# Autour de l'équation et de la hiérarchie de Vlasov

Clément Gallo, encadré par François Golse

## 1 L'équation de Vlasov

Considérons un système de $N$ particules identiques en interaction. L'état d'une particule à tout instant sera donné par un vecteur dans l'espace des phases $\mathbb{R}^3_x \times \mathbb{R}^3_v$. Si les états initiaux des $N$ particules sont respectivement $a_1, ...a_N \in \mathbb{R}^6$, la répartition initiale des particules étant donc donnée par $\mu^{\alpha_N} := \sum_{n=1}^{N} \delta_{a_n}(da)$ où $\alpha_N := (a_1, ...a_N) \in \mathbb{R}^{6N}$, on note, pour $1 \leqslant n \leqslant N$, $z_n(t, \alpha_N) = z(t, a_n, \mu^{\alpha_N}) = (x_n(t, \alpha_N), \dot{x}_n(t, \alpha_N))$ l'état de la $n$-ième particule à l'instant $t$. La force d'interaction entre les particules $n$ et $m$ sera donnée par $F(x_n - x_m) = -\nabla\phi(x_n - x_m) = \nabla\phi(x_m - x_n)$ qui dérive d'un potentiel et vérifie la loi de l'action et de la réaction. Le système qui en résulte, dit “système de Newton à $N$ particules” est donc, pour des particules de masse 1:

$$\ddot{x}_n(t, \alpha_N) = \sum_{m=1}^{N} F(x_n(t, \alpha_N) - x_m(t, \alpha_N)) \tag{1}$$

$$(x_n(0, \alpha_N), \dot{x}_n(0, \alpha_N)) = a_n = (x_n(0, \alpha_N), v_n(0, \alpha_N)) \tag{2}$$

que l'on peut réécrire sous la forme:

$$\ddot{x}(t, a_n, \mu^{\alpha_N}) = \int_{\mathbb{R}^6} -\nabla\phi(x(t, a_n, \mu^{\alpha_N}) - x(t, b, \mu^{\alpha_N}))\mu^{\alpha_N}(db) \tag{3}$$

$$(x(0, a_n, \mu^{\alpha_N}), \dot{x}(0, a_n, \mu^{\alpha_N})) = a_n \tag{4}$$

On note $\mathcal{M}_+$ l'ensemble des mesures de Radon positives, de masse totale finie, et $\mathcal{M}_+^1$ l'ensemble de celles de masse totale égale à 1.

En 1977, les auteurs de [BH] étudiaient un “système de Newton” d'une forme un peu plus générale que (3)-(4):

$$\ddot{x}(t, a, \mu) = \int_{\mathbb{R}^6} -\nabla\phi(x(t, a, \mu) - x(t, b, \mu))\mu(db) \tag{5}$$

$$z(0, a, \mu) = (x(0, a, \mu), \dot{x}(0, a, \mu)) = a \tag{6}$$

pour lequel ils donnaient un théorème d'existence et d'unicité:

**Théorème 1.1** *Si $\phi \in C_b^2$, pour tout $\mu \in \mathcal{M}_+$, (5)-(6) admet une unique solution $z(t, a, \mu) \in C^1(\mathbb{R}, C^1(\mathbb{R}^6))$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $z(t, \mu)$ :*

*$a \longrightarrow z(t,a,\mu)$ est un $C^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^6$ sur $\mathbb{R}^6$, $z(t,a,\mu)$ est uniformément continue en $\mu$, pour $a \in \mathbb{R}^6$ et $t$ dans un borné, $detDz(t,a,\mu)=1$, et $T_t : (a,\mu) \to (z(t,a,\mu), \mu \circ z(t,\mu)^{-1})$ est un groupe à un paramètre.*

**preuve** Soit $T > 0$, soit $B_T := C_b^0([-T,T] \times \mathbb{R}^6, \mathbb{R}^3)$. C'est un espace de Banach, s'il est muni de la norme $||g||_T := \sup_{|t|\leqslant T,\ a\in\mathbb{R}^6} ||g(t,a)||$.

Soit $U(\mu) : B_T \longrightarrow B_T$ définie par:

$$U(\mu,g)(t,a) = \int_0^t ds \int_0^s dr \int_{\mathbb{R}^6} \mu(da')F(g(r,a)+x+rv-(g(r,a')+x'+rv'))$$

L'application $g(t,a,\mu) \longrightarrow x(t,a,\mu) = x+tv+g(t,a,\mu)$ induit une bijection de l'ensemble des points fixes de $U(\mu)$ sur l'ensemble des solutions de (5)-(6): si $g$ est un point fixe de $U(\mu)$,

$$\frac{d^2}{dt^2}g(t,a,\mu) = \frac{d^2}{dt^2}x(t,a,\mu) = \int_{\mathbb{R}^6} \mu(da')F(x(t,a,\mu)-x(t,a',\mu))$$

et $x(0,a,\mu)=x$, $\dot{x}(0,a,\mu)=v$. Réciproquement, si $x$ vérifie (5)-(6), il est clair par intégration que $g$ est un point fixe de $U(\mu)$. On a:

$$||U(\mu,g)||_T = \sup_{|t|\leqslant T,\ a\in\mathbb{R}^6} ||U(\mu,g)(t,a)|| \leqslant T^2 sup||\nabla\phi||\ |\mu| = c_1T^2|\mu| \text{ si } \phi \in C_b^2$$

$$||U(\mu,g_1)-U(\mu,g_2)||_T \leqslant c_2T^2||g_1-g_2||_T|\mu| \text{ car } \phi \in C_b^2$$

où $c_2$ ne dépend que de la borne supérieure des dérivées secondes de $\mu$. Pour $T$ suffisamment petit , $U(\mu)$ est donc une contraction stricte sur $B_T$; (5)-(6) a une unique solution $z(t,a,\mu)$ qui est $C^1$ en $t$ et en $a$. Le système (5)-(6) étant autonome et $T$ pouvant être choisi égal à $T = \frac{1}{\sqrt{2c_2|\mu|}}$, la solution est globale en $t$. De plus, $z(t,a,\mu)$ est de dérivées uniformément bornées par rapport à $a$ (il suffit pour le voir d'écrire que $U(\mu,g)(t,a)=g(t,a,\mu)$).

Soit $H(t,x,y) := \frac{1}{2}||y||^2 + \int_{\mathbb{R}^6} \mu(da')\phi(x-x(t,a',\mu))$. Si on écrit $z(t,a,\mu) = (x(t,a,\mu), y(t,a,\mu))$, (5)-(6) peut se réécrire comme un système hamiltonien:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \dot{x} & = & y & = & \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} & = & \ddot{x} & = & -\frac{\partial H}{\partial x} \end{array} \right.$$

On en déduit que $detDz(t,\mu)=1,\ \forall t$. En effet, le système étant autonome, il suffit, pour montrer que $\forall t_0,\ \frac{d}{dt}detD_{(x_0,y_0)}z(t,\mu)\big|_{t=t_0} = 0$, de le montrer pour $t_0=0$. Or $(x,y)(t) = (x_0,y_0) + \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x}\right)(0,x_0,y_0)t + O(t^2)$. Donc

$$D_{(x_0,y_0)}z(t,\mu) = Id + \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \end{array} \right) t + O(t^2),$$

$$detD_{(x_0,y_0)}z(t,\mu) = 1 + Tr \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \end{array} \right) t + O(t^2)$$

car $d_{Id}det(M) = Tr(M)$, donc $\frac{d}{dt}detD_{(x_0,y_0)}z(t,\mu)\big|_{t=0} = 0$ (on vient en fait de démontrer le théorème de Liouville pour les systèmes hamiltonniens). Donc, si l'on pose $\mu(t) := \mu \circ z(t,\mu)^{-1}$, $\mu(t) \in \mathcal{M}_+$ et on a $T_{t+s} = T_t \circ T_s$ car, par unicité de la solution, $z(t+s,a,\mu) = z(t, z(s,a,\mu), \mu(s))$. $\square$

Si $\mu$ est la répartition des particules à l'instant 0 (cette répartition pouvant par exemple être "exacte", c'est à dire du type $\mu^{\alpha_N}$, ou du type densité de probabilité), $\mu(t) := \mu \circ z(t,\mu)^{-1}$ peut être vue comme la répartition des particules à l'instant $t$. On va maintenant s'intéresser à l'EDP vérifiée par $\mu(t)$.

