

# La percolation

Clément Gallo, encadré par Thomas Duquesne

February 1, 2006

Après avoir introduit les principales notions permettant la compréhension des processus de percolation, nous étudierons le processus de percolation par lien de Bernoulli sur différents types de graphes: d'abord sur les arbres, et tout particulièrement sur l'arbre  $k$ -aire, puis sur les réseaux cubiques  $\mathbb{L}^d$ . Au sujet des réseaux, nous nous attarderons sur deux grandes propriétés des processus de percolation de Bernoulli sur  $\mathbb{L}^d$ , l'une en dessous de la probabilité critique, l'autre au dessus. Enfin, nous étudierons plus précisément le cas  $d = 2$ , pour lequel nous calculerons explicitement la probabilité critique.

## 1 Généralités

### 1.1 La percolation par liens

Soit  $G = (V, E)$  un graphe, dont  $V$  est l'ensemble des sommets, et  $E$  l'ensemble des arêtes. Soit  $\Omega = \{0, 1\}^E$ . Soit  $\omega \in \Omega$ . On dit qu'une arête  $e \in E$  est *ouverte* si  $\omega(e) = 1$ , et qu'elle est *fermée* si  $\omega(e) = 0$ .

Soit, pour  $e \in E$ ,  $\mu_e$  une mesure de probabilité sur  $\{0, 1\}$ . Pour chaque  $e \in E$ , soit alors  $p_e \in [0, 1]$  tel que  $\mu_e(1) = p_e$ , et  $\mu_e(0) = 1 - p_e$ .

On définit alors une mesure de probabilité  $P$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ , où  $\mathcal{F}$  est la tribu engendrée par les cylindres  $\{\omega \in \Omega, \omega(e_1) = x_1, \dots, \omega(e_m) = x_m\}, x_i \in \{0, 1\}, m \in \mathbb{N}^*$ :

$$P := \prod_{e \in E} \mu_e.$$

On ne considérera ici que le processus de percolation de Bernoulli de paramètre  $p$ , où tous les  $p_e, e \in E$ , sont égaux:  $p_e \equiv p \in [0, 1]$ . On note alors la mesure de probabilité obtenue:  $P_p := P$ .

Une *configuration*  $\omega \in \Omega$  est identifiée au sous graphe  $G(\omega)$  de  $G$ , défini par:

$$G(\omega) = (V, E(\omega)),$$

$$E(\omega) = \{e \in E, \omega(e) = 1\}.$$

Un chemin sur  $G$  est dit *ouvert* si toutes les arêtes qu'il emprunte sont ouvertes. Si  $x, y \in V$ , on note  $x \leftrightarrow y$  l'évènement: "il existe un chemin ouvert reliant  $x$  à  $y$ ". On définit alors, pour  $x \in V$ , le plus grand sous graphe ouvert connexe contenant  $x$ :

$$C(x) := C(x, \omega) := \{y \in V, x \leftrightarrow y\}.$$

On dit qu'il y a *percolation* s'il existe un sommet  $x \in V$  tel que  $|C(x)| = \infty$ .

Il est intéressant de connaître les valeurs du paramètre  $p$  pour lesquelles il y a ou non percolation. Pour  $x \in V$ ,  $P_p(|C(x)| = \infty)$  est clairement une fonction croissante de  $p$ . Ceci motive la:

### 1.1.1 Définition

On appelle *probabilité critique* le réel  $p_c \in [0, 1]$ , défini par:

$$p_c := \sup\{p \in [0, 1], P_p(\exists x \in V, |C(x)| = \infty) = 0\}$$

(cette définition est bien cohérente, car il est clair que  $P_0(\exists x \in V, |C(x)| = \infty) = 0$ ).

Nous étudierons ici le processus de percolation de Bernoulli sur deux types particuliers de graphes:

- les arbres infinis
- les réseaux cubiques (le réseau cubique de dimension  $d$  sera noté  $\mathbb{L}^d := (\mathbb{Z}^d, \mathbb{B}^d)$ , où  $\mathbb{B}^d$  est l'ensemble des arêtes reliant les plus proches voisins de  $\mathbb{Z}^d$ ).

## 1.2 La percolation par sites

Dans le processus de percolation par sites, on déclare “ouverts” où “fermés” les sommets d’un graphe  $G = (V, E)$  plutôt que ses arêtes, comme c’était le cas dans le processus de percolation par liens.

Un chemin est dit *ouvert* si tous les sommets qu’il emprunte sont ouverts, on note encore, pour  $x \in V$ ,  $C(x)$  le sous ensemble de  $V$  constitué des éléments de  $V$  pouvant être reliés à  $x$  par des chemins ouverts. Soit, pour tout  $x \in V$ ,  $\mu_x$  une mesure de probabilité sur  $\{0, 1\}$ . On définit une mesure de probabilité  $P_p^{site}$  sur  $\{0, 1\}$  comme le produit:

$$P_p^{site} := \prod_{x \in V} \mu_x.$$

Ici, on ne considérera que le cas où  $G = \mathbb{L}^d$ . On suppose:  $\forall x \in V, \mu_x(1) = p, \mu_x(0) = 1 - p$ , où  $p \in [0, 1]$ . On pose enfin:

$$\begin{aligned} \theta^{site}(p) &:= P_p(|C(0)| = \infty), \\ p_c^{site} &= \sup\{p, \theta^{site}(p) = 0\}. \end{aligned}$$

### 1.2.1 Remarque

Tout processus de percolation par lien peut être ramené à un processus de percolation par site.

Soit en effet  $G = (V, E)$  un graphe,  $\{\mu_e\}_{e \in E}$  des mesures de probabilité sur  $\{0, 1\}$ . On construit alors le graphe  $G' = (V', E')$ , où:

- $V' = E$
- $E' = \{(xy), (x; y) \in E^2, x \neq y, x$  et  $y$  ont une extrémité commune}

A un chemin ouvert d’arêtes dans  $G$  correspond un chemin ouvert de sommets dans  $G'$ , et un processus de percolation par lien sur  $G$  induit canoniquement un processus de percolation par sites sur  $G'$ .

La réciproque est fausse: par exemple, on peut voir qu’un processus de percolation par site sur  $\mathbb{L}^2$  ne peut pas être étudié comme un processus de percolation par lien sur un autre graphe.

Etant donné un graphe  $G = (V, E)$ , il est intéressant de comparer les processus de percolation par liens et par sites sur ce graphe, et en particulier de comparer les probabilités critiques.

### 1.2.2 Théorème

Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe infini d’origine 0, de degré maximal  $\Delta < \infty$  (i.e. chaque sommet est relié à au plus  $\Delta$  autres sommets). Alors

$$\frac{1}{\Delta - 1} \stackrel{(1)}{\leqslant} p_c^{lien} \stackrel{(2)}{\leqslant} p_c^{site} \stackrel{(3)}{\leqslant} 1 - (1 - p_c^{lien})^\Delta.$$

**lemme** Dans le processus de percolation par lien sur un graphe connexe infini,

$$P_p(0 \leftrightarrow \infty) := P_p(|C(0)| = \infty) = 0 \Leftrightarrow P_p(\exists v \in V, |C(v)| = \infty) = 0$$

et, dans le cas contraire,  $P_p(\exists v \in V, |C(v)| = \infty) = 1$ .

**preuve du lemme** Supposons  $p \neq 0$  (le lemme est vérifié si  $p = 0$ ).

$\{0 \leftrightarrow \infty\} \subset \{\exists v \in V, |C(v)| = \infty\}$ , donc  $P_p(0 \leftrightarrow \infty) \leq P_p(\exists v \in V, |C(v)| = \infty)$ , d'où l'implication réciproque.

Si  $P_p(0 \leftrightarrow \infty) = 0$ , soit  $v \in V$ . Supposons par l'absurde  $P_p(v \leftrightarrow \infty) \neq 0$ . Alors

$$P_p(0 \leftrightarrow \infty) \geq P_p(v \leftrightarrow \infty)p^l > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse ( $l$  est la longueur d'un chemin reliant 0 et  $v$ ). Donc  $\forall v \in V, P_p(v \leftrightarrow \infty) = 0$ , et

$$P_p(\exists v \in V, |C(v)| = \infty) = P_p(\bigcup_{v \in V} \{v \leftrightarrow \infty\}) \leq \sum_{v \in V} P_p(v \leftrightarrow \infty) = 0$$

d'où l'implication directe.

