\mathcal{P}(E, R) = \mathcal{T}E/(R)$$

où (R) est l'idéal opéradique engendré par R. On a la propriété suivante :

Proposition 2.1.23. *Les algèbres sur $\mathcal{P}(E, R)$ sont exactement les algèbres de type* `P`.

Exemple 2.1.24. *On a $\mathcal{A}s = \mathcal{P}(E, R)$ où E est le $\mathbb{S}$-module $\mathbb{K}[\mathbb{S}_2] = \mathbb{K}\mu \oplus \mathbb{K}\tau.\mu$ concentré en arité 2, et R le $\mathbb{S}$-module engendré par l'associateur*

$$\mu \circ (\mu, id) - \mu \circ (id, \mu)$$

Exemple 2.1.25. *On a $\mathcal{C}om = \mathcal{P}(E, R)$ où E est le $\mathbb{S}$-module $\mathbb{K}\mu$ concentré en arité 2, muni de la représentation triviale de $\mathbb{S}_2$, et R est le $\mathbb{S}$-module engendré par l'associateur*

$$\mu \circ (\mu, id) - \mu \circ (id, \mu)$$

Exemple 2.1.26. *On a $\mathcal{L}ie = \mathcal{P}(E, R)$ où E est le $\mathbb{S}$-module $\mathbb{K}l$ concentré en arité 2, muni de la représentation signature de $\mathbb{S}_2$, et R est le $\mathbb{S}$-module engendré par la relation de Jacobi*

$$l \circ (l, id) + \sigma.(l \circ (l, id)) + \sigma^2.(l \circ (l, id))$$

où on a noté σ le cycle $(1\ 2\ 3) \in \mathbb{S}_3$.

Exemple 2.1.27. *On appelle algèbre de Poisson un espace vectoriel A muni de deux opérations binaires . et $[.,.]$ telles que*

- *l'opération . munit A d'une structure d'algèbre commutative*
- *l'opération $[.,.]$ munit A d'une structure d'algèbre de Lie*
- *ces deux opérations sont reliées par la relation de Poisson*

$$[a, bc] = [a, b]c + b[a, c]$$

L'opérade correspondante est notée $\mathcal{P}ois$, et on laisse le soin au lecteur d'expliciter la présentation de cette opérade qui découle de la définition des algèbres de Poisson.

2.2 Des opérades dans d'autres catégories

2.2.1 D'autres types d'opérades

Dans les définitions de $\mathbb{S}$-modules et d'opérades données ci-dessus, la catégorie `Vect` des espaces vectoriels joue un rôle prépondérant. En effet, les $\mathbb{S}$-modules sont composés d'espaces vectoriels, les foncteurs de Schur sont des endofoncteurs de `Vect`, les algèbres sur les opérades sont des espaces vectoriels.

On peut remplacer la catégorie `Vect` par une autre catégorie `C`. D'après [GJ], il est de bon ton d'imposer à `C` les axiomes suivants :
- elle est munie d'une structure $(\mathtt{C}, \otimes, \mathbf{1})$ de catégorie monoïdale unitaire symétrique
- elle admet des limites et des colimites indexées par des ensembles
- pour tout objet X de `C`, le foncteur $X \otimes (.)$ préserve les colimites

On note $\mathbb{S}$ le monoïde symétrique, dont les objets sont les entiers positifs et tels que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(k,k) = \mathbb{S}_k$. Alors on définit la catégorie des $\mathbb{S}$-objets sur `C` comme $\mathbb{S}\text{-}\mathtt{Obj}_{\mathtt{C}} = \mathtt{Fonct}(\mathbb{S}, \mathtt{C})$.

En copiant ce qui précède, on définit le foncteur de Schur noté

$$X : \mathtt{C} \to \mathtt{C}$$

associé à un $\mathbb{S}$-objet X et la catégorie $\mathtt{Op}_{\mathtt{C}}$ des opérades sur `C`. Notamment, les monoïdes de `C` sont des opérades concentrées en arité 1. On définit aussi la notion d'algèbre sur une opérade et la construction de l'opérade libre et des présentations d'opérades se généralise aisément.

Outre la catégorie `Vect`, on a les exemples fondamentaux suivants :

Opérades ensemblistes

On peut prendre pour `C` la catégorie `Ens` des ensembles, dont le produit tensoriel est le produit cartésien. Une opérade sur `Ens` est appelée opérade ensembliste. Si $\mathcal{P}$ est une opérade ensembliste, alors les linéarisés $\mathbb{K}[\mathcal{P}](n) = \mathbb{K}[\mathcal{P}(n)]$ forment une opérade sur `Vect`.

Par exemple, les groupes symétriques $\{\mathbb{S}_n\}_{n\geq 1}$ forment une opérade ensembliste dont les morphismes de composition

$$\mathbb{S}_k \times \mathbb{S}_{i_1} \times ... \times \mathbb{S}_{i_k} \to \mathbb{S}_{i_1+...+i_k}$$

sont les "permutations par blocs". Le linéarisé de cette opérade est l'opérade $\mathcal{A}s$. Un autre exemple est donné par le $\mathbb{S}$-ensemble des arbres $\{\mathcal{T}(n)\}_{n\geq 1}$ (resp. le $\mathbb{S}$-ensemble $\{\mathcal{PT}(n)\}_{n\geq 1}$ des arbres planaires), la composition opéradique étant donnée par la greffe d'arbres.

Opérades topologiques

Les opérades ont d'abord été introduites dans le contexte de la topologie algébrique (par J.P. May, voir [Ma]), c'est-à-dire dans le cas où `C` est la catégorie des espaces topologiques engendrés par des compacts. Le produit tensoriel est le produit cartésien, et la structure opéradique est donc donnée par des applications continues

$$\mathcal{P}(k) \times \mathcal{P}(i_1) \times ... \times \mathcal{P}(i_k) \to \mathcal{P}(i_1 + ... + i_k)$$

Les opérades d'arbres forment naturellement des opérades topologiques. Dans le prochain chapitre on introduit l'opérade des petits disques, qui est un exemple fondamental et historique d'opérade topologique.

Opérades graduées

Soit `gVect` la catégorie des espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$. C'est une catégorie monoïdale unitaire où le produit tensoriel est donné par

$$(V \otimes W)_n = \bigoplus_{i+j=n} V_i \otimes W_j$$

et où l'unité est le corps $\mathbb{K}$ concentré en degré 0. On note $|v|$ le degré d'un élément homogène $v \in V$. On met une structure symétrique sur `gVect` en posant

$$\tau(v \otimes w) = (-1)^{|v||w|} w \otimes v$$

On utilisera donc la convention de signe de Koszul : informellement, échanger deux symboles homogènes a et b dans une expression introduit le signe $(-1)^{|a||b|}$. Notamment si $f : V \to V'$ et $g : W \to W'$ sont des morphismes d'espaces vectoriels gradués de degrés respectifs $|f|$ et $|g|$, alors le morphisme $f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W'$ est défini par

$$(f \otimes g)(v \otimes w) = (-1)^{|v||g|} f(v) \otimes g(w)$$

Dans le prochain paragraphe on s'étendra un peu plus sur la structure d'opérade graduée et sur l'impact de la convention de Koszul dans certaines formules. On note $\mathbb{K}s$ l'espace vectoriel gradué engendré par un élément homogène s de degré 1, et

$$sV = \mathbb{K}s \otimes V$$

est la **suspension** de V. On a donc $(sV)_n = V_{n-1}$, et on notera $sv = s \otimes v$ les éléments de sV.

Opérades différentielles graduées

Soit `dgVect` la catégorie des espaces vectoriels différentiels gradués, c'est-à-dire des espaces vectoriels gradués munis d'une différentielle, qui est un endomorphisme d de degré -1 vérifiant $d \circ d = 0$.

La différentielle sur le produit tensoriel $V \otimes W = (V, d_V) \otimes (W, d_W)$ est définie par

$$d_{V\otimes W} = d_V \otimes id_W + id_V \otimes d_W$$

c'est-à-dire pour des éléments homogènes v et w :

$$d_{V\otimes W}(v \otimes w) = d_V(v) \otimes w + (-1)^{|v|} v \otimes d_W(w)$$

d'après la convention de Koszul rappelée ci-dessus. Notamment la différentielle sur la suspension sV est donnée par $d_{sV}(sv) = -sd_V(v)$.

2.2.2 Remarques sur les opérades graduées

Signes de Koszul et types d'algèbres graduées

Revenons sur la définition de l'opérade $\mathcal{E}nd_V$, où V est un espace vectoriel gradué. On a

$$\mathcal{E}nd_V(n) = \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V)$$

qui est gradué par le degré des morphismes. L'action de $\mathbb{S}_n$ est donnée par

$$(\sigma.f)(x_1 \otimes ... \otimes x_n) = \epsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma(n)})$$

où $\epsilon(\sigma)$ est le signe de Koszul, qui dépend des degrés des x_i. Par exemple, si τ est le générateur de $\mathbb{S}_2$, alors

$$(\tau.f)(x_1 \otimes x_2) = (-1)^{|x_1||x_2|} f(x_2 \otimes x_1)$$

La composition opéradique

$$f \otimes f_1 \otimes ... \otimes f_k \mapsto f \circ (f_1 \otimes ... \otimes f_k)$$

ne comporte pas de signe, mais il ne faut pas oublier que lorsqu'on l'applique à des éléments, un signe apparaît du fait de la permutation des variables et des morphismes.