Reprenons d'abord notre exemple du système à $N$ particules. On sera par la suite intéressé par la répartition des particules à la limite $N \to \infty$, il est donc plus commode de remplacer $\mu^{\alpha_N}$ par $\mu_N^{\alpha_N} := \frac{1}{N}\mu^{\alpha_N} \in \mathcal{M}_+^1$, ce qui revient à remplacer $\phi$ par $\frac{\phi}{N}$ dans (1) (ce scaling du potentiel est dit "scaling du couplage faible"). Soit donc $\omega_N(t,\alpha_N) := (x_1(t,\alpha_N), v_1(t,\alpha_N)...x_N(t,\alpha_N), v_N(t,\alpha_N))$ la solution de (1)-(2) avec $\phi$ remplacé par $\frac{\phi}{N}$. C'est la caractéristique issue de $\omega_N(0,\alpha_N) = \alpha_N$ de l'équation de Liouville:

$$\frac{\partial P_N}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} v_j.\nabla_{x_j} P_N - \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant N} \nabla\phi(x_j - x_k).\nabla_{v_j} P_N = 0 \tag{7}$$

avec donnée initiale $P_N(0) = \prod_{i=1}^{N} \delta_{a_n}$.

De même, si la répartition initiale est donnée par $\mu^f(da) := f(a)da$ où $f \in C^1(\mathbb{R}^6)$, si on note $\mu^f(t)(da) = \mu \circ z(t,\mu^f)^{-1}(da) = f(t,a)da$, $z(t,a,\mu^f)$ est la caractéristique issue de $a = (x,v)$ de l'équation de Vlasov:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x,v) + v.\nabla_x f(t,x,v) - \nabla_v f(t,x,v) \int_{\mathbb{R}^6} \nabla\phi(x-x')f(t,x',v')dx'dv' = 0 \tag{8}$$

avec donnée initiale:$f(0,x,v) = f(x,v)$.

Dans [BH], on a le résultat plus précis:

**Théorème 1.2** *Si $\phi \in C_b^2$ et si $\mu \in \mathcal{M}_+^1$ , alors $\mu(t) := \mu \circ z(t,\mu)^{-1}$ est solution faible de l'équation de Vlasov avec donnée initiale $\mu(0) = \mu$, au sens où pour tout $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^6)$,*

$$< \mu, \psi(0) > + \int_{\mathbb{R}_+} < \mu(t), (\partial_t\psi + v.\nabla_x\psi - \nabla_x(\phi * \rho_{\mu(t)}).\nabla_v\psi)(t) > dt = 0 \tag{9}$$

$$\text{où } \rho_f(t,x) := \int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v)dv \tag{10}$$

*De plus, si $\mu = \mu^f$ où $0 \leqslant f \in C^1(\mathbb{R}^6)$, $\int_{\mathbb{R}^6} f(a)da = 1$, $f(t,a) := f \circ z(t,\mu)^{-1}(a)$ est solution classique (ie $f \in C^1(\mathbb{R}_+, C^1(\mathbb{R}^6))$) de l'équation de Vlasov (8) avec pour donnée initiale $f(0,a) = f(a)$.*

**preuve**

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+} < \mu(t), (\partial_t\psi + v.\nabla_x\psi - \nabla_x(\phi * \rho_{\mu(t)}).\nabla_v\psi)(t) > dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} < \mu, \frac{d}{dt}\psi(z(t,a,\mu)) > dt \\
&= - < \mu, \psi(0) >
\end{aligned}$$

d'où la première partie de l'énoncé.

Si $\mu = \mu^f$, on vérifie facilement que $f$ est une solution classique de l'équation de Vlasov (8) en dérivant l'égalité $f(t, z(t, a, \mu^f)) = f(a)$, et en faisant le changement de variable $a = z(t, \mu)^{-1}(z)$. □

On a ainsi montré que l'unique solution de (5)-(6) nous donnait une solution de (8). Intéressons nous maintenant à l'unicité de cette solution.

**Théorème 1.3** *Si $\phi \in C_b^2$, si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_+)$ est solution faible de l'équation de Vlasov (9), alors*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ ||f(t)||_{\mathcal{M}_+} = ||f(0)||_{\mathcal{M}_+}$$

*(où on note, pour $f \in \mathcal{M}_+$, $||f||_{\mathcal{M}_+} =< f, 1 >= ||f||_{C_0(\mathbb{R}^6)'}$).*

*En particulier, si $f(0) \in \mathcal{M}_+^1$ alors $f(t) \in \mathcal{M}_+^1$ pour tout $t$.*

**preuve** La preuve consiste simplement en une justification du calcul formel:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int\int_{\mathbb{R}^6} f(t,x,v)dxdv \\ &= \int\int_{\mathbb{R}^6}\left(-v.\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,v) + \frac{\partial f}{\partial v}(t,x,v).(\nabla_x\phi * \rho_f(t))(x)\right)dxdv = 0 \end{aligned}$$

Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $C^\infty$ croissante telle que

$$\begin{cases} \psi \equiv 0 \text{ sur } ]-\infty, 0[ \\ \psi \equiv 1 \text{ sur } ]1, +\infty[ \end{cases}$$

Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Pour $n \geqslant 1$, on pose:

$$\psi_n(t,x,v) := \psi((t_0 - t)n + 1)\psi(n - |v| + 1)\psi(\frac{1}{n}(n - |x|) + 1)$$

Clairement, $\psi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^6)$, et

$$< f(0), \psi_n(0) > \to < f(0), 1 >,$$

$$\begin{aligned} < f(t), v.\nabla_x\psi_n(t) > &= < f(t), v.\underbrace{\nabla_x\psi_n(t)1_{[0,n]\cup[2n,\infty[}(|x|)}_{0} > \\ &+ < f(t), \underbrace{v.\nabla_x\psi_n(t)1_{[n,2n]}(|x|)}_{|.|\leqslant C} > \to 0 \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, car $f(t)$ est de mesure finie. Donc, par théorème de convergence dominée ($< f(t), v.\nabla_x\psi_n(t)1_{[n,2n]}(|x|) >\leqslant ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathcal{M}_+)}C1_{[0,t_0+1]}(t)$):

$$\int_{\mathbb{R}_+} < f(t), v.\nabla_x\psi_n(t) > dt = \int_0^{t_0+1} < f(t), v.\nabla_x\psi_n(t) > dt \to 0$$

$$\begin{aligned} < f(t), \nabla_x\phi * \rho_{f(t)}.\nabla_v\psi_n(t) > &= < f(t), \nabla_x\phi * \rho_{f(t)}.\underbrace{\nabla_v\psi_n(t)1_{[0,n]\cup[n+1,\infty[}(|v|)}_{0} > \\ &+ < f(t), \underbrace{\nabla_x\phi * \rho_{f(t)}.\nabla_v\psi_n(t)1_{[n,n+1]}(|v|)}_{|.|\leqslant C||\nabla_x\phi||_{L^\infty}<f(t),1>} > \to 0 \end{aligned}$$

car $f(t)$ est de mesure finie, pour tour $t \in \mathbb{R}_+$. Et donc, comme $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_+)$, on a de même:

$$\int_{\mathbb{R}_+} < f(t), \nabla_x \phi * \rho_{f(t)}.\nabla_v \psi_n(t) > dt = \int_0^{t_0+1} < f(t), \nabla_x \phi * \rho_{f(t)}.\nabla_v \psi_n(t) > dt \to 0$$

Enfin, en posant $\chi_n(x,v) := \psi(n - |v| + 1)\psi(\frac{1}{n}(n - |x|) + 1)$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}_+} < f(t), \partial_t \psi_n(t) > dt - < f(t_0), 1 > \right| \\
&\quad \leqslant \left| \int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{n}} < f(t) - f(t_0), \partial_t \psi_n(t) > dt \right| + \left| < f(t_0), \left( \int_{\mathbb{R}_+} \partial_t \psi_n(t) dt - 1 \right) > \right| \\
&\quad \leqslant \frac{1}{n} n ||\psi'||_{L^\infty} \sup_{s \in [t_0, t_0+\frac{1}{n}]} ||f(s) - f(t_0)||_{\mathcal{M}_+} + < f(t_0), 1_{[n+1,\infty[}(|v|) 1_{[2n,\infty[}(|x|) > \\
&\quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

car $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_+)$. Donc

$$\int_{\mathbb{R}_+} < f(t), \partial_t \psi_n(t) > dt \to < f(t_0), \int_{\mathbb{R}_+} \partial_t \psi_n(t) dt = < f(t_0), 1 >$$