Le fait que  $P_p(\exists v \in V, |C(v)| = \infty) \in \{0, 1\}$  découle immédiatement de la loi du 0 – 1.

**preuve de (1)** Soit  $\theta(p) := P_p(0 \leftrightarrow \infty)$ . Si  $0 \leftrightarrow \infty$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un chemin ne se recoupant pas (SAW) de longueur supérieure ou égale à  $n$ , ouvert, d'origine 0. Soit  $\sigma(n)$  le nombre de SAWs de longueur supérieure ou égale à  $n$ . Alors  $\theta(p) \leq p^n \sigma(n)$ . Mais  $\sigma(n) \leq \Delta(\Delta - 1)^{n-1}$ , donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \theta(p) \leq (p(\Delta - 1))^n \frac{\Delta}{\Delta - 1}.$$

Si  $p < \frac{1}{\Delta-1}$ , on fait tendre  $n$  vers l'infini, et  $\theta(p) = 0$ , donc  $p \leq p_c^{lien}$ , et donc

$$\frac{1}{\Delta - 1} \leq p_c^{lien}.$$

**preuve de (2) et (3)** Si  $X$  et  $Y$  sont deux sous ensembles aléatoires de  $V$ , on dit que  $Y$  domine stochastiquement  $X$  (et on note  $X \leq Y$ ) si pour toute fonction  $f : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $f(A) \leq f(B)$  dès que  $A \subset B \subset V$ , on a

$$E[f(X)] \leq E[f(Y)]$$

On va montrer:

$$C^{site}(p) \leq C^{lien}(p) \leq C^{site}(1 - (1 - p)^\Delta) \quad (*)$$

où  $C^{lien}(p)$  est un sous ensemble aléatoire de  $V$  ayant la loi du sous graphe ouvert contenant 0, dans le processus de percolation (par lien) de Bernoulli de paramètre  $p$ , et  $C^{site}(p)$  est un sous ensemble aléatoire de  $V$  ayant la loi du sous graphe ouvert contenant 0, sous la condition que 0 soit ouvert, dans le processus de percolation par site de paramètre  $p$ .

Soit

$$\begin{aligned} f: \mathcal{P}(V) &\rightarrow \{0, 1\} \\ A &\rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } |C(0)| < \infty \\ 1 & \text{si } |C(0)| = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

. Si  $A \subset B$ , on a bien  $f(A) \leq f(B)$ , et donc, si  $(*)$  est vraie, en prenant l'espérance,

$$P_p(|C^{site}(p)| = \infty) \leq P_p(|C^{lien}(p)| = \infty) \leq P_p(|C^{site}(1 - (1 - p)^\Delta)| = \infty).$$

Alors,

- si  $p < p_c^{lien}$ ,  $P_p(|C^{lien}(p)| = \infty) = P_p(|C^{site}(p)| = \infty) = 0$  et donc  $p \leq p_c^{site}$ , donc  $p_c^{lien} \leq p_c^{site}$ .
- si  $p < p_c^{site}$ ,

$$\begin{aligned} P_p(|C^{lien}(1 - (1 - p)^{\frac{1}{\Delta}})| = \infty) &= P_p(|C^{site}(1 - (1 - (1 - (1 - p)^{\frac{1}{\Delta}}))^{\Delta})| = \infty) \\ &= P_p(|C^{site}(p)| = \infty) = 0. \end{aligned}$$

Donc  $1 - (1 - p)^{\frac{1}{\Delta}} \leq p_c^{lien}$ , c'est à dire  $p \leq 1 - (1 - p_c^{lien})^{\Delta}$ , et donc:

$$p_c^{site} \leq 1 - (1 - p_c^{lien})^{\Delta}.$$

**preuve de  $C^{site}(p) \leq C^{lien}(p)$ .** Soit  $G = (V, E)$  un graphe de degré maximal  $\Delta < \infty$ . Soit  $p \in [0, 1]$ , soit  $E = \{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ .

Soit  $\omega \in \{0, 1\}^E$  une configuration obtenue par un processus de percolation de Bernouilli de paramètre  $p$  sur  $G$ . Soit  $A_0 = \{0\}$  (où  $0 \in V$ ), et  $B_0 = \emptyset$ .

On construit une suite  $(A_k, B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  par récurrence: ayant construit  $(A_k, B_k)$ , soit  $e \in E$  la première arête (dans l'énumération  $e_1, \dots, e_n, \dots$ ) telle que:

$$\begin{cases} e \notin B_k \\ e \text{ a exactement une extrémité } x \text{ qui est un sommet de } A_k, \text{ on note } e = (xy). \end{cases}$$

soit alors:

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \begin{cases} A_k & \text{si } \omega(e) = 0 \\ A_k \cup \{y\} & \text{si } \omega(e) = 1 \end{cases} \\ B_{k+1} &= \begin{cases} B_k \cup \{e\} & \text{si } \omega(e) = 0 \\ B_k & \text{si } \omega(e) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

s'il n'existe pas de tel  $e$ , on pose  $(A_{k+1}, B_{k+1}) = (A_k, B_k)$ .

On remarque que  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont croissantes, et que

$$A_\infty := C(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k.$$

Colorions maintenant 0 en rouge, et, à chaque étape de la construction, on colorie  $y$ :

$$\begin{cases} \text{en rouge} & \text{si } \omega(e) = 1 \\ \text{en noir} & \text{si } \omega(e) = 0 \end{cases}$$

(on laisse à  $y$  sa couleur initiale s'il est déjà colorié).

Soit  $A_\infty^r$  l'ensemble des sommets que l'on peut atteindre à partir de 0 par des chemins rouges.

On remarque alors que:

- $A_\infty^r \subset A_\infty$ , et les voisins des sommets de  $A_\infty^r$  qui ne sont pas dans  $A_\infty^r$  sont noirs.
- $A_\infty^r$  a la même loi que  $C^{site}(p)$

et donc:

$$C^{site}(p) = A_\infty^r \leq A_\infty = C^{lien}(p)$$

(ici, “=” signifie “a même loi que”)

**preuve de  $C^{lien}(p) \leq C^{site}(1 - (1 - p)^\Delta)$ .** Soit  $G = (V, E)$  un graphe. On construit le graphe orienté  $\vec{G} = (V, \vec{E})$ , où  $\vec{E} = \{\vec{xy}; \vec{yx}, (xy) \in E\}$ .

Soit  $\vec{\omega} \in \{0, 1\}^{\vec{E}}$  une configuration obtenue par un processus de percolation de Bernouilli de paramètre  $p$  sur  $\vec{G}$ .

On colorie l'origine en vert. Tout  $x \in V \setminus \{0\}$  sera colorié en vert s'il existe  $f = \vec{xy} \in \vec{E}$  tel que  $\vec{\omega}(f) = 1$ , et en noir sinon. Alors, pour tout  $x \in V \setminus \{0\}$ ,

$$P_p(x \text{ est vert}) = 1 - (1 - p)^{\deg(x)} \leq 1 - (1 - p)^\Delta.$$

On construit  $A_\infty$  comme dans la preuve précédente, au détail près que si  $e = (xy)$  avec  $x \in A_k$ ,  $y \notin A_k$ ,  $e$  sera dit ouvert si et seulement si  $\vec{\omega}(\vec{xy}) = 1$ .

Soit  $A_\infty^v$  l'ensemble des sommets reliés à l'origine par des chemins verts. Alors:

- $A_\infty \subset A_\infty^v$
- $A_\infty^v \leq C^{site}(1 - (1 - p)^\Delta)$ .

et donc  $C(0) = A_\infty \leq C^{site}(1 - (1 - p)^\Delta)$ .

### 1.3 Exemples d'application

Supposons qu'on ait un mélange homogène de deux matériaux sous forme de poudre, l'un étant conducteur et pas l'autre. La probabilité que le courant puisse passer d'un grain à son voisin sera manifestement une fonction croissante de la proportion du matériau conducteur. Le processus de percolation est dans ce cas un modèle qui nous permettra de dire si le mélange est ou non conducteur.

De nombreuses autres situations physiques peuvent être modélisées par des processus de percolation. Citons par exemple le ferromagnétisme, des écoulements de liquides dans des matériaux poreux, la propagation du feu dans une forêt...