Les opérades $\mathcal{A}s$, $\mathcal{C}om$ ou encore $\mathcal{L}ie$ sont naturellement des opérades graduées, il suffit de les voir concentrées en degré zéro. Les algèbres sur ces opérades sont respectivement les algèbres graduées associatives, les algèbres commutatives au sens gradué, et les algèbres de Lie au sens gradué. Par "au sens gradué" on entend que les contraintes de symétrie contiennent des signes de Koszul. Par exemple

- dans la catégorie `gVect`, les algèbres sur $\mathcal{C}om$ vérifient la relation de commutativité :
$$ba = (-1)^{|a||b|} ab$$
- de même pour les algèbres sur $\mathcal{L}ie$:
$$[b, a] = -(-1)^{|a||b|}[a, b]$$
Pour la relation de Jacobi, il suffit de l'écrire sous forme d'égalité entre fonctions : si l représenté le crochet de Lie et $\sigma = (1\ 2\ 3) \in \mathbb{S}_3$ alors
$$l \circ (l \otimes id) + \sigma.(l \circ (l \otimes id)) + \sigma^2.(l \circ (l \otimes id)) = 0$$
s'écrit désormais
$$[[a, b], c] + (-1)^{|a|(|b|+|c|)}[[b, c], a] + (-1)^{|c|(|a|+|b|)}[[c, a], b] = 0$$
ou sous une forme plus agréable :
$$(-1)^{|a||c|}[[a, b], c] + (-1)^{|b||a|}[[b, c], a] + (-1)^{|c||b|}[[c, a], b] = 0$$

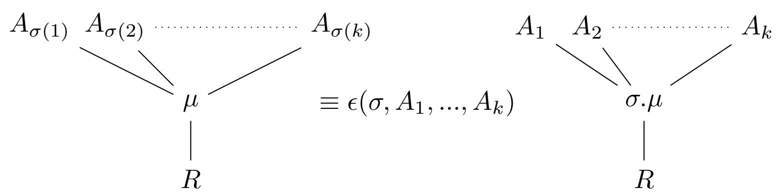
Signes dans la construction de l'opérade libre

Dans la catégorie `gVect`, l'ordre dans lequel on écrit les produits vectoriels a une importance. Rappelons qu'à la définition 2.1.14, on a écrit

$$M(t) = \bigotimes_{v \in V(t)} M(In(v))$$

où l'ordre est donné par l'ordre qu'on s'est fixé sur les sommets internes d'un arbre.

Il faut changer la définition de la relation $\equiv$ dans la définition 2.1.16 de l'opérade libre ; désormais la permutation des entrées d'un sommet interne crée un signe :



où $\epsilon(\sigma, A_1, ..., A_k)$ est le signe de Koszul associé à la permutation des éléments (supposés homogènes) $A_1, ..., A_k$. Par exemple, pour $k = 2$, $\tau = (1\ 2)$, on a $\epsilon(\tau, A_1, A_2) = (-1)^{|A_1||A_2|}$.

Enfin, des signes apparaissent dans les (iso)morphismes de composition opéradique

$$M(t) \otimes M(t_1) \otimes ... \otimes M(t_k) \to M(t \circ (t_1, ..., t_k))$$

qui sont des compositions de morphismes de symétrie $\tau : V \otimes W \to W \otimes V$.

Suspension opéradique

Soit un espace vectoriel (éventuellement gradué) A muni d'une opération n-aire $\mu : A^{\otimes n} \to A$. Une telle opération induit une opération sur la suspension sA par la composition

$$(sA)^{\otimes n} \xrightarrow{\cong} s^n A^{\otimes n} \xrightarrow{s^n \mu} s^n A \xrightarrow{s^{1-n}} sA$$

Remarquons que la première flèche $(sA)^{\otimes n} \xrightarrow{\cong} s^n A^{\otimes n}$ contient des signes puisque s est un élément de degré 1. Par exemple pour $n = 2$ c'est $sa \otimes sb \mapsto (-1)^{|a|} s^2 a \otimes b$.

Ainsi si A est une algèbre graduée commutative, l'opération binaire naturelle sur la suspension sA est $(sa)(sb) = (-1)^{|a|} s(ab)$. Un rapide calcul montre que cette opération est anticommutative au sens gradué, c'est-à-dire :

$$(sb)(sa) = -(-1)^{|sa||sb|}(sa)(sb)$$

Quelle est donc l'opérade dont les algèbres sont les suspensions d'algèbres commutatives ? La réponse à cette question se trouve dans la définition suivante :

Définition 2.2.1. Si M est un $\mathbb{S}$-module gradué, on appelle **suspension** de M et on note ΛM le $\mathbb{S}$-module défini par

$$\Lambda M(n) = s^{1-n}\mathrm{sgn}_n \otimes M(n)$$

On a aussi la notion de désuspension, qui en est l'inverse :

$$\Lambda^{-1}M(n) = s^{n-1}\mathrm{sgn}_n \otimes M(n)$$

Proposition 2.2.2. *Au niveau des foncteurs de Schur on a un isomorphisme naturel*

$$(\Lambda M)(sV) \cong sM(V)$$

La preuve de cette proposition repose sur le lemme :

Lemme 2.2.3. *A travers l'isomorphisme* $(sV)^{\otimes n} \xrightarrow{\cong} s^n V^{\otimes n}$*, l'action naturelle de* $\mathbb{S}_n$ *est multipliée par la signature* sgn_n*.*

Corollaire 2.2.4. *Si* $\mathcal{P}$ *est une opérade graduée alors* $\Lambda\mathcal{P}$ *est naturellement munie d'une structure d'opérade graduée. De plus* A *est une* $\mathcal{P}$*-algèbre si et seulement si* sA *est une* $\Lambda\mathcal{P}$*-algèbre.*

En clair, les algèbres sur la suspension de $\mathcal{P}$ sont les suspensions d'algèbres sur $\mathcal{P}$.

Lien avec les opérades topologiques

Remarquons que si $\mathcal{P}$ est une opérade topologique, alors en passant à l'homologie dans les morphismes de composition

$$\mathcal{P}(k) \times \mathcal{P}(i_1) \times ... \times \mathcal{P}(i_k) \to \mathcal{P}(i_1 + ... + i_k)$$

on obtient par la formule de Künneth (rappelons que l'homologie est à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$) des morphismes d'espaces vectoriels gradués :

$$H_\bullet(\mathcal{P}(k)) \otimes H_\bullet(\mathcal{P}(i_1)) \otimes ... \otimes H_\bullet(\mathcal{P}(i_k)) \to H_\bullet(\mathcal{P}(i_1 + ... + i_k))$$

qui munissent le $\mathbb{S}$-module gradué $H_\bullet(\mathcal{P}) = \{H_\bullet(\mathcal{P}(n))\}_{n\geq 1}$ d'une structure d'opérade graduée.

Remarquons que cette structure se restreint aux $\mathbb{S}$-modules $\left\{H_{k(n-1)}(\mathcal{P}(n))\right\}_{n\geq 1}$ pour tout $k \geq 0$.

Enfin, si X est un espace topologique qui est un $\mathcal{P}$-espace, alors l'espace vectoriel gradué $H_\bullet(X)$ est naturellement muni d'une structure de $H_\bullet(\mathcal{P})$-algèbre.

Chapitre 3

L'opérade des tresses

Le présent chapitre vise à présenter sous forme opéradique un résultat dû à F. Cohen ([C]), qui identifie les algèbres sur l'opérade des tresses. On s'inspire grandement de [S2], en faisant en plus usage de la notion de présentation d'une opérade développée dans le chapitre précédent, de sorte à complètement "opéradiser" les preuves.

3.1 Les opérades en jeu

3.1.1 L'opérade des petits disques et l'opérade des tresses

On donne ici un premier exemple d'opérade topologique. Notons D le disque unité fermé de $\mathbb{C}$ et $\mathring{D}$ son intérieur.

Pour $n \geq 1$, $\mathcal{D}isks(n)$ est l'espace des configurations de n disques dans le disque unité :

$$\left\{ \begin{pmatrix} z_1, ..., z_n \\ r_1, ..., r_n \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathring{D}^n \\ ]0,1]^n \end{pmatrix} \mid \text{les disques } z_i + r_i\mathring{D} \text{ sont dans } \mathring{D} \text{ et disjoints} \right\}$$

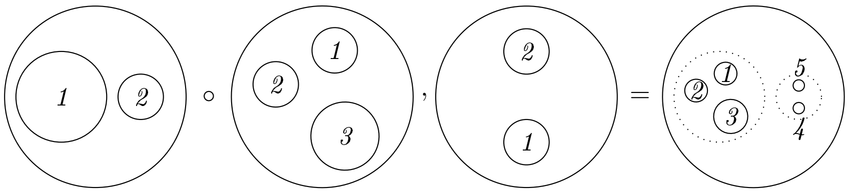
muni de l'action de $\mathbb{S}_n$ qui permute les disques.

Le $\mathbb{S}$-espace $\{\mathcal{D}isks(n)\}_{n\geq 1}$ est muni d'une structure d'opérade topologique où l'unité est la configuration $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{D}isks(1)$ et la composition est donnée par l'insertion de disques.

Plus précisément, si $a = \begin{pmatrix} z_1, ..., z_k \\ r_1, ..., r_k \end{pmatrix} \in \mathcal{D}isks(k)$ et $b_j = \begin{pmatrix} y_{j,1}, ..., y_{j,i_j} \\ s_{j,1}, ..., s_{j,i_j} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}isks(i_j)$, alors $a \circ (b_1, ..., b_k) \in \mathcal{D}isks(i_1 + ... + i_k)$ est défini par :

$$a\circ(b_1, ..., b_k) = \begin{pmatrix} z_1 + r_1 y_{1,1}, & ... & , z_1 + r_1 y_{1,i_1}, & ... & , z_k + r_k y_{k,1}, & ... & , z_k + r_k y_{k,i_k} \\ r_1 s_{1,1}, & ... & , r_1 s_{1,i_1}, & ... & , r_k s_{k,1}, & ... & , r_k s_{k,i_k} \end{pmatrix}$$

Exemple 3.1.1. *Un exemple de composition $\mathcal{D}isks(2) \times \mathcal{D}isks(3) \times \mathcal{D}isks(2) \to \mathcal{D}isks(5)$ est illustré par la figure suivante :*



Définition 3.1.2. L'opérade définie ci-dessus est appelée **opérade des petits disques**.