Au total, en passant à la limite dans l'expression du fait que $f$ est solution faible de Vlasov appliquée à $\psi_n$, on obtient bien que $< f(t_0), 1 > = < f(0), 1 >$. $\square$

**Théorème 1.4** *On suppose $\phi \in C_b^2$. Si $f(t)$ est solution de (9), si $g(t)$ est solution classique de (8) avec pour données initiales $f(0) = g(0) = f \in C_0^1(\mathbb{R}^6)$, alors $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) = g(t)$.*

**preuve** On écrit que $f$ et $g$ sont solutions de (9) avec même condition initiale, on soustrait les deux égalités obtenues: $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^6)$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^6} (f-g)(t,x,v), (\partial_t + v.\nabla_x - \nabla_x \phi * \rho_{f(t)}.\nabla_v)\varphi(t,x,v) dx dv dt \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^6} \nabla_v g(t,x,v).\nabla_x \phi * \rho_{(f-g)(t)}(x) \varphi(t,x,v) dx dv dt = 0
\end{aligned}$$

En choisissant pour $\varphi$, $\varphi_n(t,x,v) := \psi_n(t,x,v) S_n(t,x,v)$ où $\psi_n$ est celui défini dans la preuve précédente et où $S_n(f-g)$ est une approximation $C^\infty$ du signe de $f-g$, on montre comme dans la preuve du théorème 1.3 que le premier terme converge vers

$$||\ |f-g|(t_0)||_{\mathcal{M}_+} = < |f-g|(t_0), 1 > .$$

Majorons le second terme:

$$\begin{aligned}
&| \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^6} \nabla_v g(t,x,v).\nabla_x \phi * \rho_{(f-g)(t)}(x) \psi_n(t,x,v) S_n(f-g)(t,x,v) dx dv dt | \\
&\quad \leqslant \int_0^{t_0+\frac{1}{n}} \sup_{t \in [0, t_0+\frac{1}{n}]} ||\ |\nabla_v g(t)|\ ||_{\mathcal{M}_+} ||\nabla_x \phi||_{L^\infty} \sup_{t \in [0, t_0+\frac{1}{n}]} ||\ |f-g|(t)||_{\mathcal{M}_+} dt
\end{aligned}$$

donc pour $n \to \infty$,

$$|| \, |f-g|(t_0)||_{\mathcal{M}_+} \leqslant t_0 ||\nabla_x \phi||_{L^\infty} \sup_{t\in[0,t_0]} || \, |\nabla_v g(t)| \, ||_{\mathcal{M}_+} \sup_{t\in[0,t_0]} || \, |f-g|(t)||_{\mathcal{M}_+}$$

Par continuité, il existe $t_1 \in [0,t_0]$ tel que

$$|| \, |f-g|(t_1)||_{\mathcal{M}_+} = \sup_{t\in[0,t_0]} || \, |f-g|(t)||_{\mathcal{M}_+}.$$

L'application $u : t_0 \to t_0 ||\nabla_x \phi||_{L^\infty} \sup_{t\in[0,t_0]} || \, |\nabla_v g(t)| \, ||_{\mathcal{M}_+}$ est croissante, continue, et $u(t_0) \underset{t_0 \to 0^+}{\longrightarrow} 0$. On peut donc choisir $t_0$ assez petit pour que $u(t_0) < 1$, et $|| \, |f-g|(t_1)||_{\mathcal{M}_+} \leqslant u(t_0) || \, |f-g|(t_1)||_{\mathcal{M}_+}$. Donc $|| \, |f-g|(t_1)||_{\mathcal{M}_+} = 0$, et $\exists t_0 > 0$, $f(t) = g(t)$ sur $[0,t_0]$.

Soit alors $\tilde{t} := sup\{t \geqslant 0, h(t) = 0\} > 0$. Si on avait $\tilde{t} < \infty$, on poserait $\tilde{f}(t) := f(\tilde{t}+t)$ et $\tilde{g}(t) := g(\tilde{t}+t)$ pour $t \geqslant 0$ qui sont solutions de l'équation de Vlasov avec même donnée initiale $\tilde{f}(0) = f(\tilde{t}) = g(\tilde{t}) = \tilde{g}(0)$, et donc, d'après ce que l'on vient de voir, il existe $t_0 > 0$ tel que $f$ et $g$ coincident sur $[\tilde{t}, \tilde{t}+t_0]$, ce qui est contradictoire avec la définition de $\tilde{t}$. Donc $\tilde{t} = \infty$ et le théorème est prouvé. □

# 2 Passage à la limite dans l'équation de Vlasov

Dans [BH] est donné un résultat concernant la "weak coupling limit" du système à $N$ particules avec potentiel $\frac{\phi}{N}$:

**Théorème 2.1** *Si $\phi \in C_b^2$, si $\mu_N^{\alpha_N} \overset{w*}{\longrightarrow} \mu \in \mathcal{M}_+^1$, alors*

$$\mu_N^{\alpha_N}(t) = \mu_N^{\alpha_N} \circ z(t, \mu_N^{\alpha_N})^{-1} = \mu_N^{\omega_N(t,\alpha_N)} \overset{w*}{\longrightarrow} \mu(t) = \mu \circ z(t,\mu)^{-1}$$

**preuve** Soit $h \in C_b^0(\mathbb{R}^6)$.

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^6} \mu_N^{\omega_N(t,\alpha_N)}(da) h(a) - \int_{\mathbb{R}^6} \mu(t)(da) h(a) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^6} \mu_N^{\omega_N(t,\alpha_N)}(z(t,\mu_N^{\alpha_N})(db)) h(z(t,b,\mu_N^{\alpha_N})) - \int_{\mathbb{R}^6} \mu(t)(z(t,\mu)(db)) h(z(t,b,\mu)) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^6} \mu_N^{\alpha_N}(db) h(z(t,b,\mu_N^{\alpha_N})) - \int_{\mathbb{R}^6} \mu(db) h(z(t,b,\mu)) \right| \\
&\leqslant \left| \int_{\mathbb{R}^6} \mu_N^{\alpha_N}(db)(h(z(t,b,\mu_N^{\alpha_N})) - h(z(t,b,\mu))) \right| + \underbrace{\left| \int_{\mathbb{R}^6} (\mu_N^{\alpha_N} - \mu)(db) h(z(t,b,\mu)) \right|}_{\to 0 \text{ par hypothèse}}
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mu_N^{\alpha_N} \overset{w*}{\rightharpoonup} \mu$ et $\mu \in \mathcal{M}_+^1$, il existe un compact $K(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^6$ tel que $\forall N \in \mathbb{N}, \mu_N^{\alpha_N}(K(\varepsilon)) \geqslant 1-\varepsilon$ (on choisit $K(\varepsilon)$ pour que $\mu(K(\varepsilon)) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, il existe donc $N_0$ tel que l'inégalité soit vérifiée pour $N \geqslant N_0$, et donc, quitte à agrandir $K(\varepsilon)$, elle est vérifiée pour tout $N$). Sur $K(\varepsilon)$, $h$ est uniformément continue, et donc, grâce au théorème 1.1, $\sup_{b\in K(\varepsilon)} |h(z(t,b,\mu_N^{\alpha_N})) - h(z(t,b,\mu))| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où le résultat souhaité. □

## 3 La hiérarchie de Vlasov

Le système (3)-(4) permet théoriquement la résolution du problème à $N$ particules interagissant suivant un potentiel $C_b^2$. Il n'est cependant pas utilisable en pratique, d'une part du fait de la très grande taille de $N$ pour un système physique concret (de l'ordre de $10^{23}$ par exemple), interdisant tout calcul, et d'autre part parce qu'il serait de peu d'utilité de connaître exactement l'état de chaque particule à tout instant: ce qui nous intéresse est une densité de probabilité relative à l'état de quelques particules ( ce "quelques" pourra en fait être choisi aussi grand que l'on veut).