## 2 Les arbres

### 2.1 Préliminaires sur les arbres

#### 2.1.1 Définition

On appelle *arbre* tout graphe connexe sans cycle. On ne considérera ici que des arbres localement finis, c'est à dire que pour tout sommet  $v$  du graphe, le nombre d'arêtes issues de  $v$  est fini. On appelle ce nombre le *degré* de  $v$ , on le note  $\deg(v)$ . Cependant,  $\deg(v)$  ne sera pas nécessairement une fonction bornée de  $v$ .

Dans toute la suite,  $T = (V, E)$  désignera un tel arbre, dont l'origine sera notée 0.

On cherche à mesurer la “taille” d'un arbre. L'un des critères les plus naturels à considérer est le taux de croissance:

#### 2.1.2 Taux de croissance

**Définition** Soit, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \{v \in V, |v| = n\}$  (où  $|v|$  désigne le nombre d'arêtes parcourues par l'unique SAW reliant l'origine à  $v$ ), l'ensemble des descendants de l'origine de la  $n^{\text{ième}}$  génération (on dit que l'origine est de la génération 0).

**Définition** Soit  $gr(T) := \liminf |S_n|^{\frac{1}{n}}$  le *taux de croissance inférieur* de  $T$ , et  $\overline{gr}(T) := \limsup |S_n|^{\frac{1}{n}}$  le *taux de croissance supérieur* de  $T$ .

Si  $\underline{gr}(T) = \overline{gr}(T)$ , on parle simplement du *taux de croissance* de  $T$ , et on le note  $gr(T)$ .

**Exemple** Pour l'arbre  $k$ -aire (chaque sommet a  $k \geq 1$  fils), on a  $|S_n| = k^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et donc

$$\underline{gr}(T) = \overline{gr}(T) = gr(T) = k.$$

### 2.1.3 Le nombre de branchement

Des intuitions physiques...

**Ecoulement d'eau** Voyons les arêtes de l'arbre  $T$  comme des tuyaux véhiculant de l'eau. Soit  $\lambda \geq 1$ . On suppose qu'à une distance  $n$  de la racine, le débit maximal accepté par un tuyau est  $\lambda^{-n}$ .

Supposons par exemple que  $T$  soit l'arbre  $k$ -aire  $T_k$ .

Si  $\lambda \leq k$ , on introduit un débit d'eau  $\frac{k}{\lambda}$  à l'origine, cette eau se sépare dans chacun des  $k$  tuyaux, dans lesquels circule un débit  $\frac{1}{\lambda}$ . La première génération étant passée, chaque débit  $\frac{1}{\lambda}$  se divise en  $k$ :  $\frac{1}{k\lambda} \leq \frac{1}{\lambda^2}$ , et ainsi de suite: il peut y avoir un écoulement d'eau de 0 à l'infini.

Par contre, si  $\lambda > k$ , le débit total d'eau pouvant passer dans l'ensemble des tuyaux de  $S_n$  est  $k^n \times \frac{1}{\lambda^n} = \left(\frac{k}{\lambda}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Il ne peut donc pas y avoir écoulement d'eau.

**Courant électrique** Supposons maintenant que les arêtes à distance  $n$  de l'origine soient des fils électriques de conductance  $\lambda^{-n}$ . Si  $\lambda$  est trop grand, la conductance entre l'origine et l'infini est nulle; elle ne l'est pas si  $\lambda$  est suffisamment petit.

Pour l'arbre  $T_k$  par exemple, la résistance entre l'origine et l'infini est:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{k}\right)^n,$$

qui est finie si  $\lambda < k$ , et infinie si  $\lambda \geq k$ .

**Définition** Soit  $T = (V, E)$  un arbre. On appelle *cutset* de  $T$  tout sous ensemble  $\Pi$  de  $E$  tel que tout SAW reliant l'origine à l'infini passe par une unique arête de  $\Pi$ .

**Définition** On appelle *nombre de branchement* de  $T$ , et on note  $br(T)$ , la quantité:

$$br(T) := \sup\{\lambda, \inf_{\substack{\Pi \subset E \\ \Pi \text{ cutset}}} \sum_{v \in \Pi} \lambda^{-|v|} > 0\} \quad (1)$$

$$= \sup\{\lambda, \text{ il peut y avoir écoulement d'eau à travers des tuyaux de capacité } \lambda^{-|v|} \} \quad (2)$$

$$= \sup\{\lambda, \text{ la conductance entre } 0 \text{ et } \infty \text{ du réseau électrique avec fils de conductance } \lambda^{-|v|} \text{ est nulle} \} \quad (3)$$

(on a, dans l'égalité (1), identifié une arête de  $E$  à son extrémité la plus éloignée de 0)

On appelle *débit* toute fonction  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifiant la loi des noeuds:

$$\forall u \in V, \forall v \text{ fils de } u, \varphi(uv) = \sum_{\substack{w \in V \\ w \text{ fils de } v}} \varphi(vw)$$

On étend le domaine de définition de  $\varphi$  aux sommets de  $T$ :

$$\forall v \in V \setminus \{0\}, \varphi(v) := \varphi(uv), \text{ où } u \text{ est le père de } v$$

$$||\varphi|| := \varphi(0) := \sum_{\substack{v \in V \\ v \text{ fils de } 0}} \varphi(v).$$

$||\varphi||$  est appelé débit total. Quand  $||\varphi|| = 1$ , on parle de débit unitaire.

Les égalités (2) et (3) ne sont alors que des reformulations du fait:

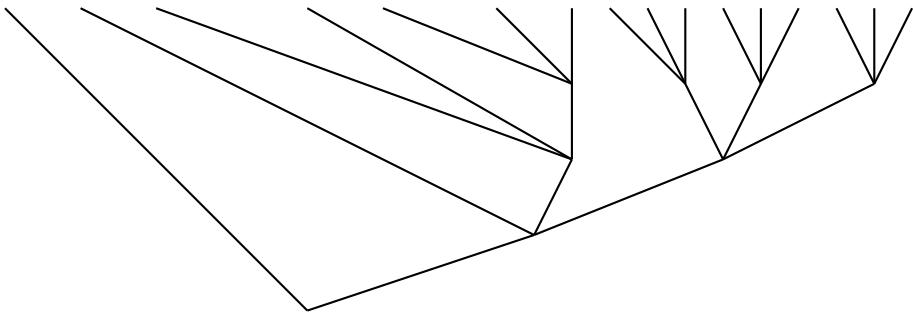
$$br(T) = \sup\{\lambda, \text{ il existe un débit } \varphi \neq 0, \forall v \in V, \varphi(v) \leq \lambda^{-|v|}\};$$

qui est lui même une conséquence immédiate de l'égalité:

$$\sup\{||\varphi||, \varphi(v) \leq \lambda^{-|v|}, \forall v\} = \inf_{\Pi \text{ cutset}} \sum_{v \in \Pi} \lambda^{-|v|}.$$

**Exemple** On a vu que pour l'arbre  $k$ -aire  $T_k$ ,  $br(T_k) = k$ . On a donc ici l'égalité  $br(T_k) = gr(T_k)$ . Cette égalité est fausse dans le cas général: considérons par exemple l'arbre 3-1 ainsi défini:

- l'origine a deux fils
- pour  $n \geq 1$ ,  $S_n = \{v_1^n, \dots, v_{2^n}^n\}$  (les sommets sont numérotés de gauche à droite)
- pour  $n \geq 1$ ,  $1 \leq k \leq 2^{n-1}$ ,  $v_k^n$  a un fils
- pour  $n \geq 1$ ,  $2^{n-1} < k \leq 2^n$ ,  $v_k^n$  a trois fils.



On a alors clairement:

- $gr(T) = 2$
- $br(T) = 1$  (considérer par exemple un écoulement d'eau à travers  $T$ )

#### 2.1.4 Correspondance avec les marches aléatoires sur $T$

**Définitions** Soit  $T = (V, E)$  un arbre. Pour  $u, v \in V$ , la notation  $u \sim v$  signifie que  $u$  et  $v$  sont reliés par une arête.

Pour  $e \in E$ , on définit  $|e| = |v|$ , où  $e = (uv)$  et  $|u| < |v|$ .