Notons d'abord un fait élémentaire :

Proposition 3.1.3. *Pour tout $n \geq 1$, l'application $\mathbb{S}_n$-équivariante*

$$\begin{pmatrix} z_1, ..., z_n \\ r_1, ..., r_n \end{pmatrix} \mapsto (z_1, ..., z_n)$$

donne une équivalence d'homotopie $\mathcal{D}isks(n) \approx \mathbb{C}_0^n$.

Définition 3.1.4. On note $\mathcal{B}raid(n) = H_\bullet(\mathbb{C}_0^n) = H_\bullet(\mathcal{D}isks(n))$.

Le $\mathbb{S}$-module gradué $\mathcal{B}raid = \{\mathcal{B}raid(n)\}_{n\geq 1}$ est donc muni d'une structure naturelle d'opérade graduée. Suivant E. Getzler, on appelle cette opérade l'**opérade des tresses**. Le but de ce qui suit est d'en donner une présentation simple.

3.1.2 L'opérade de Gerstenhaber

Définition 3.1.5. On appelle **algèbre de Gerstenhaber** un dg-espace vectoriel A muni d'un produit . de degré 0 et d'un crochet $[.,.]$ de degré 1 tels que :

- le produit . est associatif et commutatif au sens gradué.
- la suspension sA munie du crochet $l(sa \otimes sb) = (-1)^{|a|}s[a,b]$ est une algèbre de Lie au sens classique.
- la relation de Poisson graduée

$$[a, bc] = [a, b]c + (-1)^{(|a|+1)|b|}b[a, c]$$

  est vérifiée dans A.

Rappelons que la deuxième condition signifie que le crochet est commutatif (et non anticommutatif) au sens gradué, et que la relation de Jacobi graduée

$$(-1)^{|a||c|}[[a, b], c] + (-1)^{|a||b|}[[b, c], a] + (-1)^{|b||c|}[[c, a], b] = 0$$

est satisfaite dans A. Pour résumer, A est une algèbre sur $\Lambda^{-1}\mathcal{L}ie$.

Notons $\mathcal{G}erst$ l'opérade graduée correspondant aux algèbres de Gerstenhaber. Explicitons la présentation de $\mathcal{G}erst$ correspondant à la définition ci-dessus :

Proposition 3.1.6. *On a $\mathcal{G}erst = \mathcal{T}(E_{\mathcal{G}erst})/(R_{\mathcal{G}erst})$ où*

- *le $\mathbb{S}$-module $E_{\mathcal{G}erst}$ est concentré en arité 2 avec $E_{\mathcal{G}erst}(2) = \mathbb{K}\mu \oplus \mathbb{K}l$ où μ est de degré 0, l de degré 1, avec $\tau.\mu = \mu$ et $\tau.l = l$.*

– *le $\mathbb{S}$-module $R_{\mathcal{G}erst}$ est concentré en poids 2, c'est-à-dire en arité 3, engendré en tant que $\mathbb{S}$-module par la relation de Jacobi*

$$l \circ (l, id) + \sigma.(l \circ (l, id)) + \sigma^2.(l \circ (l, id))$$

où on a noté σ le cycle $(1\ 2\ 3) \in \mathbb{S}_3$, et par la relation de Poisson

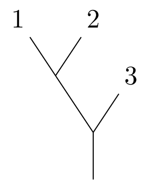
$$l \circ (1, \mu) - \mu \circ (l, 1) - \tau.(\mu \circ (1, l))$$

où on a noté τ la transposition $(1\ 2) \in \mathbb{S}_3$.

Soit un entier $n \geq 1$. On va utiliser les arbres binaires pour décrire l'espace $\mathcal{G}erst(n)$ et en expliciter une base.

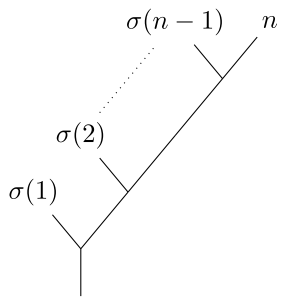
Tout d'abord on a $\Lambda^{-1}\mathcal{L}ie \subset \mathcal{G}erst$, et les éléments de $\Lambda^{-1}\mathcal{L}ie$ sont des combinaisons linéaires d'arbres binaires décorés à chaque sommet interne par le crochet l. Comme il n'y a aucun ambiguïté, on n'écrit pas les décorations.

Exemple 3.1.7. *L'arbre*



représente l'opération $[x_1, [x_2, x_3]] \in (\Lambda^{-1}\mathcal{L}ie)(3)$.

Définition 3.1.8. Pour toute permutation $\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}$ on note $T_\sigma \in (\Lambda^{-1}\mathcal{L}ie)(n)$ l'arbre

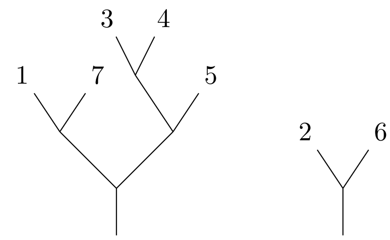


Proposition 3.1.9. *Les arbres T_σ, pour $\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}$, forment une base de $(\Lambda^{-1}\mathcal{L}ie)(n)$.*

Démonstration. Comme on sait que la dimension de $(\Lambda^{-1}\mathcal{L}ie)(n)$ est $(n-1)!$ il suffit de montrer que les arbres T_σ l'engendrent. On le fait par récurrence en utilisant la commutativité du crochet de Lie l et la relation de Jacobi. □

Pour décrire des produits de crochets purs, on juxtapose des arbres binaires pour créer des **forêts**. Une n-forêt est, par définition, une collection ordonnée d'arbres (binaires) dont les feuilles sont étiquetées par $\{1, ..., n\}$.

Exemple 3.1.10. *La 7-forêt*



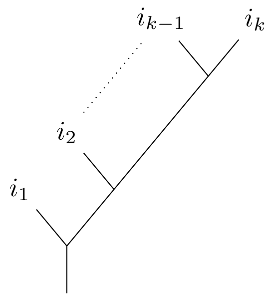
représente l'opération

$$[[x_1, x_7], [[x_3, x_4], x_5]].[x_2, x_6]$$

de $\mathcal{G}erst(7)$.

Remarquons que le degré $|F|$ d'une forêt est le nombre de ses sommets internes. La définition suivante est inspirée de [S1].

Définition 3.1.11. Soit $S \subset \{1, ..., n\}$ un ensemble à k éléments. On appelle S-**arbre haut** un arbre



tel que $S = \{i_1, ..., i_k\}$ et $i_k = \max(S)$.

On appelle **forêt haute** une forêt composée d'arbres hauts.

Proposition 3.1.12. *Les forêts hautes*

$$F = T_1, ..., T_l$$

où T_j *est un* S_j*-arbre haut avec*

$$S_1 \sqcup ... \sqcup S_l = \{1, ..., n\}$$

et

$$\max(S_1) < ... < \max(S_l)$$

forment une base de $\mathcal{G}erst(n)$.

Démonstration. Grâce à la relation de Poisson, on peut faire sortir les produits des crochets, et on aboutit à des produits de crochets purs. Une base des crochets purs est donnée par la proposition 3.1.9. La condition $\max(S_1) < ... < \max(S_j)$ sert à fixer un ordre sur les arbres, le produit étant commutatif. $\square$

3.2 L'isomorphisme $\mathcal{B}raid \cong \mathcal{G}erst$

3.2.1 Définition du morphisme

On va utiliser la présentation de $\mathcal{G}erst$ donnée en 3.1.6 pour définir un morphisme d'opérades $f : \mathcal{G}erst \to \mathcal{B}raid$.

Tout d'abord définissons un morphisme de $\mathbb{S}$-modules gradués

$$\alpha : E_{\mathcal{G}erst} \to \mathcal{B}raid$$

en posant

1. $\alpha(\mu) = 1 \in H_0(\mathbb{C}_0^2)$.
2. $\alpha(l) = \iota$ où ι est le générateur de $H_1(\mathbb{C}_0^2)$ correspondant à l'orientation trigonométrique du cercle.

Il est aisé de vérifier que α est bien un morphisme de $\mathbb{S}$-modules gradués, qui induit donc un morphisme d'opérades graduées

$$\widetilde{\alpha} : \mathcal{T}(E_{\mathcal{G}erst}) \to \mathcal{B}raid$$

Proposition 3.2.1. *Le $\mathbb{S}$-module $R_{\mathcal{G}erst}$ est annulé par $\widetilde{\alpha}$, qui induit donc un morphisme d'opérades*

$$f : \mathcal{G}erst \to \mathcal{B}raid$$

Démonstration. On trouvera dans [S2] la preuve pour la relation de Jacobi. Pour ce qui est de la relation de Poisson, on pourra remarquer qu'elle a lieu dans $H_1(\mathbb{C}_0^3)$. Or $H_1(\mathbb{C}_0^3)$ est l'abélianisé de $\pi_1(\mathbb{C}_0^3)$, qui est le groupe B_3 des tresses pures d'Artin. En notant σ_1 et σ_2 les générateurs du groupe des tresses (non pures), le terme $l \circ (1, \mu)$ donne $\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1$, le terme $\mu \circ (l, 1)$ donne σ_1^2, et le terme $\tau.(\mu \circ (1, l))$ donne $\sigma_1^{-1}\sigma_2^2\sigma_1$.

Ainsi la relation de Poisson est l'image de

$$\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1(\sigma_1^2\sigma_1^{-1}\sigma_2^2\sigma_1)^{-1} = 1$$

sans même avoir à passer au quotient. □

3.2.2 Calcul explicite

Le morphisme f a été défini par une propriété universelle ; on va chercher à l'expliciter.

Fixons une fois pour toutes un réel $\epsilon \in]0, 1/3[$. Rappelons que pour un arbre donné, on note $h(v)$ la hauteur d'un sommet interne v, telle que la racine est de hauteur 1.