Soit donc, pour $n \leqslant N$, les marginales:

$$P_N^n(t, a_1...a_n) := \int_{\mathbb{R}^{6(N-n)}} P_N(t, a_1...a_N) da_{n+1}...da_N \tag{11}$$

où $P_N(t)$ est la solution de (7) définie par $P_N(t, \alpha_N) := P_N(0, \omega_N(t)^{-1}(\alpha_N))$, où $P_N(0) \in \mathcal{M}_+^1$ est la répartition initiale des $N$ particules (on remarque que $P_N^n(t)$ est bien défini car $\forall t, P_N(t) \in \mathcal{M}_+^1$, et qu'on a fait ici l'abus de notation qui consiste à remplacer les crochets de distributions par des intégrales). On suppose les particules indistingables au temps $t = 0$:

$$P_N(0, a_1...a_N) = P_N(0, a_{\sigma(1)}...a_{\sigma(N)}) \qquad \forall \sigma \in \mathcal{S}_N \tag{12}$$

vu l'équation de Liouville, cette propriété se propage clairement au cours du temps:

$$\text{pour tout } t,\ P_N(t, a_1, ..., a_N) = P_N(t, a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(N)}), \qquad \forall \sigma \in \mathcal{S}_N \tag{13}$$

Intégrons l'équation de Liouville par rapport aux $(N-n)$ dernières variables en tenant compte de (11),

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P_N^{(n)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^{6(N-n)}} v_i \frac{\partial P_N}{\partial x_i} dx_{n+1} dv_{n+1} ... dx_N dv_N \\ &\quad - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^{6(N-n)}} \nabla \phi(x_i - x_j) \frac{\partial P_N}{\partial v_i} dx_{n+1} dv_{n+1} ... dx_N dv_N = 0 \end{aligned}$$

La contribution des termes $n+1 \leqslant i \leqslant N$ est nulle (on intègre d'abord en $x_i$ dans la première somme, en $v_i$ dans la seconde), et on sépare les cas $1 \leqslant j \leqslant n$ et $n+1 \leqslant j \leqslant N$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P_N^{(n)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial P_N^{(n)}}{\partial x_i} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \nabla \phi(x_i - x_j) \frac{\partial P_N^{(n)}}{\partial v_i} \\ &\quad - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{N} \int_{\mathbb{R}^{6(N-n)}} \nabla \phi(x_i - x_j) \frac{\partial P_N}{\partial v_i} dx_{n+1} dv_{n+1} ... dx_N dv_N = 0 \end{aligned}$$

Mais, grâce à (13),

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{6(N-n)}} \nabla \phi(x_i - x_j) \frac{\partial P_N}{\partial v_i} (...x_{n+1}, v_{n+1}...x_j, v_j...) dx_{n+1} dv_{n+1} ... dx_N dv_N \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^{6(N-n)}} \nabla \phi(x_i - x_{n+1}) \frac{\partial P_N}{\partial v_i} (...x_j, v_j...x_{n+1}, v_{n+1}...) dx_{n+1} dv_{n+1} ... dx_N dv_N \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^{6(N-n)}} \nabla \phi(x_i - x_{n+1}) \frac{\partial P_N}{\partial v_i} (...x_{n+1}, v_{n+1}...x_j, v_j...) dx_{n+1} dv_{n+1} ... dx_N dv_N \end{aligned}$$

Ce dernier terme ne dépendant plus de $j \in \{n+1...N\}$, on en déduit la "hiérarchie finie de Vlasov":

$$\frac{\partial P_N^{(n)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial P_N^{(n)}}{\partial x_i} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \nabla\phi(x_i - x_j)\frac{\partial P_N^{(n)}}{\partial v_i}$$
$$-\frac{N-n}{N}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^6} \nabla\phi(x_i - x_{n+1})\frac{\partial P_N^{(n+1)}}{\partial v_i} dx_{n+1}dv_{n+1} = 0 \qquad (14)$$

On obtient la hiérarchie (infinie) de Vlasov en faisant tendre formellement $N$ vers l'infini dans (14):

$$\frac{\partial P^{(n)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial P^{(n)}}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^6} \nabla\phi(x_i - x_{n+1})\frac{\partial P^{(n+1)}}{\partial v_i} dx_{n+1}dv_{n+1} = 0 \qquad (15)$$

**Remarque** Sous l'hypothèse de chaos initial, on a l'existence d'une solution à la hiérarchie infinie de Vlasov (15): si

$$P^n(0, da_1...da_n) \quad = \quad \prod_{j=1}^{n} \mu(da_j) \qquad (16)$$

alors $P^n(t, da_1...da_n) = \prod\limits_{j=1}^{n} \mu(t, da_j)$ est une solution faible factorisée de (15). En effet:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mu(t, da_j) \right) \left[ \frac{\partial \mu}{\partial t}(t, da_i) + v_i . \frac{\partial \mu}{\partial x}(t, da_i) \right.$$
$$\left. - \frac{\partial \mu}{\partial v}(t, da_i) \int_{\mathbb{R}^6} \nabla\phi(x_i - x_{n+1})\mu(t, da_{s+1}) \right]$$

# 4 Passage à la limite dans la hiérarchie de Vlasov

**Théorème 4.1** *On suppose $\phi \in C_b^2$, et $\forall n \geqslant 1$, $P_N^{(n)I} \overset{w*}{\rightharpoonup} P^{(n)I}$ dans $(C_0(\mathbb{R}^{6n}))'$. Si on note $P_N^{(n)}$ la solution (faible) de la hiérarchie finie de Vlasov (14) construite précédemment, avec donnée initiale $P_N^{(n)}(0) = P_N^{(n)I} \in \mathcal{M}_+^1$, toute valeur d'adhérence $\{P^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ dans $\prod\limits_{n\geqslant 1} L^\infty(\mathbb{R}_+, C_0(\mathbb{R}^{6n})')$ de la suite de marginales $\left(\{P_N^{(n)}\}_{n\geqslant 1}\right)_{N\geqslant 1}$ est solution au sens des distributions de la hiérarchie de Vlasov (15) avec pour donnée initiale $P^{(n)}(0) = P^{(n)I}$.*

*Si on suppose de plus que l'énergie est d'ordre $N$, à savoir qu'il existe $C > 0$ tel que*

$$\int\int_{\mathbb{R}^{6N}} (|X_N|^2 + |V_N|^2) P_N(0, X_N, V_N) dX_N dV_N \quad \leqslant \quad CN \qquad (17)$$

*alors les $P^{(n)}(t)$ sont des mesures de probabilité, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Dans ce dernier cas, on a l'existence sur $\mathbb{R}_+$ d'une solution à la hiérarchie de Vlasov (15).*

**preuve** Soit $\left(\{P_{\Phi(N)}^{(n)}\}_{n\geqslant 1}\right)_{N\geqslant 1} \in \prod_{n\geqslant 1} L^\infty(\mathbb{R}_+, C_0(\mathbb{R}^{6n})')$ une sous-suite convergente pour la topologie faible étoile ; on la note encore $\left(\{P_N^{(n)}\}_{n\geqslant 1}\right)_{N\geqslant 1}$ par commodité. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{6n})$. On multiplie (14) par $\chi$, et on somme sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{6n}$:

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{6n}} & \left( \frac{\partial P_N^{(n)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial P_N^{(n)}}{\partial x_i} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \nabla\phi(x_i - x_j)\frac{\partial P_N^{(n)}}{\partial v_i} \right. \\
& \left. - \frac{N-n}{N}\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^6} \nabla\phi(x_i - x_{n+1})\frac{\partial P_N^{(n+1)}}{\partial v_i} dx_{n+1}dv_{n+1}\right)\chi(t, a_1...a_n)dtda_1...da_n \\
= - \int_{\mathbb{R}^{6n}} & P_N^{(n)}(0, a_1...a_n)\chi(0, a_1...a_n)da_1...da_n \\
- \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{6n}} & P_N^{(n)} \left( \frac{\partial\chi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \chi}{\partial x_i} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \nabla\phi(x_i - x_{n+1})\frac{\partial\chi}{\partial v_i}\right) dtda_1...da_n \\
\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{6(n+1)}} & \frac{N-n}{N} P_N^{(n+1)} \sum_{i=1}^n \nabla\phi(x_i - x_{n+1})\frac{\partial\chi}{\partial v_i}dtda_1...da_n
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
0 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} & \int_{\mathbb{R}^{6n}} -P^{(n)I}\chi(0)da_1...da_n \\
& - \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{6n}} \left[ P^{(n)}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\right) \right. \\
& \left. - \sum_{i=1}^n \frac{\partial\chi}{\partial v_i}\int_{\mathbb{R}^6} P^{(n+1)}\nabla\phi(x_i - x_{n+1})da_{n+1}\right] dtda_1...da_n
\end{aligned}
$$

d'où la première partie de l'énoncé.