On affecte à chaque arête de  $T$  une conductance  $\lambda^{-|e|}$ . On considère, pour  $\lambda > 0$ , la marche aléatoire  $RW_\lambda = (X_n)_{n \geq 0}$  sur les sommets de  $T$ , dont les probabilités de transition sont données par:

$$P(X_{n+1} = v \mid X_n = u) = \begin{cases} \frac{\lambda^{-|(uv)|}}{\sum\limits_{\substack{w \in V \\ w \sim u}} \lambda^{-|(uv)|}} & \text{si } u \sim v \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$RW_\lambda$  est dite *récurrente* si, presque sûrement, elle passe une infinité de fois en chacun des points de  $V$ ; elle est dit *transiente* si elle vit en dehors de n'importe quel compact, après un temps fini.

**Théorème (admis)** Soit  $T = (V, E)$  un arbre infini.  $RW_\lambda$  est:

- transiente si  $\lambda < br(T)$
- récurrente si  $\lambda > br(T)$ .

**Illustration par l'arbre  $k$ -aire** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} E_\lambda[|X_{n=1}| - |X_n| \mid |X_n| = m] &= 1 \times \frac{k\lambda^{-(m+1)}}{k\lambda^{-(m+1)} + \lambda^{-m}} + (-1) \times \frac{k\lambda^{-m}}{k\lambda^{-(m+1)} + \lambda^{-m}} \\ &= \frac{\frac{k}{\lambda} - 1}{\frac{k}{\lambda} + 1}. \end{aligned}$$

- si  $\lambda < k = br(T)$ ,  $E_\lambda[|X_{n=1}| - |X_n| \mid |X_n| \neq 0] > 0$ ; et “ $X_n$  a tendance à s'éloigner de 0”.
- si  $\lambda > k = br(T)$ ,  $E_\lambda[|X_{n=1}| - |X_n| \mid |X_n| \neq 0] < 0$ ; et “ $X_n$  a tendance à revenir en 0”.

## 2.2 Les arbres de Galton-Watson

Soit  $L$  une variable aléatoire à valeurs entières positives. Soient, pour  $i \geq 1$  et  $n \geq 0$ ,  $L_i^n$  des variables aléatoires de même loi que  $L$ .

On définit par récurrence, pour  $n \geq 0$ , les variables aléatoires  $Z_n$  par:

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{Z_n} L_i^n & \text{si } Z_n \geq 1 \\ 0 & \text{si } Z_n = 0 \end{cases} \end{cases}$$

On associe à ce *processus de Galton-Watson* un arbre aléatoire de la façon suivante:  $L_i^n$  représente le nombre de fils du  $i^{\text{ème}}$  individu de la  $n^{\text{ème}}$  génération (et donc  $Z_n$  compte le nombre total d'individus de la  $n^{\text{ème}}$  génération).

Un outil utile pour l'étude des arbres de Galton-Watson est la *fonction génératrice* de  $L$ , définie sur  $[0, 1]$  par:

$$f(s) := E[s^L] = \sum_{n=0}^{\infty} P(L = n)s^n.$$

Pour  $n \geq 0$  et  $s \in [0, 1]$ , on pose  $f_n(s) := f^{(n)}(s)$ , où  $f^{(n)}$  désigne la  $n^{\text{ème}}$  itérée de  $f$ .

On a alors  $f_n(s) = E[s^{Z_n}]$ . Montrons le par récurrence sur  $n$ . C'est vrai pour  $n = 0$ . Supposons l'avoir montré au rang  $n$ .

$$\begin{aligned} f_{n+1}(s) &= f_n \circ f(s) \\ &= E[f(s)^{Z_n}] \\ &= E\left[E\left[s^L\right]^{Z_n}\right] \\ &= E\left[\prod_{i=1}^{Z_n} E\left[s^{L_i^n}\right]\right] \quad (\text{les } L_i^n \text{ ont même loi que } L) \\ &= E\left[E\left[s^{L_1^n + \dots + L_{Z_n}^n} \mid Z_n\right]\right] \quad (\text{les } L_i^n \text{ sont indépendants}) \\ &= E\left[E\left[s^{Z_{n+1}} \mid Z_n\right]\right] \\ &= E\left[s^{Z_{n+1}}\right] \end{aligned}$$

La construction d'un sous graphe ouvert de l'arbre  $k$ -aire  $T_k$  par un processus de percolation de Bernoulli de paramètre  $p$  (ou du moins la construction de la composante connexe ouverte contenant la racine, qui est la seule qui nous intéresse), peut être simulée par la construction d'un arbre de Galton-Watson, en choisissant la variable aléatoire  $L$  de loi:

$$P_p(L = m) = \binom{k}{m} p^m (1-p)^{k-m}, \quad \forall m \geq 0$$

(avec  $\binom{k}{m} = 0$  si  $m > k$ ).

## 2.3 Théorème

La probabilité critique du processus de percolation de Bernouilli sur un arbre  $T$  est donnée par:

$$p_c(T) = \frac{1}{br(T)} .$$

### 2.3.1 preuve de $p_c(T) \geq \frac{1}{br(T)}$

Ceci repose sur la méthode dite du premier moment, qui affirme que pour tout cutset  $\Pi$ ,

$$\{0 \leftrightarrow \infty\} \subset \{\exists v \in \Pi, 0 \leftrightarrow v\} = \bigcup_{v \in \Pi} \{0 \leftrightarrow v\},$$

et donc:

$$\begin{aligned} P(0 \leftrightarrow \infty) &\leq P\left(\bigcup_{v \in \Pi} \{0 \leftrightarrow v\}\right) \\ &\leq \sum_{v \in \Pi} P(0 \leftrightarrow v) . \end{aligned}$$

Ici, on a donc:

$$P_p(0 \leftrightarrow \infty) \leq \sum_{v \in \Pi} p^{|v|} .$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } p < \frac{1}{br(T)} &= \frac{1}{\sup \left\{ \lambda \geq 1, \inf_{\substack{\Pi \subset E \\ \Pi \text{ cutset}}} \sum_{v \in \Pi} \lambda^{-|v|} > 0 \right\}} \\ &= \inf \left\{ \frac{1}{\lambda}, \lambda \geq 1, \inf_{\substack{\Pi \subset E \\ \Pi \text{ cutset}}} \sum_{v \in \Pi} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{|v|} > 0 \right\} \end{aligned}$$

donc  $\inf_{\substack{\Pi \subset E \\ \Pi \text{ cutset}}} \sum_{v \in \Pi} p^{|v|} = 0$ , et, par le premier moment,  $P_p(0 \leftrightarrow \infty) = 0$ , ce qui implique d'après le lemme de la section 1.2.2,  $p \leq p_c(T)$ , et donc

$$p_c(T) \geq \frac{1}{br(T)} .$$

### 2.3.2 Définitions et notations

On appelle *bord* de  $T$ , et on note  $\partial T$ , l'ensemble défini par:

$$\partial T = \begin{cases} \{v \in V, v \text{ n'a pas de fils}\} & \text{si } T \text{ est fini} \\ \{\text{SAWs infinis issus de } 0\} & \text{si } T \text{ est infini} \end{cases}$$

Pour  $u, v \in T \cup \partial T$ , on note  $u \wedge v$  le sommet de  $T$  où les chemins reliant l'origine respectivement à  $u$  et  $v$ , se séparent ( $u \wedge v \in T$ , sauf dans le cas  $T$  infini et  $u = v \in \partial T$ , auquel cas  $u \wedge u = u \in \partial T$ ).

Si  $T$  est infini, si  $x \in V$  et  $\xi \in \partial T$ , on note “ $x \in \xi$ ” l'événement “ $\xi$  passe par  $x$ ”.

### 2.3.3 Remarque

Un débit unitaire  $\varphi$  sur un arbre  $T$  supposé infini induit une mesure de probabilité  $\mu$  sur l'espace  $(\partial T, \mathcal{F})$ , où  $\mathcal{F}$  est la tribu engendrée par les cylindres  $\{\xi \in \partial T, v \in \xi\}_{v \in V}$ , où  $\mu$  est donnée par:

$$\mu(\{\xi \in \partial T, v \in \xi\}) := \varphi(v).$$

### 2.3.4 Lemme

Soit  $T = (V, E)$  un arbre (fini ou non) sur lequel on effectue un processus de percolation de Bernouilli de paramètre  $p$ . Soit  $K$  la fonction définie par:

$$\begin{aligned} K: \quad \partial T \times \partial T &\rightarrow [1, +\infty] \\ (x, y) &\rightarrow \frac{1}{P_p(0 \leftrightarrow x \wedge y)} \end{aligned}$$

alors

$$P_p(0 \leftrightarrow \partial T) \geqslant \text{Cap}_K(\partial T),$$

où  $\text{Cap}_K(\partial T) := \sup_{\mu, \mu(\partial T)=1} \frac{1}{\mathcal{E}_K(\mu)}$  est la *capacité* de  $\partial T$  à travers le *noyau*  $K$ , où  $\mathcal{E}_K(\mu) = \iint_{x, y \in \partial T} K(x, y) d\mu(x) d\mu(y)$  est l'*énergie* de la mesure  $\mu$  à travers le noyau  $K$ .