Définition 3.2.2. Soit un n-arbre T. Pour des éléments $(u_1, ..., u_{n-1})$ du cercle S^1, on note $P_T(u_1, ..., u_{n-1})$ la configuration de n points dans le plan donnée par

$$x_i = \sum_{v \in V_i(T)} \pm\epsilon^{h(v)} u_v$$

où $V_i(T)$ est l'ensemble des sommets internes de T sur le chemin de la feuille i à la racine, et le signe $\pm$ est $+1$ si ce chemin passe par l'entrée gauche de v et -1 dans le cas contraire.

Cela définit une application continue

$$P_T : (S^1)^{n-1} \to \mathbb{C}_0^n$$

Dans le cas $n = 1$, P_T est le point 0 de $\mathbb{C}_0^1 = \mathbb{C}$.

Définition 3.2.3. Soit une n-forêt F composée d'arbres $T_1, ..., T_l$. Pour des éléments $(u_1, ..., u_{|F|})$ du cercle S^1, on note $P_F(u_1, ..., u_{|F|})$ la configuration de n points dans le plan donnée par

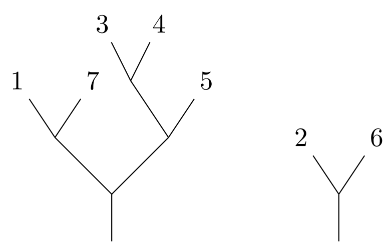
$$x_i = (k-1) + \sum_{v \in V_i(T_k)} \pm \epsilon^{h(v)} u_v$$

pour un entier i apparaissant dans l'arbre k. Cela définit une application continue

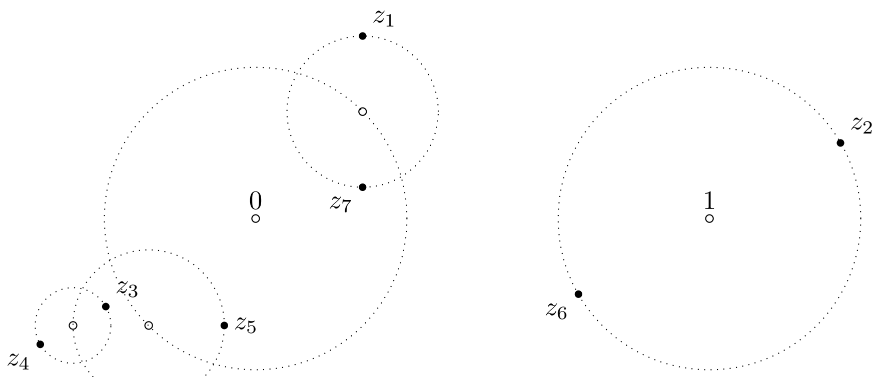
$$P_F : (S^1)^{|F|} \to \mathbb{C}_0^n$$

Si F est composée d'un seul arbre, on retrouve la définition précédente.

Exemple 3.2.4. *Pour $n = 7$, soit F la forêt*



L'application $P_F : (S^1)^5 \to \mathbb{C}_0^7$ est illustrée par la figure suivante :



Par exemple, dans la configuration $P_F(u_1, ..., u_5)$, on a $z_4 = -\epsilon u_1 + \epsilon^2 u_3 - \epsilon^3 u_4$.

Proposition 3.2.5. *Pour toute forêt $F \in \mathcal{G}erst(n)$, $f(F)$ est la classe de P_F dans $H_{|F|}(\mathbb{C}_0^n)$, c'est-à-dire*

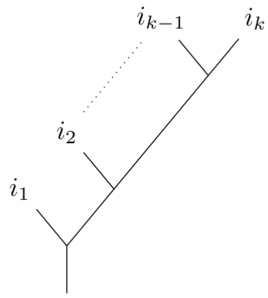
$$f(F) = (P_F)_*(\iota^{\otimes |F|})$$

Démonstration. C'est vrai pour $n = 2$. On procède alors par récurrence sur n en utilisant la structure opéradique des petits disques. $\square$

3.2.3 Conclusion

Dans la proposition 3.1.12, on a décrit une base de $\mathcal{G}erst(n)$, qu'on notera $\mathcal{B}_n$. Pour toute forêt F de cette base, on définit un élément $\Omega_F \in H^\bullet(\mathbb{C}_0^n)$ de la manière suivante (rappelons qu'on a donné une présentation de $H^\bullet(\mathbb{C}_0^n)$ en 1.2.1).

On associe à l'arbre haut



l'élément

$$\omega_{i_1,i_2}\omega_{i_2,i_3}\ldots\omega_{i_{k-1},i_k}$$

et juxtaposer des arbres amène à multiplier les éléments correspondants.

Notons $\langle .,. \rangle$ l'évaluation de la cohomologie sur l'homologie. La preuve de la proposition suivante est purement topologique et peut être trouvée dans [S2].

Proposition 3.2.6. *Soient deux forêts F et G dans $\mathcal{B}_n$. On a $\langle \Omega_F, f(G) \rangle = 1$ si $F = G$, 0 sinon.*

Proposition 3.2.7. *Le morphisme $f : \mathcal{G}erst \to \mathcal{B}raid$ est un isomorphisme.*

Démonstration. D'après ce qui précède, l'image de la base $\mathcal{B}_n$ par f est libre, et f est donc injective. Or $\mathcal{G}erst(n)$ et $\mathcal{B}raid(n)$ ont pour dimension $n!$ et f est donc bijective. □

Corollaire 3.2.8. *En tant que représentations de $\mathbb{S}_n$, on a un isomorphisme*

$$H_{n-1}(\mathbb{C}_0^n) \cong \mathrm{sgn}_n \otimes \mathcal{L}ie(n)$$

Démonstration. Il s'agit de la restriction du morphisme α au degré $n-1$: $H_{n-1}(\mathbb{C}_0^n) \cong (\Lambda^{-1}\mathcal{L}ie)(n)$. □

On pourra aussi remarquer que les $H_{n-1}(\mathbb{C}_0^n)$ forment une opérade par restriction des morphismes de structures opéradique, et que les isomorphismes restreints $H_{n-1}(\mathbb{C}_0^n) \cong (\Lambda^{-1}\mathcal{L}ie)(n)$ forment un isomorphisme d'opérades.

3.3 Digression : les espaces de lacets doubles

Il n'est pas très intéressant de parler d'opérades sans mentionner les algèbres sur ces opérades. Cette courte section vise à combler ce manque.

Tout d'abord, il est bien connu que si $(X, *)$ est un espace topologique pointé, alors l'espace de lacets doubles

$$\Omega^2 X = \{\gamma : D \to X \mid \gamma_{|\partial D} = *\}$$

est muni d'une action naturelle de l'opérade des petits disques.

Soit un élément $a \in \mathcal{D}isks(n)$ représenté par des disques D_1, ..., D_n qui sont dans $\mathring{D}$ et d'intérieurs disjoints. On associe à a une application continue

$$a : (\Omega^2 X)^n \to \Omega^2 X$$

de la manière suivante : si γ_1, ..., γ_n sont des éléments de $\Omega^2 X$, alors $a(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ vaut γ_j en restriction à chaque D_j, et vaut le point base $*$ sur le complémentaire de l'union des D_j.

Ainsi les espaces $\Omega^2 X$ sont naturellement munis de structures d'espaces sur l'opérade des petits disques. La réciproque suivante est dûe à J.P. May dans [Ma] :

Théorème 3.3.1. *Soit Y un espace topologique connexe qui a le type d'homotopie d'un CW-complexe. Si Y est un espace sur l'opérade des petits disques, alors il existe un espace topologique pointé $(X, *)$ tel que Y a le type d'homotopie de $\Omega^2 X$.*

L'espace vectoriel gradué $H_\bullet(\Omega^2 X)$ est donc naturellement muni d'une structure d'algèbre sur l'opérade $\mathcal{B}raid$. D'après ce qu'on a montré, il est muni d'une structure d'algèbre de Gerstenhaber. Le produit . est ce que les topologues algébristes appellent classiquement **produit de Pontryagin**, et le crochet de Lie est classiquement appelé **opération de Browder**.

Avec les résultats qui précèdent, on peut aisément écrire les définitions de ces deux opérations et vérifier les axiomes des algèbres de Gerstenhaber.

Chapitre 4

Dualité de Koszul des opérades

4.1 La dualité de Koszul des algèbres associatives

4.1.1 Conventions sur les algèbres (différentielles graduées)

Une algèbre unitaire A est dite **augmentée** s'il existe un morphisme d'algèbres unitaires $\epsilon : A \to \mathbb{K}$, auquel cas on peut écrire

$$A = \mathbb{K}1_A \oplus \widetilde{A}$$

où $\widetilde{A} = \ker(\epsilon)$ est une algèbre pour la restriction du produit.

Une algèbre graduée est un espace vectoriel gradué muni d'une structure d'algèbre tel que le produit et l'unité 1_A soient de degré 0. Une algèbre différentielle graduée est un espace vectoriel muni d'une structure d'algèbre tel que le produit soit un morphisme dans `dgVect`. C'est équivalent à dire que la différentielle d est une dérivation pour le produit.

4.1.2 Conventions sur les coalgèbres (différentielles graduées)

Une **coalgèbre** est un espace vectoriel C muni d'un coproduit $\Delta : C \to C \otimes C$ qui vérifie la condition classique de coassociativité. Elle est dite counitaire si elle est munie d'une application linéaire $\eta : C \to \mathbb{K}$ qui vérifie la condition classique de counité.

On utilisera la notation de Sweedler pour noter les coproduits :

$$\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$$

Une coalgèbre counitaire est dite **coaugmentée** s'il existe un morphisme de coalgèbres counitaires $u : \mathbb{K} \to C$. On a alors

$$C = \mathbb{K}1_C \oplus \widetilde{C}$$

avec $1_C = u(1)$ et $\widetilde{C} = \ker(\eta)$. L'idéal $\widetilde{C}$ est alors une coalgèbre pour le coproduit restreint $\widetilde{\Delta}$. Si pour tout x dans $\widetilde{C}$ il existe un entier n tel que $\widetilde{\Delta}(x) = 0$, on dit que C est **conilpotente**.