Supposons maintenant (17). On a déjà vu que $\forall t \in \mathbb{R}_+, P_N(t) \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^{6N})$, donc $P_N^{(n)}(t) \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^{6n})$. Il suffit donc pour conclure de montrer que, à une sous-suite près, la convergence $P_N^{(n)}(t) \rightharpoonup P^{(n)}(t)$ est étroite. Soit $H_N$ l'Hamiltonien de l'équation de Liouville (7):

$$
H_N(X_N, V_N) = \frac{|V_N|^2}{2} + \frac{1}{N}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant N}\phi(x_j - x_k) \tag{18}
$$

On a:

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\int\int H_N(X_N, V_N)P_N(X_N, V_N, t)dX_N dV_N \\
= & -\int\int H_N(X_N, V_N)\left[\frac{\partial H_N}{\partial V_N}\frac{\partial P_N}{\partial X_N} - \frac{\partial H_N}{\partial X_N}\frac{\partial P_N}{\partial V_N}\right]dX_N dV_N = 0
\end{aligned}
$$

car $\frac{\partial H_N}{\partial X_N}$ est indépendant de $V_N$ et $\frac{\partial H_N}{\partial V_N}$ est indépendant de $X_N$. Donc, du fait de (13), pour tout $j \in \{1...N\}$,

$$\begin{aligned}
&\int\int |v_j|^2 P_N(X_N, V_N, t) dX_N dV_N \\
&= \frac{1}{N}\int\int |V_N|^2 P_N(X_N, V_N, t) dX_N dV_N \\
&= \frac{1}{N}\left[\int\int |V_N|^2 P_N(X_N, V_N, 0) dX_N dV_N\right. \\
&+ \left.\int\int \frac{1}{N}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant N} 2\phi(x_j - x_k)(P_N(X_N, V_N, 0) - P_N(X_N, V_N, t)) dX_N dV_N\right] \\
&\leqslant \frac{1}{N}\left(CN + \frac{2}{N}||\phi||_{L^\infty} 2\frac{N(N-1)}{2}\right) \\
&\leqslant C
\end{aligned}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int\int |x_j|^2 P_N(X_N, V_N, t) dX_N dV_N \\
&= -\int\int |x_j|^2 \left[\frac{\partial H_N}{\partial V_N}\frac{\partial P_N}{\partial X_N} - \frac{\partial H_N}{\partial X_N}\frac{\partial P_N}{\partial V_N}\right] dX_N dV_N \\
&= \int\int x_j v_j P_N(X_N, V_N, t) dX_N dV_N \\
&\leqslant \int\int \frac{x_j^2 + v_j^2}{2} P_N(X_N, V_N, t) dX_N dV_N \\
&\leqslant C + \frac{1}{2}\int\int |x_j|^2 P_N(X_N, V_N, t) dX_N dV_N
\end{aligned}$$

et donc, d'après le lemme de Gronwall, pour tout $T > 0$, il existe $C(T)$ tel que $\int\int |x_j|^2 P_N(X_N, V_N, t) dX_N dV_N \leqslant C(T)$, pour $t \leqslant T$.
Fixons $n \in \mathbb{N}$. Soit, pour $m \in \mathbb{N}$, $\theta_m \in C_0^0(\mathbb{R}^{6n})$ telle que $0 \leqslant \theta_m \leqslant 1$, $\theta_m(X_n, V_n) = 0$ pour $|(X_n, V_n)| > m+1$, et $\theta_m(X_n, V_n) = 1$ pour $|(X_n, V_n)| < m$. Soit $g \in C_b^0(\mathbb{R}^{6n})$.

$$\begin{aligned}
&|\int P_N^{(n)}(X_N, V_N) g(X_N, V_N) dX_N dV_N - \int P^{(n)}(X_N, V_N) g(X_N, V_N) dX_N dV_N| \\
&\leqslant |\int P_N^{(n)} g\theta_m dX_N dV_N - \int P^{(n)} g\theta_m dX_N dV_N| \\
&\quad +|\int P_N^{(n)} g(1-\theta_m) dX_N dV_N| \\
&\quad +|\int P^{(n)} g(1-\theta_m) dX_N dV_N|
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, et $m$ assez grand pour que $\frac{1}{m^2} < \varepsilon$ et pour que le troisième terme de l'inégalité précédente soit lui aussi inférieur à $\varepsilon$. Majorons le second terme:

$$
\begin{aligned}
&|\int P_N^{(n)} g(1-\theta_m) dX_n dV_n| \\
&\leqslant \quad ||g||_{L^\infty} \int_{\{|X_n|^2+|V_n|^2>m^2\}} P_N^{(n)}(X_n V_n) \frac{|X_n|^2+|V_n|^2}{|X_n|^2+|V_n|^2} dX_n dV_n \\
&\leqslant \quad \frac{||g||_{L^\infty}}{m^2} \int P_N^{(n)}(X_n V_n)(|X_n|^2+|V_n|^2) dX_n dV_n \\
&\leqslant \quad \frac{||g||_{L^\infty}}{m^2} \int P_N(X_N V_N)(|X_n|^2+|V_n|^2) dX_N dV_N \\
&\leqslant \quad \frac{nC(T)||g||_{L^\infty}}{m^2}
\end{aligned}
$$

$P_N^{(n)} \rightharpoonup P^{(n)}$, $g$ est bornée et $\theta_m$ est à support compact, donc, pour $N$ assez grand, $|\int (P_N^{(n)} - P^{(n)}) g\theta_m dX_n dV_n| < \varepsilon$, et au total,

$$
\begin{aligned}
&|\int P_N^{(n)}(X_N, V_N) g(X_N, V_N) dX_N dV_N - \int P^{(n)}(X_N, V_N) g(X_N, V_N) dX_N dV_N| \\
&\leqslant \quad (2 + nC(T)||g||_{L^\infty})\varepsilon
\end{aligned}
$$

On a donc bien la convergence faible étroite de $P_N^{(n)}$ vers $P^{(n)}$, ce qui achève la preuve du théorème. □

# 5 De l'équation à la hiérarchie de Vlasov

Sous l'hypothèse du chaos initial (16), on peut obtenir un résultat voisin de celui obtenu dans la section précédente, directement à partir du théorème (2.1) de Braun et Hepp. Le lemme suivant est lui aussi énoncé dans [BH].

**Lemme 5.1** *On suppose* $\mu_N^{\alpha_N} \xrightarrow{w*} \mu \in \mathcal{M}_+^1$. *Si* $h \in C_b^0(\mathbb{R}^{6n})$, *on définit les "quantités observables intensives":*

$$
\begin{aligned}
O_h^t(\alpha_N) \quad &:= \quad N^{-n} \sum_{n_1 \dots n_n = 1}^{N} h(z_{n_1}(t, \alpha_N), ..., z_{n_n}(t, \alpha_N)) \qquad (19) \\
&= \quad \int_{\mathbb{R}^{6n}} h(z(t, a_1, \mu_N^{\alpha_N}), ..., z(t, a_n, \mu_N^{\alpha_N})) \mu_N^{\alpha_N}(da_1) ... \mu_N^{\alpha_N}(da_n) \\
&= \quad \int_{\mathbb{R}^{6n}} h(a_1, ..., a_n) \mu_N^{\alpha_N}(t, da_1) ... \mu_N^{\alpha_N}(t, da_n)
\end{aligned}
$$

*Alors* $O_h^t(\alpha_N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^{6n}} h(z(t, a_1, \mu), ..., z(t, a_n, \mu)) \mu(da_1) ... \mu(da_n)$. *Autrement dit,*

$$
\prod_{j=1}^{n} \mu_N^{\alpha_N}(t, da_j) \xrightarrow{w*} \prod_{j=1}^{n} \mu(t, da_j)
$$