**preuve du lemme** Supposons d'abord  $T$  fini. Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\partial T$ , et

$$Y = \sum_{x \in \partial T} \mu(x) \frac{\mathbf{1}_{0 \leftrightarrow x}}{P_p(0 \leftrightarrow x)}.$$

On a d'une part:

$$e[Y] = \sum_{x \in \partial T} \mu(x) = 1 \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \text{et } E[Y^2] &= E \left[ \sum_{x \in \partial T} \sum_{y \in \partial T} \mu(x) \mu(y) \frac{\mathbf{1}_{\{0 \leftrightarrow x\} \cap \{0 \leftrightarrow y\}}}{P_p(0 \leftrightarrow x) P_p(0 \leftrightarrow y)} \right] \\ &= \sum_{x \in \partial T} \sum_{y \in \partial T} \mu(x) \mu(y) \frac{P_p(\{0 \leftrightarrow x\} \cap \{0 \leftrightarrow y\})}{P_p(0 \leftrightarrow x) P_p(0 \leftrightarrow y)} \\ &= \sum_{x \in \partial T} \sum_{y \in \partial T} \mu(x) \mu(y) \frac{1}{P_p(0 \leftrightarrow x \wedge y)} \\ &= \mathcal{E}_K(\mu) \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} E[Y]^2 &= E[Y \times \mathbf{1}_{Y>0}]^2 \\ &\leqslant E[Y^2] P_p(Y > 0) \text{ (Cauchy-Schwarz)} \end{aligned}$$

et donc:

$$P_p(Y > 0) \geqslant \frac{1}{\mathcal{E}_K(\mu)}.$$

Mais  $\{Y > 0\} \subset \{\exists x \in \partial T, 0 \leftrightarrow x\} = \{0 \leftrightarrow \partial T\}$ , et donc  $P_p(0 \leftrightarrow \partial T) \geqslant \frac{1}{\mathcal{E}_K(\mu)}$ , et ceci pour toute mesure  $\mu$ , donc

$$P_p(0 \leftrightarrow \partial T) \geqslant \text{Cap}_K(\partial T).$$

Supposons maintenant  $T$  infini, et soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $(\partial T, \mathcal{F})$ .  $\mu$  induit une mesure de probabilité sur  $T_n := \{x \in V, |x| = n\}$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ), définie par:

$$\mu(x) := \mu(\{\xi \in \partial T, x \in \xi\}).$$

Grâce au cas fini, on a:

$$P_p(0 \leftrightarrow T_n) \geqslant \frac{1}{\sum_{x, y \in T_n} \mu(x) \mu(y) K(x, y)} \tag{4}$$

Mais si  $\xi, \eta \in \partial T$ , si  $x \in \xi$ ,  $y \in \eta$ ,  $x \wedge y$  est un ancêtre (au sens large) de  $\xi \wedge \eta$ , donc  $P_p(0 \leftrightarrow x \wedge y) \geq P_p(0 \leftrightarrow \xi \wedge \eta)$ , c'est à dire  $K(x, y) \leq K(\xi, \eta)$ . Donc:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_K(\mu) &= \int_{\partial T} \int_{\partial T} K(\xi, \eta) d\mu(\xi) d\mu(\eta) \\
&= \sum_{x, y \in T_n} \int_{x \in \xi} \int_{y \in \eta} K(\xi, \eta) d\mu(\xi) d\mu(\eta) \\
&\geq \sum_{x, y \in T_n} \int_{x \in \xi} \int_{y \in \eta} K(x, y) d\mu(\xi) d\mu(\eta) \\
&\geq \sum_{x, y \in T_n} \mu(x) \mu(y) K(x, y) \\
&\geq \frac{1}{P_p(0 \leftrightarrow T_n)} \quad \text{d'après (4)}
\end{aligned}$$

on optimise en  $\mu$ :

$$\forall n \geq 0, P_p(0 \leftrightarrow T_n) \geq \text{Cap}_K(\partial T),$$

puis on passe à la limite quand  $n \rightarrow \infty$  ( $P_p(0 \leftrightarrow T_n)$  décroît):

$$P_p(0 \leftrightarrow \partial T) \geq \text{Cap}_K(\partial T).$$

### 2.3.5 preuve de $p_c(T) \leq \frac{1}{br(T)}$

Soit  $p > \frac{1}{br(T)}$ , et soit  $\lambda$  tel que  $\frac{1}{p} < \lambda < \frac{1}{br(T)}$ . Il existe donc un débit non nul  $\varphi$  sur  $T$  tel que:

$$\forall v \in V, \varphi(v) \leq \lambda^{-|v|}.$$

Soit  $\mu := \frac{\varphi}{\|\varphi\|}$ .  $\mu$  est un débit unitaire, que l'on identifie à une mesure de probabilité sur  $(\partial T, \mathcal{F})$  comme section 2.3.3. De plus, on a:

$$\forall v \in V, \mu(v) \leq \frac{1}{\|\varphi\|} \lambda^{-|v|}. \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
\text{Soit } K : (\partial T)^2 &\rightarrow [1, +\infty] \\
(\xi, \eta) &\rightarrow \frac{1}{P_p(0 \leftrightarrow \xi \wedge \eta)} = p^{-|\xi \wedge \eta|}.
\end{aligned}$$

L'énergie de  $\mu$  à travers  $K$  est alors:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\mu) &= \int_{\partial T} \int_{\partial T} p^{-|\xi \wedge \eta|} d\mu(\xi) d\mu(\eta) \\
&= \sum_{v \in V} p^{-|v|} \iint_{v=\xi \wedge \eta} d\mu(\xi) d\mu(\eta) \\
&\leq \sum_{v \in V} p^{-|v|} \int_{\{v \in \xi\}} d\mu(\xi) \int_{\{v \in \eta\}} d\mu(\eta) \\
&\leq \sum_{v \in V} p^{-|v|} \mu(v)^2 \\
&\leq \frac{1}{\|\varphi\|} \sum_{v \in V} (p\lambda)^{-|v|} \mu(v) \quad \text{d'après (5)} \\
&\leq \frac{1}{\|\varphi\|} \sum_{n=0}^{\infty} (p\lambda)^{-n} \sum_{\substack{v \in V \\ |v|=n}} \mu(v) \\
&\leq \frac{1}{\|\varphi\|} \sum_{n=0}^{\infty} (p\lambda)^{-n} = \frac{1}{\|\varphi\|} \frac{1}{1 - \frac{1}{p\lambda}} \quad (\text{car } p\lambda > 1)
\end{aligned}$$

et donc, d'après le lemme 2.3.4.,

$$P_p(0 \leftrightarrow \partial T) \geq \frac{1}{\mathcal{E}_K(\mu)} \geq \|\varphi\|(1 - \frac{1}{p\lambda}) > 0 .$$

Donc  $P_p(|C(0)| = \infty) > 0$ , et  $p > p_c(T)$ , et donc

$$p_c(T) \leq \frac{1}{br(T)} .$$

### 3 Etude de l'arbre $k$ -aire $T_k$ . ( $k \geq 2$ )

#### 3.1 La probabilité critique $p_c(T_k)$

On a déjà vu que  $br(T_k) = k$ . Donc, d'après le théorème 2.3,  $p_c(T_k) = \frac{1}{k}$ .