On note $T^c(V)$ la **coalgèbre colibre** sur un espace vectoriel V. Il s'agit de l'algèbre tensorielle

$$T^c(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$$

munie du coproduit

$$\Delta(v_1...v_n) = \sum_{i=0}^{n} v_1...v_i \otimes v_{i+1}...v_n$$

Remarquons que c'est une coalgèbre conilpotente.

On laisse le soin au lecteur de définir les notions de coalgèbre graduée et coalgèbre différentielle graduée. Dans une coalgèbre différentielle graduée, la différentielle d est une codérivation pour le coproduit.

Il est bien connu qu'on passe des algèbres aux coalgèbres par dualité linéaire. Plus précisément :

Proposition 4.1.1. *Le dual linéaire C^* d'une coalgèbre coassociative C est muni d'une structure naturelle d'algèbre associative. Le dual linéaire A^* d'une algèbre associative de dimension finie A est muni d'une structure naturelle de coalgèbre coassociative.*

4.1.3 Les constructions bar et cobar

Si A est une algèbre graduée augmentée, on note

$$BA = T^c(s\widetilde{A})$$

Un tenseur élémentaire de BA sera noté $[sa_1|...|sa_n]$. On appelle **degré homologique** sur BA le degré issu de celui de A, qu'on note entre barres :

$$|[sa_1|...|sa_n]| = n + |a_1| + ... + |a_n|$$

On considère BA comme une coalgèbre graduée par le degré homologique.

On munit BA d'une différentielle qui reflète le produit sur A, en posant $d(1) = d[sa] = 0$, et pour $n \geq 2$,

$$d[sa_1|...|sa_n] = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1+|a_1|+...+|a_i|} [sa_1|...|sa_i a_{i+1}|...|sa_n]$$

On vérifie que d est une codérivation et que $d \circ d = 0$. La coalgèbre différentielle graduée (BA, d) est appelée la **construction bar** de A.

Dualement, si C est une coalgèbre graduée conilpotente, on note

$$\Omega C = T(s^{-1}\widetilde{C})$$

On considère ΩC comme une algèbre graduée, la graduation étant le degré homologique.

On munit ΩC d'une dérivation qui reflète le coproduit sur C, en posant $d(1) = 0$ et pour $\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$,

$$d[s^{-1}x] = \sum (-1)^{|x_{(1)}|}[s^{-1}x_{(1)}|s^{-1}x_{(2)}]$$

On vérifie que d est une dérivation et que $d \circ d = 0$. L'algèbre différentielle graduée $(\Omega C, d)$ est appelée la **construction cobar** de C.

4.1.4 Algèbres et coalgèbres quadratiques

On se donne un espace vectoriel gradué V est un sous-espace vectoriel gradué $R \subset V \otimes V$. Pour une telle donnée, on note

$$A = A(V, R) = T(V)/(R) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n} / \left(\sum_{i+2+j=n} (V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j}) \right)$$

l'algèbre graduée engendrée par V avec les relations R.

On dit que A est l'**algèbre quadratique** associée au couple (V, R). Cette algèbre est graduée par le degré homologique issu de V et R, et par le poids issu de la construction libre. Notamment, la composante de poids n de A est

$$A^{(n)} = V^{\otimes n} / \left(\sum_{i+2+j=n} (V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j}) \right)$$

Si V est de dimension finie, on appelle série génératrice de A la série formelle

$$f_A(t) = \sum_{n \geq 0} \dim(A^{(n)}) t^n$$

On a aussi la notion de **coalgèbre quadratique** : on note

$$C = C(V, R) = \bigoplus_{n \geq 0} \left(\bigcap_{i+2+j=n} (V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j}) \right)$$

la coalgèbre graduée coengendrée par V avec les corelations R. Cette coalgèbre est bigraduée par le degré homologique et le poids. On définit la série génératrice de C par la même formule que ci-dessus.

4.1.5 Dualité de Koszul

La dualité de Koszul des algèbres a été introduite par Priddy dans [P]. On en rappelle les grandes lignes.

Soit $A = A(V, R)$ une algèbre quadratique comme ci-dessus. On appelle **coalgèbre quadratique duale** de A la coalgèbre

$$A^{¡} = C(sV, s^2R)$$

Son dual poids par poids

$$A^! = \bigoplus_{n\geq 0} (s^{-n} A^{¡(n)})^*$$

est une algèbre quadratique qui admet la présentation simple suivante :

$$A^! = A(V^*, R^\perp)$$

si V est de dimension finie.

Ainsi on a $(A^!)^! = A$, et on appelle $A^!$ l'**algèbre quadratique duale** de A.

On munit l'espace vectoriel gradué $K = A^¡ \otimes A$ d'une différentielle d_K définie par $d_K(1 \otimes a) = 0$ et pour $i \geq 1$,

$$d_K(sv_1...sv_i \otimes w_1...w_j) = (-1)^{i-1+|v_1|+...+|v_{i-1}|} sv_1...sv_{i-1} \otimes v_i w_1...w_j$$

On vérifie aisément que d est de degré -1 et vérifie $d \circ d = 0$. Le complexe (K, d_K) est appelée **complexe de Koszul** du couple (V, R).

Remarquons qu'il se scinde par rapport au poids total puisque d_K envoie $A^{¡(i)} \otimes A^{(j)}$ sur $A^{¡(i-1)} \otimes A^{(j+1)}$.

Il y a beaucoup de graduations sur la construction bar BA. Tout d'abord, le poids sur A donne un poids sur BA, et on note encore $BA^{(n)}$ la composante de poids n de BA (intuitivement, c'est le nombre d'éléments de V apparaissant dans une expression). Remarquons que la différentielle d préserve le poids.

Dans [LV], la graduation définie par $B_n A = (s\overline{A})^{\otimes n}$ est appelée "syzygy degree" (intuitivement, c'est le nombre de symboles s apparaissant dans une expression). La différentielle fait baisser d'une unité cette graduation, et on a le fait suivant :

Proposition 4.1.2. *Pour tout n, le noyau de $(B_n A)^{(n)} \xrightarrow{d} (B_{n-1}A)^{(n)}$ est naturellement isomorphe à $A^{¡(n)}$.*

On définit ainsi un morphisme canonique injectif

$$i : A^¡ \hookrightarrow BA$$

qui est un morphisme de coalgèbres graduées.

Dualement, on définit un morphisme canonique surjectif

$$p : \Omega A^¡ \twoheadrightarrow A$$

qui est un morphisme d'algèbres graduées.

Le résultat principal est le suivant :

Théorème 4.1.3. *Soit $A = A(V, R)$ une algèbre quadratique et $A^¡$ la coalgèbre quadratique duale. On a équivalence entre :*

1. *L'inclusion $i : A^¡ \hookrightarrow BA$ est un quasi-isomorphisme.*
2. *La projection $p : \Omega A^¡ \twoheadrightarrow A$ est un quasi-isomorphisme.*
3. *Le complexe de Koszul K est acyclique (c'est-à-dire que son homologie est concentrée en degré 0 et poids 0).*

Quand les hypothèses du théorème ci-dessus sont satisfaites, on dit que l'algèbre quadratique A est une **algèbre de Koszul**.

Proposition 4.1.4. *Soit $A = A(V, R)$ une algèbre quadratique sur V de dimension finie et $A^{¡}$ la coalgèbre duale. Si A est une algèbre de Koszul alors on a l'égalité suivante qui relie les séries génératrices de A et $A^{¡}$:*

$$f_{A^{¡}}(t) f_A(-t) = 1$$

Démonstration. Il suffit d'exprimer la caractéristique d'Euler du complexe de Koszul, scindé par le poids. □

4.2 La dualité de Koszul des opérades

4.2.1 Quelques mots sur les coopérades

La notion de coopérade est duale à celle d'opérade, et généralise la notion de coalgèbre coassociative counitaire. On donne quelques définitions en laissant au lecteur le soin de combler les trous.

Définition 4.2.1. Une **coopérade** (sur `Vect`) est un $\mathbb{S}$-module $\mathcal{C}$ muni de morphismes de $\mathbb{S}$-modules $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \circ \mathcal{C}$ et $\eta : \mathcal{C} \to I$ qui font commuter les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathcal{C} \circ \mathcal{C} \arrow[d, "\Delta \circ I"] \\ \mathcal{C} \circ \mathcal{C} \arrow[r, "I \circ \Delta"'] & \mathcal{C} \circ \mathcal{C} \circ \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[dl, equal] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, equal] & \\ I \circ \mathcal{C} & \mathcal{C} \circ \mathcal{C} \arrow[l, "\eta \circ I"] \arrow[r, "I \circ \eta"'] & \mathcal{C} \circ I \end{tikzcd}$$

De manière plus explicite, la décomposition opéradique est donnée par des morphismes

$$\mathcal{C}(n) \to \bigoplus \mathcal{C}(k) \otimes \mathcal{C}(i_1) \otimes ... \otimes \mathcal{C}(i_k)$$

où la somme directe (finie) est prise sur les entiers $k \geq 1$ est les k-uplets $(i_1, ..., i_k)$ vérifiant $i_1 + ... + i_k = n$.

On a une notion de morphismes de coopérades, de coalgèbre sur une coopérade.

Coopérade colibre sur un $\mathbb{S}$-module

Il s'agit de construire un adjoint à droite du foncteur d'oubli de la catégorie des coopérades dans celle des $\mathbb{S}$-modules. On notera $\mathcal{T}^c M$ la **coopérade colibre** sur M.

En tant que $\mathbb{S}$-module on a $\mathcal{T}^c M = \mathcal{T} M$. Souvenons-nous que la structure opéradique sur $\mathcal{T} M$ est donnée par des isomorphismes

$$M(t) \otimes M(t_1) \otimes ... \otimes M(t_k) \to M(t \circ (t_1, ..., t_k))$$

où t est un k-arbre planaire et les t_j des arbres planaires quelconques. En considérant l'inverse de tels isomorphismes, on construit le morphisme

$$\Delta : \mathcal{T}^c M \to \mathcal{T}^c M \circ \mathcal{T}^c M$$

de décomposition opéradique.