**preuve** On fixe $t \in \mathbb{R}_+$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $K(\varepsilon)$ un compact de $\mathbb{R}^6$ tel que $max(< \mu_N^{\alpha_N}(t), 1_{K(\varepsilon)^c} >, < \mu(t), 1_{K(\varepsilon)^c} >) \leqslant \varepsilon$. On a alors:

$$
\begin{aligned}
&| \int_{\mathbb{R}^{6n}} h(a_1 ... a_n)(\mu_N^{\alpha_N}(t, da_1) ... \mu_N^{\alpha_N}(t, da_n) - \mu(t, da_1) ... \mu(t, da_n))| \\
&\quad \leqslant \; | \int_{K(\varepsilon)^n} h(a_1 ... a_n)(\mu_N^{\alpha_N}(t, da_1) ... \mu_N^{\alpha_N}(t, da_n) - \mu(t, da_1) ... \mu(t, da_n))| + 2\varepsilon ||h||_{L^\infty}
\end{aligned}
$$

Quitte à agrandir $K(\varepsilon)$, on peut supposer

$$
\left| \prod_{j=1}^{n} \mu_N^{\alpha_N}(t) - \prod_{j=1}^{n} \mu(t) \right| (\partial(K(\varepsilon)^n) + B(0,1)) \leqslant \varepsilon
$$

Soit alors $\chi \in C_0^\infty(K(\varepsilon)^n)$ tel que $\chi \equiv 1$ sur $K(\varepsilon)^n \cap [\partial(K(\varepsilon)^s) + B(0,1)]^c =: K'(\varepsilon)$. On a:

$$
\begin{aligned}
&|O_h^t(\alpha_N) - \int_{\mathbb{R}^{6n}} h(z(t, a_1, \mu), ..., z(t, a_n, \mu)) \mu(da_1) ... \mu(da_n)| \\
&\quad \leqslant \; 2\varepsilon ||h||_{L^\infty} + \varepsilon ||h||_{L^\infty} \\
&\quad + \; | \int_{K(\varepsilon)^n} h(a_1 ... a_n) \chi(a_1 ... a_n)(\mu_N^{\alpha_N}(t, da_1) ... \mu_N^{\alpha_N}(t, da_n) - \mu(t, da_1) ... \mu(t, da_n))|
\end{aligned}
$$

par densité de $\bigotimes_{i=1}^{n} C_0^\infty(K(\varepsilon))$ dans $C_0^\infty(K(\varepsilon)^n)$, lui même dense dans $C_0^0(K(\varepsilon)^n)$, $\exists g \in \bigotimes_{i=1}^{n} C_0^\infty(K(\varepsilon))$ tel que $||g - \chi h||_{L^\infty} \leqslant \varepsilon$. On écrit $g$ sous la forme:

$$
g(a_1 ... a_n) = \sum_{m=1}^{M} g_1^m(a_1) ... g_n^m(a_n), \qquad g_i^m \in C_0^\infty(K(\varepsilon)).
$$

On a:

$$
\begin{aligned}
&\int_{K(\varepsilon)^n} g(a_1 ... a_n)(\mu_N^{\alpha_N}(t, da_1) ... \mu_N^{\alpha_N}(t, da_n) - \mu(t, da_1) ... \mu(t, da_n)) \\
&\quad = \; \sum_{m=1}^{M} \left( \prod_{i=1}^{n} \int_{K(\varepsilon)} g_i^m(a_i) \mu_N^{\alpha_N}(t, da_i) - \prod_{i=1}^{n} \int_{K(\varepsilon)} g_i^m(a_i) \mu(t, da_i) \right) \\
&\quad = \; \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{n} \int_{K(\varepsilon)} g_i^m(a_i)(\mu_N^{\alpha_N} - \mu)(t, da_i) \prod_{j=1}^{i-1} \int_{K(\varepsilon)} g_j^m(a_j) \mu(t, da_j) \\
&\qquad \prod_{j=i+1}^{n} \int_{K(\varepsilon)} g_j^m(a_j) \mu_N^{\alpha_N}(t, da_j)
\end{aligned}
$$

et donc

$$
\begin{aligned}
&|\int_{K(\varepsilon)^n} g(a_1...a_n)(\mu_N^{\alpha_N}(t,da_1)...\mu_N^{\alpha_N}(t,da_n)-\mu(t,da_1)...\mu(t,da_n))| \\
&\leqslant \quad \sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{|\int_{K(\varepsilon)} g_i^m(a_i)(\mu_N^{\alpha_N}-\mu)(t,da_j)|}_{\to 0} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} ||g_j^m||_{L^\infty} \\
&\leqslant \quad \varepsilon
\end{aligned}
$$

pour $N$ assez grand. Au total,

$$
|O_h^t(\alpha_N) - \int_{\mathbb{R}^{6n}} h(z(t,a_1,\mu),...,z(t,a_n,\mu))\mu(da_1)...\mu(da_n)| \quad \leqslant \quad 3\varepsilon||h||_{L^\infty} + \varepsilon + 2\varepsilon.
$$

□

**Remarque** Si $\mu \in \mathcal{M}_+^1$, la solution $P_N(t,d\alpha_N)$ de l'équation de Liouville (7), de donnée initiale $P_N(0,d\alpha_N) = \prod_{n=1}^{N}\mu(da_n)$ peut être définie par:

$$
\int_{\mathbb{R}^{6N}} P_N(t,d\alpha_N)g(\alpha_N) = \int_{\mathbb{R}^{6N}} P_N(0,d\alpha_N)g(\omega_N(t,\alpha_N)), \quad \forall g \in C_b^0(\mathbb{R}^{6N})
$$

Dans [BH] était montré le lemme suivant:

**Lemme 5.2** *Si $h \in C_b^0(\mathbb{R}^{6N})$, alors*

$$
\int_{\mathbb{R}^{6N}} O_h^0(\alpha_N)P_N(t,d\alpha_N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^{6n}} h(a_1...a_n)\prod_{i=1}^{n}\mu(t,da_i)
$$

*où $\mu(t)$ est une solution faible le l'équation de Vlasov (8) avec donnée initiale $\mu(0)=\mu$.*

**preuve** Pour $t=0$,

$$
\frac{1}{N^n}\sum_{n_1...n_n}^{N}\int_{\mathbb{R}^{6n}} h(a_{n_1}...a_{n_n})P_N(0,d\alpha_N) = \int_{\mathbb{R}^{6n}} h(a_1...a_n)\prod_{\sigma=1}^{n}\mu(t,da_\sigma) + O(N^{-1})
$$

(le terme principal vient des vecteurs $(n_1...n_n)$ tels que tous les $n_j$ sont deux à deux distincts). Pour $t \neq 0$, soit $\mathcal{B}^6$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^6$, soit $(\Omega, B) := \prod_{n=1}^{\infty}(\mathbb{R}^6,\mathcal{B}^6)$ muni de la mesure $\tilde{\mu}(d\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty}\mu(da_n)$, où $\alpha = (a_1...a_n...)$, $\alpha_N = (a_1...a_N)$. Si $\Delta \in \mathcal{B}^6$ est tel que $\mu(\partial\Delta)=0$, les variables aléatoires $\chi_\Delta^n(\alpha) = \chi_\Delta(a_n)$ ont pour espérance $\mu(\Delta)$, pour variance $\mu(\Delta)-\mu(\Delta)^2$, et donc

$$
\mu_N^\alpha(\Delta) = \int_{\mathbb{R}^6}\chi_\Delta(a)\mu_N^\alpha(da) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_\Delta(a_n) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mu(\Delta) \quad \tilde{\mu}p.p.
$$

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble dénombrable d'hypercubes $[a_n,b_n] = \{z \in \mathbb{R}^6, a_n^i < z_n^i \leqslant b_n^i, 1 \leqslant i \leqslant 6\}$, stable par intersection finie, tel que $\forall z \in \mathbb{R}^6, \forall\varepsilon > 0, \exists[a_n,b_n] \in$

$\mathcal{A}, z \in (a_n, b_n) \subset \{z', |z - z'| \leqslant \varepsilon\}$ (on peut prendre par exemple la base de Haar). $\mathcal{A}$ est dénombrable donc il existe $Q \subset \Omega$, $\tilde{\mu}(Q) = 1$, et

$$\mu_N^\alpha((a_n, b_n]) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mu((a_n, b_n]), \forall \alpha \in Q, \forall (a_n, b_n] \in \mathcal{A}$$