On va retrouver ce résultat en utilisant la fonction génératrice d'un arbre de Galton-Watson. Pour cela, on commence par montrer le:

**lemme** Soit  $L$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , soit  $f$  sa fonction caractéristique (on reprend les notations introduites en 2.2). Soit  $q$  le plus petit point fixe de  $f$  sur  $[0, 1]$ . On a alors:

$$P(Z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0) = q .$$

**preuve** On remarque:

- $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ , donc  $P(Z_n = 0) \leq P(Z_{n+1} = 0)$ . En particulier,  $(P(Z_n = 0))_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
- $\forall s \in [0, 1]$ ,  $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(L = n)s^n$ , donc  $f$ , ainsi que ses itérées  $f_n$ , est croissante sur  $[0, 1]$ . Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(0) \leq f_n(q) = q$ .
- $\forall s \in [0, 1]$ ,  $f_n(s) = E[s^{Z_n}] = \sum_{l=0}^{\infty} P(Z_n = l)s^l$ , et en particulier,  $f_n(0) = P(Z_n = 0)$ .

Regroupant ces trois remarques, on a que  $f_n(0) \leq q$  converge. Comme  $f_n = f^{(n)}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0)$  est nécessairement un point fixe de  $f$ , et donc

$$P(Z_n \rightarrow 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = 0) = q ,$$

c'est à dire que:

$$P(\{\text{l'arbre obtenu par ce processus de Galton-Watson est fini}\}) = q .$$

**Application** On a vu en 2.2 que la composante connexe ouverte contenant la racine, lors du processus de percolation de Bernouilli de paramètre  $p$  sur l'arbre  $T_k$  était un arbre aléatoire de même loi que l'arbre de Galton-Watson obtenu par la variable aléatoire  $L$  définie par:  $P_p(L = m) = \binom{k}{m} p^m (1-p)^{k-m}$ , pour  $m \in \mathbb{N}$ . La fonction génératrice est donc:

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k}{m} p^m (1-p)^{k-m} s^m \\ &= (1-p+ps)^k \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} h(s) &= (1-p+ps)^k - s \\ h'(s) &= pk(1-p+ps)^{k-1} - 1 \\ h''(s) &= p^2 k(k-1)(1-p+ps)^{k-2} \end{aligned}$$

$\forall s \in [0, 1]$ ,  $h''(s) \geq 0$ , donc  $h'$  croît sur  $[0, 1]$ , vaut  $pk - 1$  en 1.  $h(1) = 0$ , et

- si  $p \leq \frac{1}{k}$ ,  $\forall s \in [0, 1]$ ,  $h'(s) \leq h'(1) = pk - 1 \leq 0$ ;  $h$  décroît sur  $[0, 1]$  et  $q = 1$ .
- si  $p > \frac{1}{k}$ ;  $h'(1) > 0$ , et  $q < 1$ .

On en déduit:  $P_p(|C(0)| = \infty) = 1 - P(Z_n \rightarrow 0) = 1 - q$ , et  $P_p(|C(0)| = \infty) = 0 \iff p \leq \frac{1}{k}$ , et donc

$$p_c(T_k) = \frac{1}{k}.$$

### 3.2 L'exposant $\beta$

#### 3.2.1 Définition

Soit  $\beta := \lim_{p \downarrow p_c} \frac{\log \theta(p)}{\log(p - \frac{1}{k})}$ , où  $\theta(p) := P_p(0 \leftrightarrow \infty)$ .

#### 3.2.2 Théorème

Pour l'arbre  $k$ -aire  $T_k$ ,  $\beta = 1$ .

**preuve** On a vu section 3.1 que  $\theta(p) = 1 - q$ , où  $q$  est le plus petit point fixe de  $f$  sur  $[0, 1]$ . Pour  $p > p_c = \frac{1}{k}$ , on a:

$$\begin{aligned} 1 - \theta(p) &= (1 - p + p(1 - \theta(p)))^k \\ &= (1 - p\theta(p))^k \\ &= 1 - kp\theta(p) + \frac{k(k-1)}{2}p^2\theta(p)^2 + o(\theta(p)^2) \\ &= 1 - k\left(\frac{1}{k} + p - \frac{1}{k}\right)\theta(p) + \frac{k(k-1)}{2}p^2\theta(p)^2 + o(\theta(p)^2) \\ \text{donc } 0 &= -k\left(p - \frac{1}{k}\right) + \frac{k(k-1)}{2k^2}(1 + o(1))\theta(p) + o(\theta(p)) \\ \theta(p) &= \frac{2k^2}{k-1}\left(p - \frac{1}{k}\right)(1 + o(1)) \\ \theta(p) &\sim \frac{2k^2}{k-1}\left(p - \frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

donc  $\frac{\log \theta(p)}{\log(p - \frac{1}{k})} \xrightarrow[p \downarrow p_c]{} 1$ , et donc  $\beta = 1$ .

### 3.3 L'exposant $\gamma$

#### 3.3.1 Définition

Soit  $\gamma := -\lim_{p \rightarrow p_c} \frac{\log \chi^f(p)}{\log|p - p_c|}$ , où  $\chi^f(p) := E_p[|C(0)|; |C(0)| < \infty]$ .

#### 3.3.2 Théorème

Pour l'arbre  $k$ -aire  $T_k$ ,  $\gamma = 1$ .

**preuve** Si  $p < p_c$ ,

$$\begin{aligned}
\chi^f(p) &= E_p[|C(0)|; |C(0)| < \infty] \\
&= E_p[|C(0)|] \\
&= \chi(p) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} E_p[Card\{e \in S_n, e \leftrightarrow 0\}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} k^n \times p^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi^f(p) &= \frac{1}{1 - kp} \\
&= \frac{1}{k} \left( \frac{1}{k} - p \right)^{-1}
\end{aligned}$$

Le cas  $p > p_c$  est beaucoup plus délicat, et on l'admettra.

### 3.4 La probabilité $P_p(|C(0)| = n)$

On reprend les notations introduites en 2.2 et 3.1. On a:

$$|C(0)| = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \quad (\text{où } “=” \text{ signifie “a même loi que”}).$$

Soit  $g(s) := E_p[s^{|C(0)|}]$ . Alors

$$\begin{aligned}
g(s) &= E_p \left[ s^{\sum_{n=0}^{\infty} Z_n} \right] \\
&= E_p \left[ s^{Z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n} \right] \\
&= s E_p \left[ s^{\sum_{n=1}^{\infty} Z_n} \right] \\
&= s \sum_{n=0}^k P_p(Z_1 = n) E_p \left[ s^{\sum_{n=1}^{\infty} Z_n} \mid Z_1 = n \right] \\
&= s \sum_{n=0}^k P_p(Z_1 = n) s^n E_p \left[ s^{\sum_{n=2}^{\infty} Z_n} \mid Z_1 = n \right] \\
&= s \sum_{n=0}^k P_p(Z_1 = n) s^n \left( \frac{E_p[s^{|C(0)|}]}{s} \right)^n \\
&= s \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} g(s)^n \\
&= s(1-p + pg(s))^k
\end{aligned}$$

et donc, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\left( \frac{(1-p + pg(s))^k}{g(s)} \right)^n = \frac{1}{s^n}.$$

Développons  $\left(\frac{(1-p+pr)^k}{r}\right)^n$  sous la forme  $\sum_{q=-\infty}^{+\infty} C_q r^q$ :

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} C_q r^q = \left(\frac{(1-p+pr)^k}{r}\right)^n = \sum_{q=0}^{nk} \binom{nk}{q} (1-p)^{nk-q} p^q r^{q-n}.$$

On va montrer:  $P_p(|C(0)| = n) = \frac{1}{n} C_{-1}$ , pour en déduire le résultat:

$$P_p(|C(0)| = n) = \frac{1}{n} \binom{nk}{n-1} (1-p)^{nk-n+1} p^{n-1}$$

**preuve de  $P_p(|C(0)| = n) = \frac{1}{n} C_{-1}$**  On va associer à chaque sommet de l'arbre obtenu par processus de Galton-Watson un mot:  $\emptyset$  pour la racine, 1 pour le premier fils de la racine, 2 pour le deuxième fils de la racine, etc..., 11 pour le premier fils du premier fils de la racine, 12 pour le deuxième fils du premier fils de la racine, etc..., puis on numérote les sommets dans l'ordre lexicographique (la racine est numérotée 1).