Le morphisme η est donné par la projection sur $I = \mathcal{T}^c M^{(0)}$. On a ainsi défini une structure de coopérade sur $\mathcal{T}^c M$. Enfin, on a un morphisme naturel $\mathcal{T}^c M \twoheadrightarrow M$ donné par la projection sur $M = \mathcal{T}^c M^{(1)}$.

Proposition 4.2.2. *La coopérade $\mathcal{T}^c M$, munie du morphisme $\mathcal{T}^c M \twoheadrightarrow M$, est la coopérade colibre sur le $\mathbb{S}$-module M.*

Coopérades et opérades

La proposition 4.1.1 se généralise pour les opérades et les coopérades. Le dual d'un $\mathbb{S}$-module M est le $\mathbb{S}$-module

$$M^* = \{(M(n))^*\}_{n\geq 1}$$

où $\mathbb{S}_n$ agit par la représentation contragrédiente.

Proposition 4.2.3. *Le dual $\mathcal{C}^*$ d'une coopérade $\mathcal{C}$ est muni naturellement d'une structure naturelle d'opérade. Si $\mathcal{P}$ est une opérade telle que $\mathcal{P}(n)$ est de dimension finie pour tout n, alors le dual $\mathcal{P}^*$ est muni naturellement d'une structure de coopérade.*

On pourra remarquer que la deuxième partie de l'énoncé est fausse si le corps $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique nulle.

4.2.2 Les constructions bar et cobar opéradiques

Une opérade **augmentée** est une opérade $\mathcal{P}$ munie d'un morphisme d'opérades $\epsilon : \mathcal{P} \to I$, qu'on peut écrire comme une somme directe

$$\mathcal{P} = I \oplus \widetilde{\mathcal{P}}$$

Dans la suite on supposera que $\mathcal{P}(1)$ est engendré par l'identité, de sorte que $\widetilde{\mathcal{P}}(1) = 0$.

La construction bar pour les opérades graduées augmentées est l'analogue de la construction bar pour les algèbres associatives graduées augmentées. Soit donc $\mathcal{P}$ une opérade comme ci-dessus.

On note $B\mathcal{P} = \mathcal{T}^c(s\widetilde{\mathcal{P}})$, qui est une coopérade. On considère $B\mathcal{P}$ comme une opérade graduée, la graduation étant le degré homologique issu de la graduation sur $\mathcal{P}$.

On veut définir une différentielle sur $B\mathcal{P}$ qui reflète la structure opéradique de $\mathcal{P}$.

Définition 4.2.4. Pour tout arbre t (planaire ou pas) on note $E(t)$ l'ensemble des arêtes internes de t. Si e est une arête interne commençant en un sommet v et finissant en un sommet w, on note t/e l'arbre obtenu en contractant l'arête e et en identifiant les sommets v et w en un unique sommet noté $w.v$.

Si t est un arbre planaire et e, v, w comme dans la définition ci-dessus, on définit un morphisme

$$(s\widetilde{\mathcal{P}})(In(w)) \otimes (s\widetilde{\mathcal{P}})(In(v)) \to (s\widetilde{\mathcal{P}})(In(w.v))$$

par l'application $(s\mu) \otimes (s\nu) \mapsto (-1)^{|\mu|} s\mu \circ (id, ..., id, \nu, id, ..., id)$ où ν est inséré à la place qu'occupe e dans les arêtes entrantes de μ.

Etant donné que $(s\widetilde{\mathcal{P}})(t) = \otimes_{v \in V(t)} (s\widetilde{\mathcal{P}})(In(v))$, on a défini un morphisme

$$d_e : (s\widetilde{\mathcal{P}})(t) \to (s\widetilde{\mathcal{P}})(t/e)$$

En posant

$$d = \sum_{e \in E(t)} d_e$$

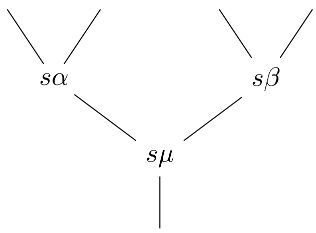
on définit un morphisme de degré -1 qui passe au quotient par $\equiv$ pour donner un morphisme de $\mathbb{S}$-modules

$$d : B\mathcal{P} \to B\mathcal{P}$$

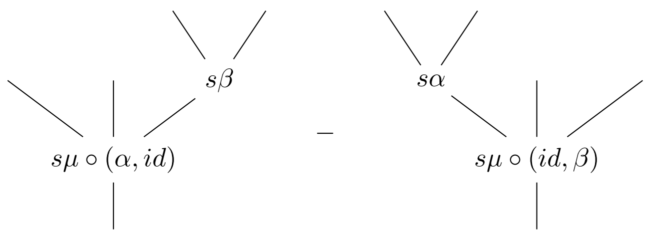
et on montre aisément que d respecte la structure coopéradique et est de carré nul.

Notons que des signes apparaissent dans d, même si $\widetilde{\mathcal{P}}$ est concentrée en degré 0, du fait de la permutation des signes s de suspension.

Exemple 4.2.5. *L'application de d à*



donne



La coopérade différentielle graduée $(B\mathcal{P}, d)$ est appelée **construction bar** de l'opérade graduée augmentée $\mathcal{P}$.

On ne détaille pas la **construction cobar** sur une coopérade graduée co-augmentée (et conilpotente) $\mathcal{C}$, qui consiste à définir sur l'opérade graduée $\Omega\mathcal{C} = \mathcal{T}(s^{-1}\widetilde{\mathcal{C}})$ une différentielle reflétant la structure coopéradique de $\mathcal{C}$.

4.2.3 Opérades et coopérades quadratiques

Les opérades quadratiques sont une classe d'opérades introduites par Ginzburg et Kapranov dans [GK].

On se donne un $\mathbb{S}$-module gradué E et un sous-$\mathbb{S}$-module $R \subset \mathcal{T}E^{(2)}$. Pour une telle donnée on note

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R) = \mathcal{T}E/(R)$$

l'opérade graduée engendrée par E avec relations R. On dit que $\mathcal{P}$ est l'**opérade quadratique** associée au couple (E, R).

Cette opérade hérite d'une graduation par le poids donnée par

$$\mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{T}E^{(n)}/(\mathcal{T}E^{(n)} \cap (R))$$

Exemple 4.2.6. *Les opérades $\mathcal{A}s$, $\mathcal{C}om$, $\mathcal{L}ie$, $\mathcal{P}ois$, $\mathcal{G}erst$ sont toutes des opérades quadratiques. Elles sont mêmes binaires quadratiques, c'est-à-dire que les opérations génératrices sont toutes en arité 2. C'est le cadre original dans lequel Ginzburg et Kapranov ont introduit les opérades quadratiques. Dans le prochain chapitre on introduit des opérades quadratiques qui ne sont pas binaires.*

Pour les algèbres quadratiques binaires, le poids est peu important puisque $\mathcal{P}^{(n)}$ est concentré en arité $n + 1$.

Si le $\mathbb{S}$-module E est tel que pour tout n, $E(n)$ est de dimension finie, on appelle **série génératrice** de l'opérade quadratique $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ la série formelle double

$$f_{\mathcal{P}}(x, t) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{d \geq 0} \dim(\mathcal{P}^{(d)}(n)) t^d \right) \frac{x^n}{n!}$$

On a aussi la notion de **coopérade quadratique**

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(E, R)$$

associée à un couple (E, R), qui est une sous-coopérade de $\mathcal{T}^c(E)$.

Définition 4.2.7. Soit t un arbre et e une arête interne de t commençant en un sommet v et finissant en un sommet w. Le sous-arbre de t autour de e, noté τ_e, est l'arbre à deux sommets internes v et w ayant autant d'entrées que dans t, avec une unique arête interne e reliant v à w. On a donc $\tau_e \in \mathcal{T}^{(2)}(In(v)+In(w)-1)$. On étend de manière évidente cette définition aux arbres décorés.

Par définition, un arbre décoré $t \in \mathcal{T}^c(E)$ est dans $\mathcal{C}(E, R)$ si et seulement si pour toute arête interne e de t, l'arbre τ_e est dans R.

Cette coopérade hérite d'une graduation par le poids. On définit aussi sa série génératrice par la même définition que ci-dessus.

4.2.4 Dualité de Koszul opéradique

Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ une opérade quadratique comme ci-dessus. On appelle **coopérade quadratique duale** de $\mathcal{P}$ la coopérade

$$\mathcal{P}^{¡} = \mathcal{C}(sE, s^2R)$$

Son dual
$$\mathcal{P}^! = \Lambda^{-1}(\mathcal{P}^*)$$
a une présentation simple dans le cas des opérades binaires quadratiques (voir [GJ], [LV] ou [F]).

On a $(\mathcal{P}^!)^! = \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^!$ est appelée l'**opérade quadratique duale** de $\mathcal{P}$.

Exemple 4.2.8. *On a* $\mathcal{A}s^! = \mathcal{A}s$, $\mathcal{C}om^! = \mathcal{L}ie$ *et* $\mathcal{L}ie^! = \mathcal{C}om$.

Par analogie avec le cas de (co)algèbres, on munit le $\mathbb{S}$-module gradué $K = \mathcal{P}^{¡} \circ \mathcal{P}$ d'une différentielle d_K qui en fait un $\mathbb{S}$-module différentiel gradué. Pour ne pas alourdir la présentation, on ne donne pas de formule pour d_K ; le lecteur curieux pourra aller consulter [LV].

Le $\mathbb{S}$-module différentiel gradué (K, d_K) est appelé **complexe de Koszul** (à droite) du couple (E, R), et il se scinde par rapport au poids total.

On définit aussi le complexe de Koszul à gauche $(K', d_{K'})$ avec $K' = \mathcal{P} \circ \mathcal{P}^{¡}$.

Comme dans le cas des (co)algèbres, il convient de prendre des précautions quand on analyse les différentes graduations sur la construction bar $B\mathcal{P}$ d'une algèbre quadratique $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$.