On en déduit que $\forall \alpha \in Q, \mu_N^\alpha \to \mu, w*$. De plus, $\int_{\mathbb{R}^{6N}} P_N(t, d\alpha_N) O_h(\alpha_N) = \int_\Omega \tilde{\mu}(d\alpha) O_h^t(\alpha_N)$, $\forall N, |O_h^t(\alpha_N)| \leqslant sup|h(a_1...a_n)| < \infty$, et $\forall \alpha \in Q, O_h^t(\alpha_N) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^{6n}} h(a_1...a_n) \prod_{i=1}^{n} \mu(t, da_i)$ par le lemme 5.1. $\tilde{\mu}(Q) = 1$, donc on conclut par le théorème de convergence dominée. $\square$

A ce stade, on peut obtenir un théorème voisin du théorème 4.1:

**Théorème 5.1** *Si $\phi \in C_b^2$, si on note $P_N^{(n)}$ la solution de la hiérarchie finie de Vlasov (14) avec donnée initiale, pour $n \leqslant N$: $P_N^{(n)}(0) = \prod_{i=1}^{n} \mu(da_i)$, la suite de marginales $\left(\{P_N^{(n)}\}_{n\geqslant 1}\right)_{N\geqslant 1}$ converge faible étoile dans $\prod_{n\geqslant 1} L^\infty(\mathbb{R}_+, C_0(\mathbb{R}^{6n})')$ vers $\left\{\prod_{i=1}^{n} \mu(t, da_i)\right\}_{n\geqslant 1}$, qui, d'après la remarque de la fin de la section 2, est une solution de la hiérarchie de Vlasov (15).*

**preuve** On va utiliser le lemme 5.2, et montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^{6N}} O_h^0(\alpha_N) P_N(t, d\alpha_N) \underset{N\to\infty}{\sim} \int_{\mathbb{R}^{6N}} P_N^{(n)}(t, a_1...a_n) h(a_1...a_n) da_1...da_n$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{6N}} O_h^0(\alpha_N) P_N(t, d\alpha_N) \\
&= \frac{1}{N^n} \sum_{n_1...n_n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^{6N}} P_N(t, a_1...a_N) h(a_{n_1}...a_{n_n}) da_1...da_N \\
&= \frac{1}{N^n} \sum_{\substack{n_1...n_n=1 \\ n_i 2 \text{ à } 2 \text{ distincts}}}^{N} \int_{\mathbb{R}^{6N}} P_N(t, a_1...a_N) h(a_{n_1}...a_{n_n}) da_1...da_N \\
&+ \frac{1}{N^n} \sum_{\substack{n_1...n_n=1 \\ \exists i\neq j, n_i = n_j}}^{N} \int_{\mathbb{R}^{6N}} P_N(t, a_1...a_N) h(a_{n_1}...a_{n_n}) da_1...da_N
\end{aligned}$$

Or, si les $n_i$ sont deux à deux distincts, l'hypothèse des particules indistingables entraîne que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{6N}} P_N(t, a_1...a_N) h(a_{n_1}...a_{n_n}) da_1...da_N \\
&= \int_{\mathbb{R}^{6N}} P_N(t, a_1...a_N) h(a_1...a_n) da_1...da_N \\
&= \int_{\mathbb{R}^{6n}} P_N^{(n)}(t, a_1...a_n) h(a_1...a_n) da_1...da_n
\end{aligned}$$

de plus,

$$|\int_{\mathbb{R}^{6N}} P_N(t,a_1...a_N)h(a_{n_1}...a_{n_n})da_1...da_N| \leqslant ||h||_{L^\infty} = O(1)$$

$$Card\{(n_1...n_n)\in\{1...N\}^n, i\neq j \Rightarrow n_i\neq n_j\} = \frac{N!}{(N-n)!} \underset{N\to\infty}{\sim} N^n$$

$$Card\{(n_1...n_n)\in\{1...N\}^n, \exists i\neq j n_i = n_j\} \leqslant \binom{n}{2} N^{n-1}$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^{6N}} O_h^0(\alpha_N)P_N(t,d\alpha_N) = \int_{\mathbb{R}^{6n}} P_N^{(n)}(t,da_1...da_n)h(a_1...a_n) + O(\frac{1}{N})$$

d'après le lemme 5.2,

$$\int_{\mathbb{R}^{6n}} P_N^{(n)}(t,da_1...da_n)h(a_1...a_n) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^{6n}} h(a_1...a_n)\prod_{i=1}^n \mu(t,da_i)$$

donc $P_N^{(n)}(t,da_1...da_n) \overset{w*}{\rightharpoonup} \prod_{i=1}^n \mu(t,da_i)$. □

**Remarque** Le théorème 5.1 donne un résultat plus précis que le théorème 4.1 dans le cas particulier où l'on a le chaos initial (16): dans ce cas, il explicite la solution de la hiérarchie infinie de Vlasov (15) vers laquelle tendent les solutions de la hiérarchie finie de Vlasov (14), et nous dit qu'il y a propagation du chaos pour les $t \geqslant 0$. D'un autre coté, le théorème 4.1 se contente de dire qu'il y a convergence vers une solution de la hiérarchie infinie, sans préciser laquelle. Dans les cas où l'on est capable de montrer l'unicité de la solution de (15), le théorème 4.1 est cependant plus général, car il s'applique également à des répartitions initiales non factorisées; et il nous donne encore la propagation du chaos via la remarque de la fin de la section 2 si (16) est vérifiée.

Intéressons nous donc à l'unicité de la solution de la hiérarchie de Vlasov, qui, sous certaines hypothèses sur $\phi$, est montré dans [NS].

# 6 Unicité pour la hiérarchie de Vlasov

**Théorème 6.1** *On suppose $\phi \in L^1(\mathbb{R}^3)$, $\hat{\phi} \in C_0^0(\mathbb{R}^3)$,, où la transformée de Fourier est ici normalisée de sorte que $\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3}\hat{\phi}(q)e^{iqx}dq$.*
*Alors la solution de la hiérarchie de Vlasov existe sur $\mathbb{R}_+$ et est unique.*

**preuve** L'existence découle du théorème 4.1.
Si $P^{(n)}(t,X_n,V_n) \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^{6n})$ est solution de (15), on pose:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t,\xi_1...\xi_n,\eta_1...\eta_n) \quad := \quad & \int\int_{\mathbb{R}^{6n}} P^{(n)}(t,X_n,V_n)e^{i\sum_{j=1}^n(x_j\eta_j+\xi_j v_j)}dX_n dV_n \\ & \in L^\infty(\mathbb{R}^{6n})\cap C^0(\mathbb{R}^{6n}) \end{aligned}$$

Calculons ce que devient la hiérarchie de Vlasov (15) en termes de $f^{(n)}$:

$$\int\int_{\mathbb{R}^{6n}} \frac{\partial P^{(n)}}{\partial t}(t,X_n,V_n)e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j\eta_j+\xi_j v_j)}dX_ndV_n \quad = \quad \frac{\partial f^{(n)}}{\partial t}(t,\xi_1...\xi_n,\eta_1...\eta_n)\ ;$$

$$\begin{aligned}
&\int\int_{\mathbb{R}^{6n}} \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial P^{(n)}}{\partial x_j}(t,X_n,V_n)e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j\eta_j+\xi_j v_j)}dX_ndV_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} -\int\int_{\mathbb{R}^{6n}} v_j i\eta_j P^{(n)}(t,X_n,V_n)e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j\eta_j+\xi_j v_j)}dX_ndV_n \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\eta_j \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \xi_j}(t,\xi_1...xi_n,\eta_1...\eta_n)\ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int\int_{\mathbb{R}^{6n}} \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^6}\nabla\phi(x_j-x_{n+1})\frac{\partial P^{(n+1)}}{\partial v_j}dx_{n+1}dv_{n+1}e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j\eta_j+\xi_j v_j)}dX_ndV_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} -\int\int_{\mathbb{R}^{6n}}\int_{\mathbb{R}^6}\nabla\left(\int_{\mathbb{R}^3}\hat{\phi}(q)e^{iq(x_j-x_{n+1})}dq\right) \\
&\qquad P^{(n+1)}(t,X_{n+1},V_{n+1})i\xi_j e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j\eta_j+\xi_j v_j)}dx_{n+1}dv_{n+1}dX_ndV_n \\
&= \sum_{j=1}^{n}\int\int_{\mathbb{R}^{6n}}\int_{\mathbb{R}^6}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{\phi}(q)(q\xi_j)P^{(n+1)}(t,X_{n+1},V_{n+1}) \\
&\qquad e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}x_j\eta_j}e^{iqx_j}e^{-iqx_{n+1}}e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j v_j}dx_{n+1}dv_{n+1}dX_ndV_n \\
&= \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{\phi}(q)(q\xi_j)f^{(n+1)}(t,\xi_1...\xi_n,0,\eta_1...\eta_j+q...\eta_n,-q)dq
\end{aligned}$$