Soit, pour  $i \geq 1$ ,  $\nu_i$  le nombre de fils du  $i^{\text{ème}}$  sommet, et  $S = (S_n)_{0 \leq n \leq |C(0)|}$  la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  définie par:

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n - S_{n-1} = \nu_n - 1 \text{ pour } n \geq 1 (n \leq |C(0)|) \end{cases}$$

On définit le temps d'arrêt:

$$\sigma(S) := \inf\{k \geq 0, S_k = -1\}.$$

On a alors  $\sigma(S) = |C(0)|$ . En effet,  $S_n = -1 \iff \sum_{i=1}^n \nu_i - n = -1$ , donc  $S_{|C(0)|} = -1$ , et  $\sigma(S) \leq |C(0)|$ . Réciproquement, si  $S_n = -1$ ,  $\sum_{i=1}^n \nu_i = n - 1$ ; en parcourant les  $n$  premiers sommets, on en a "créé"  $n - 1$  nouveaux, il n'en reste donc plus à parcourir, et donc  $|C(0)| = n$ .

D'autre part,

$$\begin{aligned} E[r^{S_n}] &= E\left[r^{(\nu_1-1)+\dots+(\nu_n-1)}\right] \\ &= \prod_{i=1}^n E[r^{\nu_i-1}] \quad (\text{les } \nu_i \text{ sont indépendants}) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{(1-p+pr)^k}{r} \\ &= \left(\frac{(1-p+pr)^k}{r}\right)^n \\ &= \sum_{q=-\infty}^{+\infty} C_q r^q. \end{aligned}$$

Pour pouvoir conclure, il ne reste qu'à montrer le

**lemme**

$$P(S_n = -1) = C_{-1}$$

**preuve du lemme** Soit  $S = (S_j)_{0 \leq j \leq n}$  une marche aléatoire finie construite comme précédemment.

Soit  $S^{n,k} = (S_j^{n,k})_{0 \leq j \leq n}$  définie par:

$$S_j^{n,k} = \begin{cases} S_{j+k} - S_k & \text{si } 0 \leq j \leq n - k \\ S_n - S_k + S_{j-(n-k)} & \text{si } n - k \leq j \leq n \end{cases}$$

alors  $S^{n,k}$  a même loi que  $S$ :

$$\begin{aligned}
P(S^{n,k} = (x_0 = 0, x_1, x_2, \dots, x_n)) \\
&= P(S_1^{n,k} - S_0^{n,k} = x_1, \dots, S_n^{n,k} - S_{n-1}^{n,k} = x_n) \\
&= P(S_1 - S_0 = x_1, \dots, S_n - S_{n-1} = x_n) \quad (\text{les } \nu_i \text{ ont mêmes lois}) \\
&= P(S = (x_0 = 0, x_1, \dots, x_n)).
\end{aligned}$$

Soit  $T_n$  le temps d'arrêt défini par:

$$T_n(S) = \inf\{k \geq 0, \inf_{0 \leq j \leq n} S_j = S_k\}.$$

on a alors:

$$\{T_n(s) = k\} \bigcap \{S_n = -1\} = \{\sigma(S^{n,k}) = n\}$$

$$\begin{aligned}
\text{et donc } P(S_n = -1) &= P\left(\coprod_{k=1}^n (\{T_n(s) = k\} \bigcap \{S_n = -1\})\right) \\
&= \sum_{k=1}^n P(\sigma(S^{n,k}) = n) \\
&= \sum_{k=1}^n P(\sigma(S) = n) \\
&= nP(\sigma(S) = n)
\end{aligned}$$

### 3.5 L'exposant $\Delta$

#### 3.5.1 Définition

Pour  $l \geq 1$ ,

$$\Delta := -\lim_{p \rightarrow p_c} \frac{\log \left( \frac{E_p[|C(0)|^{l+1}, |C(0)| < \infty]}{E_p[|C(0)|^l, |C(0)| < \infty]} \right)}{\log |p - p_c|}$$

#### 3.5.2 Théorème

Pour l'arbre  $k$ -aire  $T_k$ ,  $\Delta = 2$ .

**preuve** Soit  $l \geq 1$ . On suppose d'abord  $p < p_c$ .

$$\begin{aligned}
E_p [|C(0)|^l] &= \sum_{n=1}^{\infty} n^l P_p(|C(0)| = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^{l-1} \binom{nk}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{(k-1)n+1}
\end{aligned}$$

On pose  $\varepsilon := p_c - p = \frac{1}{k} - p$

$$\begin{aligned}
E_p [|C(0)|^l] &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{l-1} \binom{nk}{n-1} \left(\frac{1}{k} - \varepsilon\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k} + \varepsilon\right)^{(k-1)n+1} \\
&= \frac{1 + \frac{k\varepsilon}{k-1}}{1 - k\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} n^{l-1} \binom{nk}{n-1} \frac{(k-1)^{(k-1)n+1}}{k^{kn}} \left(\left(1 - k\varepsilon\right) \left(1 + \frac{k\varepsilon}{k-1}\right)^{k-1}\right)^n \quad (6)
\end{aligned}$$

On pose  $x(\varepsilon) := (1 - k\varepsilon) \left(1 + \frac{k\varepsilon}{k-1}\right)^{k-1}$

$$\begin{aligned} x(\varepsilon) &= (1 - k\varepsilon) \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k-1}{m} \left(\frac{k\varepsilon}{k-1}\right)^m \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k-1}{m} \left(\frac{k\varepsilon}{k-1}\right)^m - \sum_{m=0}^{k-1} (k-1) \binom{k-1}{m} \left(\frac{k\varepsilon}{k-1}\right)^{m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k-1}{m} \left(\frac{k\varepsilon}{k-1}\right)^m - (k-1) \sum_{m=1}^k \binom{k-1}{m-1} \left(\frac{k\varepsilon}{k-1}\right)^m \end{aligned}$$

et donc, pour  $k = 2$ ,

$$x(\varepsilon) = 1 - 4\varepsilon^2$$

pour  $k \geq 3$ ,

$$\begin{aligned} x(\varepsilon) &= 1 + \left(\frac{k\varepsilon}{k-1}\right)^2 \left(\frac{(k-1)(k-2)}{2} - (k-1)^2\right) + o(\varepsilon^2) \\ &= 1 - \frac{k^3}{2(k-1)} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

et donc, dans tous les cas,  $x(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 1$ .

**lemme** Soient  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  deux suites réelles, soit  $l \in \mathbb{R}$  tels que:

- le rayon de convergence de la série  $\sum a_n x^n$  est 1
- $\forall n \geq 1$ ,  $b_n > 0$ , et  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$
- $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$

alors

$$Q(x) := \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n} \xrightarrow[x \uparrow 1]{} l.$$

**preuve du lemme** Pour  $0 \leq x < 1$ , on a:

$$\begin{aligned} Q(x) - l &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n} - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} l b_n x^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{b_n} - l \right) \frac{b_n x^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n} \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ .

$$\exists N_{\varepsilon} > 0, \forall n \geq N_{\varepsilon} + 1, \left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| \leq \varepsilon,$$

et donc

$$|Q(x) - l| \leq \sum_{n=1}^{N_{\varepsilon}} \left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| \frac{b_n x^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n} + \varepsilon \frac{\sum_{n=N_{\varepsilon}+1}^{\infty} b_n x^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n}$$

Mais  $\forall n \geq 1$ ,  $b_n > 0$ , donc

$$\forall x \in [0, 1[, \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} b_n x^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n ,$$

$$\text{et } \varepsilon \frac{\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} b_n x^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n} \leq \varepsilon .$$

$b_n > 0$ , et  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ , donc  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \xrightarrow{x \uparrow 1} \infty$ . Soit donc  $\delta_\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall x \in [1 - \delta_\varepsilon, 1[, \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \geq \frac{N_\varepsilon}{\varepsilon} \max_{1 \leq n \leq N_\varepsilon} \left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| b_n$$

$$\text{alors } \forall x \in [1 - \delta_\varepsilon, 1[, \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| \frac{b_n x^n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n} \leq \varepsilon ,$$

et  $|Q(x) - l| \leq 2\varepsilon$ , donc  $Q(x) \xrightarrow{x \uparrow 1} l$ .