Tout d'abord, le poids sur $\mathcal{P}$ donne un poids sur $B\mathcal{P}$, et on note $B\mathcal{P}^{(n)}$ la composante de poids n de $B\mathcal{P}$ (intuitivement, c'est le nombre d'éléments de E qui apparaissent dans une expression). Remarquons que la différentielle préserve le poids.

La graduation définie par $B_n\mathcal{P} = (\mathcal{T}^c)^{(n)}(s\widetilde{\mathcal{P}})$ est appelée "syzygy degree" dans [LV] (intuitivement, c'est le nombre de symboles s qui apparaissent dans une expression). Remarquons que la différentielle fait baisser d'une unité cette graduation.

On a le fait suivant, qui généralise 4.1.2 :

Proposition 4.2.9. *Pour tout n, le noyau de $(B_n\mathcal{P})^{(n)} \xrightarrow{d} (B_{n-1}\mathcal{P})^{(n)}$ est naturellement isomorphe à $\mathcal{P}^{¡(n)}$.*

On définit ainsi un morphisme canonique injectif
$$i : \mathcal{P}^{¡} \hookrightarrow B\mathcal{P}$$
qui est un morphisme de coopérades graduées.

Dualement, on définit un morphisme canonique surjectif
$$p : \Omega\mathcal{P}^{¡} \twoheadrightarrow \mathcal{P}$$
qui est un morphisme d'opérades graduées.

Le théorème suivant généralise 4.1.3

Théorème 4.2.10. *Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ une opérade quadratique et $\mathcal{P}^{¡}$ la coopérade duale. On a équivalence entre :*

1. *L'inclusion $i : \mathcal{P}^{¡} \hookrightarrow B\mathcal{P}$ est un quasi-isomorphisme.*
2. *La projection $p : \Omega\mathcal{P}^{¡} \twoheadrightarrow \mathcal{P}$ est un quasi-isomorphisme.*
3. *Le complexe de Koszul à droite K est acyclique, c'est-à-dire que son homologie est le $\mathbb{S}$-module I.*

4. *Le complexe de Koszul à gauche K' est acyclique, c'est-à-dire que son homologie est le $\mathbb{S}$-module I.*

Définition 4.2.11. Quand les hypothèses du théorème ci-dessus sont vérifiées on dit que l'opérade quadratique $\mathcal{P}$ est une **opérade de Koszul**.

Exemple 4.2.12. *Les opérades $\mathcal{A}s$, $\mathcal{C}om$ et $\mathcal{L}ie$ sont de Koszul.*

Théorème 4.2.13. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade quadratique comme ci-dessus, supposée de Koszul, soit $\mathcal{P}^!$ l'opérade duale. Alors on a l'équation reliant les séries génératrices :*

$$f_{\mathcal{P}^!}(f_{\mathcal{P}}(x,t),-t) = f_{\mathcal{P}}(f_{\mathcal{P}^!}(x,t),-t) = x$$

Démonstration. Il suffit d'exprimer la caractéristique d'Euler des complexes de Koszul, scindés par le poids. $\square$

Chapitre 5

Autour de l'opérade de configuration

5.1 Deux opérades liées aux espaces de modules de courbes en genre zéro

5.1.1 L'opérade de configuration et son homologie

Pour tout $n \geq 2$ notons

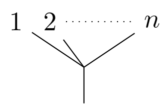
$$\overline{\mathcal{M}}(n) = \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$$

avec l'action de $\mathbb{S}_n$ donnée par la permutation des n derniers points. Posons $\overline{\mathcal{M}}(1) = \{\mathrm{pt}\}$. Le $\mathbb{S}$-espace $\overline{\mathcal{M}} = \left\{\overline{\mathcal{M}}(n)\right\}_{n\geq 1}$ forme une opérade topologique.

Remarquons que $\overline{\mathcal{M}}_{0,k+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,i_1+1} \times ... \times \overline{\mathcal{M}}_{0,i_k+1} = \overline{\mathcal{M}}(t)$ pour

$$t = t(k, i_1, ..., i_k) = c_k \circ (c_{i_1}, ..., c_{i_k})$$

où on rappelle que c_n dénote la n-corolle



Ainsi le morphisme de composition opéradique

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,k+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,i_1+1} \times ... \times \overline{\mathcal{M}}_{0,i_k+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{0,i_1+...+i_k+1}$$

est donné par l'inclusion

$$\overline{\mathcal{M}}(t) \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,i_1+...+i_k+1}$$

La terminologie suivante est inspirée de [GK] :

Définition 5.1.1. L'opérade topologique $\overline{\mathcal{M}}$ est appelée **opérade de configuration**.

Remarquons que la notation $\overline{\mathcal{M}}(t)$ introduite au premier chapitre pour dénommer les strates fermées est cohérente avec la notation opéradique introduite en 2.1.14.

L'homologie de l'opérade $\overline{\mathcal{M}}$ est une opérade graduée notée $\mathcal{H}\overline{\mathcal{M}}$. On a donc $(\mathcal{H}\overline{\mathcal{M}})(1) = \mathbb{K}id$ en degré 0 et pour $n \geq 2$,

$$(\mathcal{H}\overline{\mathcal{M}})(n) = H_\bullet(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1})$$

5.1.2 Une coopérade graduée liée aux espaces $\mathcal{M}_{0,n+1}$

Pour tout $n \geq 2$ notons

$$(\mathcal{H}\mathcal{M})(n) = sH^\bullet(\mathcal{M}_{0,n+1})$$

avec l'action de $\mathbb{S}_n$ induite par la permutation des n derniers points, et posons $\mathcal{H}\mathcal{M}(1) = \mathbb{K}id$ en degré 0.

On met sur le $\mathbb{S}$-module gradué $\mathcal{H}\mathcal{M}$ une structure de coopérade graduée de la manière suivante.

Soit $n \geq 2$ et i_1, ..., i_k tels que $i_1 + ... + i_k = n$. Le morphisme de résidu de Poincaré appliqué à l'inclusion des strates de codimension k dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$ donnent un morphisme d'espaces vectoriels gradués

$$sH^\bullet(\mathcal{M}_{0,n+1}) \to s^{k+1} \bigoplus_{t \in \mathcal{T}_k(n)} H^\bullet(\mathcal{M}(t))$$

qui donne à leur tout un morphisme

$$sH^\bullet(\mathcal{M}_{0,n+1}) \to s^{k+1} H^\bullet(\mathcal{M}(t(k, i_1, ..., i_k)))$$

En remarquant que

$$H^\bullet(\mathcal{M}(t(k, i_1, ..., i_k))) \cong H^\bullet(\mathcal{M}_{0,k+1}) \otimes H^\bullet(\mathcal{M}_{0,i_1+1}) \otimes ... \otimes H^\bullet(\mathcal{M}_{0,i_k+1})$$

par la formule de Künneth, et en répartissant les symboles de suspension dans le terme de droite, on obtient bien un morphisme

$$\mathcal{H}\mathcal{M}(n) \to \mathcal{H}\mathcal{M}(k) \otimes \mathcal{H}\mathcal{M}(i_1) \otimes ... \otimes \mathcal{H}\mathcal{M}(i_k)$$

On vérifie le fait suivant :

Proposition 5.1.2. *Ces morphismes munissent $\mathcal{H}\mathcal{M}$ d'une structure de coopérade graduée.*

Remarquons que dans [G2], E. Getzler considère l'opérade $\mathbf{m} = (\mathcal{H}\mathcal{M})^*$ qui vérifie

$$(\mathcal{H}\mathcal{M})^*(n) = sH_\bullet(\mathcal{M}_{0,n+1})$$

Dans [G1], il considère plutôt l'opérade $\Lambda(\mathcal{H}\mathcal{M})^*$, qui vérifie

$$\Lambda(\mathcal{H}\mathcal{M})^*(n) = s^{2-n}\mathrm{sgn}_n \otimes H_\bullet(\mathcal{M}_{0,n+1})$$

5.2 Un résultat de dualité

5.2.1 Une interprétation opéradique d'une suite exacte due à la théorie de Hodge mixte

Rappelons que dans la première partie (en 1.2.4), on a utilisé la théorie de Hodge mixte pour écrire des suites exactes

$$0 \to H^p(\mathcal{M}_{0,n+1}) \to \bigoplus_{t\in\mathcal{T}_p(n)} H^0(\overline{\mathcal{M}}(t)) \to \bigoplus_{t\in\mathcal{T}_{p-1}(n)} H^2(\overline{\mathcal{M}}(t)) \to ...$$

$$... \to \bigoplus_{t\in\mathcal{T}_1(n)} H^{2p-2}(\overline{\mathcal{M}}(t)) \to H^{2p}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}) \to 0$$

où les flèches à partir de la troisième sont données, aux signes près, par les morphismes de Gysin des inclusions

$$\overline{\mathcal{M}}(t) \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}(t')$$

On cherche à faire le lien entre ces suites exactes et les constructions opéradiques faites précédemment, notamment la construction bar.

Tout d'abord concentrons-nous sur la partie

$$\bigoplus_{t\in\mathcal{T}_p(n)} H^0(\overline{\mathcal{M}}(t)) \to \bigoplus_{t\in\mathcal{T}_{p-1}(n)} H^2(\overline{\mathcal{M}}(t)) \to ... \to H^{2p}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}) \to 0$$

En appliquant la dualité de Poincaré, on obtient

$$\bigoplus_{t\in\mathcal{T}_p(n)} H_{2(n-2-p)}(\overline{\mathcal{M}}(t)) \to \bigoplus_{t\in\mathcal{T}_{p-1}(n)} H_{2(n-2-p)}(\overline{\mathcal{M}}(t)) \to ... \to H_{2(n-2-p)}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}) \to 0$$

et les morphismes sont, aux signes près, induits en homologie par l'inclusion des strates

$$\overline{\mathcal{M}}(t) \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}(t')$$

Insérons des symboles de suspension (et introduisons des signes dans les morphismes en conséquence) pour obtenir une suite exacte :

$$\bigoplus_{t\in\mathcal{T}_p(n)} (s\mathcal{H}\overline{\mathcal{M}})(t) \to \bigoplus_{t\in\mathcal{T}_{p-1}(n)} (s\mathcal{H}\overline{\mathcal{M}})(t) \to ... \to (s\mathcal{H}\overline{\mathcal{M}})(n) \to 0$$

où les flèches sont désormais de degré -1, le premier espace étant en degré $2(n-2-p)+(p+1) = 2(n-1)-(p+1)$.