Si $P^{(n)}(t,X_n,V_n)\in\mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^{6n})$ est solution de (15) avec donnée initiale $P^{(n)}(0)$, $f^{(n)}(t,\xi_1...\xi_n,\eta_1...\eta_n)\in L^\infty(\mathbb{R}^{6n})\cap C^0(\mathbb{R}^{6n})$ avec donnée initiale $f^{(n)}(0)$ est solution de (20), que Narnhofer et Sewell appellent hiérarchie de Vlasov dans [NS]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f^{(n)}}{\partial t}(t,\xi_1...\xi_n,\eta_1...\eta_n)-\sum_{j=1}^{n}\eta_j\frac{\partial f^{(n)}}{\partial \xi_j}(t,\xi_1...\xi_n,\eta_1...\eta_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{\phi}(q)(q\xi_j)f^{(n+1)}(t,\xi_1...\xi_n,0,\eta_1...\eta_j+q...\eta_n,-q)dq \qquad (20)
\end{aligned}$$

Montrons donc l'unicité de la solution de (20) dans $\prod\limits_{n\geqslant 1} C^0(\mathbb{R}^{6n})\cap L^\infty(\mathbb{R}^{6n})$. Soit $f^{(n)}$ la différence entre deux solutions de (20), et soit

$$g^{(n)}(t,\xi_1...\xi_n,\eta_1...\eta_n)=f^{(n)}(t,\xi_1-\eta_1 t...\xi_n-\eta_n t,\eta_1...\eta_n).$$

L'équation (20) se réécrit:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g^{(n)}}{\partial t}(t,\xi_1...\xi_n,\eta_1...\eta_n)\\
&\quad=\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{\phi}(q)q(\xi_j-\eta_j t)f^{(n+1)}(t,\xi_1-\eta_1 t...\xi_n-\eta_n t,0,\eta_1...\eta_j+q...\eta_n,-q)dq\\
&\quad=\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{\phi}(q)q(\xi_j-\eta_j t)g^{(n+1)}(t,\xi_1...\xi_j+qt...\xi_n,-qt,\eta_1...\eta_j+q...\eta_n,-q)dq
\end{aligned}$$

Soit, puisque $f^{(n)}(0)=0$,

$$g^{(n)}(t,\xi_1...\xi_n,\eta_1...\eta_n) = \int_0^t \left[K_{n,n+1}(s)g^{(n+1)}(s)\right](\xi_1...\xi_n,\eta_1...\eta_n)ds \qquad (21)$$

où l'on a posé:

$$\begin{aligned}
\left[K_{n,n+1}(t)g^{(n+1)}(t)\right](\xi_1...\xi_n,\eta_1...\eta_n) &= \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{\phi}(\eta_{n+1})\eta_{n+1}.(\xi_j-\eta_j t)\\
&g^{(n+1)}(t,\xi_1...\xi_j+\eta_{n+1}t...\xi_n,-\eta_{n+1}t,\eta_1...\eta_j+\eta_{n+1}...\eta_n,-\eta_{n+1})d\eta_{n+1} \qquad (22)
\end{aligned}$$

en itérant (21), on obtient, pour $k\in\mathbb{N}$:

$$g^{(n)}(t,\xi_1...\xi_n,\eta_1...\eta_n)=\int_0^t dt_1...\int_0^{t_{k-1}}dt_k\Big[K_{n,n+1}(t_1)...K_{n+k-1,n+k}(t_k)g^{(n+k)}(t_k)\Big] \qquad (23)$$

On définit les constantes suivantes, qui sont finies grâce à l'hypothèse faite sur $\phi$: $A := sup\{||\hat{\phi}(\eta)\eta||, \eta\in\mathbb{R}^3\}$, $B := sup\{||\eta||,\eta\in Supp\hat{\phi}\}$, ainsi que $C := sup\{||\xi_j||, j\in\{1...n\}\}$ et $D := sup\{||\eta_j||, j\in\{1...n\}\}$. On remarque aussi que pour tout $n$, la définition de $g^{(n)}$ et celle de $f^{(n)}$ entraînent que $||g^{(n)}||_{L^\infty} = ||f^{(n)}||_{L^\infty}\leqslant 2$. On en déduit par (22):

$$\left|\left[K_{n,n+1}(t)g^{(n+1)}(t)\right](\xi_1...\xi_n,\eta_1...\eta_n)\right| \leqslant n\left(\frac{4}{3}\pi B^3\right)A\times 2(C+tD)$$

En itérant cette inégalité et en l'injectant dans (23), on obtient:

$$\begin{aligned}
|g^{(n)}(t,\xi_1...\xi_n,\eta_1...\eta_n)| &\leqslant \int_0^t dt_1...\int_0^{t_{k-1}}dt_k\left(\frac{8}{3}\pi B^3 A\right)^k\prod_{l=0}^{k-1}(n(C+tD)+2tlB)\\
&\leqslant \left(\frac{8}{3}\pi B^3 A\right)^k\frac{t^k}{k!}\prod_{l=0}^{k-1}(n(C+tD)+2tlB)\\
&\leqslant \left(\frac{16}{3}\pi B^4 A t^2 e\right)^k\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\underbrace{\left(1+\frac{n(C+tD)}{2tBk}\right)^k}_{\to e^{\frac{n(C+tD)}{2tB}}}
\end{aligned}$$

et donc, en passant à la limite quand $k\to\infty$, on a que $g^{(n)}(t)$ est nulle, pour $\left|\frac{16}{3}\pi B^4 A t^2 e\right|<1$, et donc , en itérant, pour tout $t$. □

**Remarque** Si on essaye de montrer directement l'unicité de la solution de (15) (c'est à dire sans passer à la transformée de Fourier), on est amené d'une façon où d'une autre à montrer la continuité de l'application

$$P^{(n+1)} \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^6} \nabla\phi(x_j - x_{n+1}) \frac{\partial P^{(n+1)}}{\partial v_j} dx_{n+1} dv_{n+1} \ ,$$

d'un espace $H_{n+1}$ de fonctions sur $\mathbb{R}^{6(n+1)}$ dans $H_n$. La difficulté pour obtenir une telle continuité provient de la dérivation $\frac{\partial P^{(n+1)}}{\partial v_j}$. Dans la preuve ci-dessus, cette difficulté se retrouve dans le fait que l'on a pas montré la convergence uniforme de $g^{(n)}(t)$, mais seulement sa convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}^{6n}$ (les "constantes $C$ et $D$ dépendent des $\xi_j$ et des $\eta_j$).

# References


[BH] W. Braun et K. Hepp, *The Vlasov dynamics and its fluctuations in the 1/N limit of interacting classical particles*, Commun. math. phys. 56 (1977), 101-113.

[BGM] C. Bardos, F. Golse et N.J. Mauser, *Weak-coupling-limit of the N-particle Schrödinger equation*, preprint de l'E.N.S. Ulm (2000)

[BGGM] C. Bardos, F. Golse, A. Gottlieb et N.J. Mauser, *On the derivation of nonlinear Schrödinger and Vlasov equations*

[LL3] L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique quantique relativiste*, éditions Mir (1967)

[LP] P.L. Lions et T. Paul, *Sur les mesures de Wigner*, Revista Matematica Iberoamericana, vol. 9, n. 3 1993)

[NS] H. Narnhofer et G.L. Sewell, *Vlasov hydrodynamics of a quantum mechanical model*, Commun. math. phys. 79 (1981), 9-24.

[N] T. Nishida *A note on a theorem of Nirenberg*, J. of Diff. Geom. 12 (1998).

[CIP] C. Cercignani, R. Illner et M. Pulvirenti *The mathematical theory of dilute gazes*, Springer (1991).

[A] V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Graduate texts in mathematics, Springer (1974)