Soit une strate $\overline{\mathcal{M}}(t)$ de codimension k représentée par un arbre $t \in \mathcal{T}_k(n)$. Les strates de codimension $k-1$ qui contiennent $\overline{\mathcal{M}}(t)$ sont exactement les $\overline{\mathcal{M}}(t/e)$, pour e une arête interne de t.

Ainsi, dans la suite exacte, l'espace $(s\mathcal{H}\overline{\mathcal{M}})(t)$ s'envoie trivialement dans tous les espaces, sauf les $(s\mathcal{H}\overline{\mathcal{M}})(t/e)$. Il suffit enfin de vérifier les signes pour se convaincre de la proposition suivante :

Proposition 5.2.1. *La somme directe sur p des complexes*

$$\bigoplus_{t\in\mathcal{T}_p(n)} (s\mathcal{H}\overline{\mathcal{M}})(t) \to \bigoplus_{t\in\mathcal{T}_{p-1}(n)} (s\mathcal{H}\overline{\mathcal{M}})(t) \to ... \to (s\mathcal{H}\overline{\mathcal{M}})(n) \to 0$$

est exactement la construction bar $B(\mathcal{H}\overline{\mathcal{M}})$ en arité n.

Revenons à la suite exacte de 1.2.4 en entier. En vérifiant les degrés, on obtient une injection

$$(\Lambda^{-2}(\mathcal{H}\mathcal{M}))(n) \hookrightarrow B(\mathcal{H}\overline{\mathcal{M}})(n)$$

En prenant en compte l'action des groupes symétriques et les structures coopéradiques, on montre alors le théorème (équivalent au théorème 4.6 de [G1] et au corollaire 3.4.17 de [GK]) :

Théorème 5.2.2. *Il existe un quasi-isomorphisme de coopérades graduées*

$$\Lambda^{-2}(\mathcal{H}\mathcal{M}) \hookrightarrow B(\mathcal{H}\overline{\mathcal{M}})$$

5.2.2 Algèbres de gravité et algèbres hypercommutatives

Définition 5.2.3. On appelle **algèbre de gravité** un dg-espace vectoriel A muni de crochets antisymétriques

$$[x_1, ..., x_n] : A^{\otimes n} \to A$$

de degré $2-n$, vérifiant les relations suivantes :

- pour tous $k > 2$,

$$\sum_{1\leq i<j\leq k} \pm[[a_i, a_j], a_1, ..., \hat{a_i}, ..., \hat{a_j}, ..., a_k] = 0$$

- pour tous $k > 2$ et $l \geq 1$,

$$\sum_{1\leq i<j\leq k} \pm[[a_i, a_j], a_1, ..., \hat{a_i}, ..., \hat{a_j}, ..., a_k, b_1, ..., b_l] = [[a_1, ..., a_k], b_1, ..., b_l]$$

où $\pm$ est un signe de Koszul, valant $+1$ si tous les a_i sont de degré pair.

Définition 5.2.4. On note $\mathcal{G}rav$ l'opérade graduée (quadratique) associée aux algèbres de gravité.

Notamment, en faisant $k = 3$, on obtient que le crochet binaire vérifie la relation de Jacobi, et une algèbre de gravité est en particulier une algèbre de Lie.

Définition 5.2.5. On appelle **algèbre hypercommutative** un dg-espace vectoriel A muni de produits symétriques

$$(x_1, ..., x_n) : A^{\otimes n} \to A$$

de degré $2(n-2)$, vérifiant la relation suivante : pour $n \geq 0$, a, b, c, x_1,...,x_n dans A,

$$\sum_{S_1 \coprod S_2=\{1,...,n\}} \pm((a, b, x_{S_1}), c, x_{S_2}) = \sum_{S_1 \coprod S_2=\{1,...,n\}} \pm(a, (b, c, x_{S_1}), x_{S_2})$$

où on a noté $x_S = x_{s_1}, ..., x_{s_k}$ pour $S = \{s_1, ..., s_k\}$ un ensemble fini, et où $\pm$ est un signe de Koszul, valant $+1$ si tous les a_i sont de degré pair.

Définition 5.2.6. On note $\mathcal{H}ycom$ l'opérade graduée (quadratique) associée aux algèbres hypercommutatives.

Notamment, en faisant $n = 0$, on obtient que le produit binaire est associatif, et une algèbre hypercommutative est en particulier une algèbre commutative.

Dans [G1] et [G2], E. Getzler prouve le résultat suivant, dont l'ingrédient essentiel est le quasi-isomorphisme du théorème 5.2.2 :

Théorème 5.2.7. *Le morphisme d'opérades*

$$\mathcal{G}rav \to \Lambda(\mathcal{HM})^*$$

qui associe à $[x_1, ..., x_n]$ *le générateur de* $s^{2-n}H_0(\mathcal{M}_{0,n+1})$ *est bien défini et est un isomorphisme. Le morphisme d'opérades*

$$\mathcal{H}ycom \to \mathcal{H}\overline{\mathcal{M}}$$

qui associé à $(x_1, ..., x_n)$ *le générateur de* $H_{2(n-2)}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}) \cong H^0(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1})$ *est bien défini est un isomorphisme.*

Le quasi-isomorphisme du théorème 5.2.2 donne une dualité de Koszul

$$\Lambda^{-1}(\mathcal{G}rav)^* \hookrightarrow B\mathcal{H}ycom$$

et on a $\mathcal{H}ycom^! = \mathcal{G}rav$.

5.2.3 Séries génératrices

La graduation par le poids est facile à décrire :

Proposition 5.2.8. *A-travers l'identification du théorème précédent, on a*

$$\mathcal{G}rav^{(k)}(n) \cong H_{k-1}(\mathcal{M}_{0,n+1})$$

et

$$\mathcal{H}ycom^{(k)}(n) \cong H_{2(n-k-1)}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1})$$

Démonstration. C'est vrai pour $k = 0$ et pour tout n. On montre ensuite par récurrence sur k et n que $\mathcal{G}rav^{(k)}(n)$ est concentré en degré $k-1$ et que $\mathcal{H}ycom^{(k)}(n)$ est concentré en degré $2(n-k-1)$. □

Ainsi les séries génératrices de $\mathcal{G}rav$ et $\mathcal{H}ycom$ sont respectivement

$$f_{\mathcal{G}rav}(x,t) = x + t\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=0}^{n-2} b_k(\mathcal{M}_{0,n+1})t^k\right)\frac{x^n}{n!}$$

et

$$f_{\mathcal{H}ycom}(x,t) = x + t\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=0}^{n-2} b_{2k}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1})t^k\right)\frac{x^n}{n!}$$

et l'application du théorème 4.2.13 à la dualité entre $\mathcal{G}rav$ et $\mathcal{H}ycom$ donne la formule 1.2.5 annoncée dans la première partie.

Bibliographie

[A] V. I. Arnol'd, *The cohomology ring of the colored braid groups*, Mat. Zametki 5 (1969), pp. 227-231.

[BFLSV] X. Buff, J. Fehrenbach, P. Lochak, L. Schneps et P. Vogel, *Espaces de modules de courbes, groupes modulaires et théorie des champs*, Panoramas et Synthèses, numéro 7, SMF (1999).

[C] F. Cohen, *The homology of C_{n+1} spaces*, Lecture Notes in Mathematics 533 (1976)

[D] P. Deligne, *Théorie de Hodge : II*, Pub. math. de l'I.H.E.S., tome 40 (1970), pp. 5-57.

[DM] P. Deligne et D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Pub. math. de l'I.H.E.S., tome 36 (1969), pp. 75-109.

[F] B. Fresse, *Koszul duality of operads and homology of partition posets*, in "Homotopy theory and its applications (Evanston, 2002)", Contemp. Math. 346 (2004), pp. 115-215.

[G1] E. Getzler, *Operads and moduli spaces of genus 0 Riemann surfaces*, in "The moduli space of curves" Progr. Math. 129, Birkhäuser, Boston, 1995, pp. 199-230.

[G2] E. Getzler, *Two-dimensional topological gravity and equivariant cohomology*, Comm. Math. Phys. 163 (1994), pp. 473-489.

[GJ] E. Getzler et J. D. S. Jones, *Operads, homotopy algebra, and iterated integrals for double loop spaces*

[GK] V. Ginzburg et M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. Journal 76 (1994), pp. 203-273.

[J] A. Joyal, *Foncteurs analytiques et espèces de structures*, Springer Lect. Notes in Math. 1234 (1986), pp. 126-159.

[Ke] S. Keel, *Intersection theory of moduli spaces of stable n-pointed curves of genus zero*, Trans. Amer. Math. Soc. 330 (1992), pp. 545-574.

[Kn] F. F. Knudsen, *The projectivity of the moduli space of stable curves II. The stacks $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$*, Math. Scand. 52 (1983), pp. 161-189.

[LV] J.-L. Loday et B. Vallette, *Algebraic Operads*, à paraître.

[Ma] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[Mc] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician, Second Edition*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[MMS] M. Markl, S. Shnider et J. Stasheff, *Operads in algebra, topology and physics*, Math. Surv. and MoneoGraphs, 96. AMS, Providence, RI, 2002.

[P] S. B. Priddy, *Koszul resolutions*, Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970), pp.39-60.

[S1] D. P. Sinha, *A pairing between graphs and trees*, 2006, arXiv :math/0502547v3

[S2] D. P. Sinha, *The homology of the little disks operad*, 2006, arXiv :math/0610236v2

[V] C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, SMF, 2002.