On va maintenant chercher à appliquer le lemme, pour obtenir un équivalent de  $E_p(|C(0)|^l)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  (où  $x \rightarrow 1$ ). Soit

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{n^{l-1} (k-1)^{(k-1)n+1}}{k^{kn}} \binom{kn}{n-1} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{l-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{k}{2\pi(k-1)}} =: b_n \end{aligned}$$

Les hypothèses du lemme sont alors bien vérifiées:

- $b_n > 0$  pour  $n \geq 1$  est clair, et  $l \geq 1 \Rightarrow l - \frac{3}{2} > -1$ , donc  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ .
- le rayon de convergence de la série  $\sum a_n x^n$  est le même que celui de la série  $\sum b_n x^n$ , soit 1 (car  $a_n \sim b_n$ ).

D'après le lemme,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x(\varepsilon)^n \underset{x(\varepsilon) \rightarrow 1}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x(\varepsilon)^n .$$

et donc:

$$E_p [|C(0)|^l] \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\frac{k}{2\pi(k-1)}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{l-\frac{3}{2}} x(\varepsilon)^n .$$

Pour appliquer le lemme, on a choisi  $b_n = n^{l-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{k}{2\pi(k-1)}}$  comme équivalent à  $a_n$ . C'est l'équivalent "le plus simple", mais ce n'est pas le plus pratique, car on ne sait pas calculer l'expression de la série entière de terme général  $b_n$ . On va donc réappliquer le lemme en cherchant un équivalent judicieux à  $n^{l-\frac{3}{2}}$ .

D'après la formule:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1) n^z}{z(z+1) \cdots (z+n-1)} ,$$

$$\begin{aligned}
n^\alpha &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \Gamma(\alpha + 1) \frac{(\alpha + 1) \dots (\alpha + n)}{n!} \\
&\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \Gamma(\alpha + 1) (-1)^n \binom{-(\alpha + 1)}{n}
\end{aligned}$$

Les hypothèses du lemme sont vérifiées, avec  $b_n' = n^{l-\frac{3}{2}}$ , et  $a_n' = \Gamma(l - \frac{1}{2})(-1)^n \binom{-(l - \frac{1}{2})}{n}$ , et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^{l-\frac{3}{2}} x(\varepsilon)^n &\underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \Gamma\left(l - \frac{1}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2} - l}{n} (-x(\varepsilon))^n \\
&\underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \Gamma\left(l - \frac{1}{2}\right) ((1 - x(\varepsilon))^{\frac{1}{2} - l} - 1) \\
&\underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \Gamma\left(l - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{k^3}{2(k-1)}\right)^{\frac{1}{2} - l} |\varepsilon|^{1-2l}
\end{aligned}$$

et donc

$$E_p [|C(0)|^l] \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\frac{k}{2\pi(k-1)}} \Gamma\left(l - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{k^3}{2(k-1)}\right)^{\frac{1}{2} - l} |\varepsilon|^{1-2l}.$$

Si  $p > p_c$ ,

$$E_p [|C(0)|^l ; |C(0)| < \infty] = \sum_{n=1}^{\infty} n^l P_p(|C(0)| = n),$$

et la suite des calculs est totalement identique au cas  $p < p_c$ . On a donc:

$$\frac{E_p [|C(0)|^{l+1} ; |C(0)| < \infty]}{E_p [|C(0)|^l ; |C(0)| < \infty]} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{2(k-1)\Gamma(l + \frac{1}{2})}{k^3\Gamma(l - \frac{1}{2})} |\varepsilon|^{-2}$$

et donc  $\Delta = 2$ .

### 3.6 L'exposant $\alpha$

#### 3.6.1 Définition

$$\alpha := -1 - \lim_{p \rightarrow p_c} \frac{\log \kappa'''(p)}{\log |p - p_c|}$$

où  $\kappa(p) := E_p [|C(0)|^{-1}]$ .

#### 3.6.2 Théorème

Pour l'arbre  $k$ -aire  $T_k$ ,  $\alpha = -1$ .

**preuve**

$$\kappa(p) = \frac{1 + \frac{k\varepsilon}{k-1}}{1 - k\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{kn}{n-1} \frac{(k-1)^{(k-1)n+1}}{n^2 k^{kn}} \left( (1 - k\varepsilon) \left(1 + \frac{k\varepsilon}{k-1}\right)^{k-1} \right)^n$$

Après calculs, on a:

$$\kappa'''(p) = (1 + o(1)) \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\binom{kn}{n-1} \frac{(k-1)^{(k-1)n-1}}{n^2 k^{kn-1}} (nk^2 + (2k-2)(2n-3)) x(\varepsilon)^n}_{z_n}$$

or

$$z_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{k^{\frac{3}{2}}(k^2 + 4(k-1))}{\sqrt{2\pi}(k-1)^{\frac{5}{2}}} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\frac{3}{2} > 1$ , donc  $|\kappa'''(p_c)| < \infty$ , et donc

$$\frac{\log \kappa'''(p)}{\log |p - p_c|} \xrightarrow[p \rightarrow p_c]{} 0$$

donc  $\alpha = -1$ .

### 3.7 L'exposant $\delta$

#### 3.7.1 Définition

$$\delta := -\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log P_{p_c}(|C(0)|=n)}{\log n} + 1}$$

#### 3.7.2 Théorème

Pour l'arbre  $k$ -aire  $T_k$ ,  $\delta = 2$ .

**preuve**

$$\begin{aligned} P_{p_c}(|C(0)| = n) &= \frac{1}{n} \binom{nk}{n-1} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{nk-n+1} \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{k}{2\pi(k-1)}} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

donc  $\delta = 2$ .

### 3.8 La probabilité $P_{p_c}(\text{rad}(C(0)) \geq n)$

#### 3.8.1 Définition

$$\text{rad}(C(0)) := \max\{|x|, x \in C(0)\}$$

#### 3.8.2 Théorème

$$P_{p_c}(\text{rad}(C(0)) \geq n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2k}{(k-1)n}.$$

**preuve**

$$\begin{aligned} P_{p_c}(\text{rad}(C(0)) \geq n) &= 1 - P_{p_c}(\text{rad}(C(0)) < n) \\ &= 1 - P_{p_c}(Z_n = 0) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} P_{\frac{1}{k}}(Z_{n+1} = 0) &= \sum_{l=0}^k P_{\frac{1}{k}}(Z_{n+1} = 0 ; Z_n = l) \\ &= \sum_{l=0}^k P_{\frac{1}{k}}(Z_{n+1} = 0 \mid Z_n = l) P_{\frac{1}{k}}(Z_n = l) \\ &= \sum_{l=0}^k (1-p)^{kl} P_{\frac{1}{k}}(Z_n = l) \\ &= E_{\frac{1}{k}}[(1-p)^{kZ_n}] \\ &= f_n((1-p)^k) =: u_n \end{aligned}$$

La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est donnée par:

$$\begin{cases} u_0 = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \\ u_{n+1} = f(u_n) = \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{u_n}{k}\right)^k \end{cases}$$

$f$  est croissante donc  $(u_n)$  est monotone, elle converge vers l'unique point fixe de  $f$  sur  $[0, 1]$ , qui est 1. Soit alors  $v_n := 1 - u_n$ . On a:

$$1 - v_{n+1} = \left(1 - \frac{v_n}{k}\right)^k.$$

Si  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{1}{v_{n+1}^a} - \frac{1}{v_n^a} = v_n^{1-a} \frac{a(k-1)}{2k} (1 + o(1))$$

on choisit donc  $a = 1$ , et on a:

$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{k-1}{2k}$$

et donc

$$\frac{1}{v_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{l=0}^{n-1} \left( \frac{1}{v_{l+1}} - \frac{1}{v_l} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n(k-1)}{2k}$$

donc

$$v_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2k}{n(k-1)}$$

et donc

$$P_{p_c}(rad(C(0)) \geq n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2k}{(k-1)n}.$$

En grande dimension  $d$ , le processus de percolation à proximité de la probabilité critique dans le réseau  $\mathbb{L}^d$  a un comportement très proche du processus de percolation sur l'arbre  $(d-1)$ -aire, en ce sens que les exposants calculés ci-dessus pour l'arbre  $k$ -aire sont les mêmes que dans le réseau  $\mathbb{L}^{k+1}$ . Ceci a été montré pour  $d \geq 19$ , et est à l'état de conjecture pour  $18 \geq d \geq 6$ . On peut "l'expliquer" ainsi: à proximité de la probabilité critique, les éventuels sous graphes ouverts infinis obtenus par processus de percolation de Bernoulli comportent peu de circuits.

## 4 Percolation de Bernoulli sur $\mathbb{L}^d$

### 4.1 Existence d'une probabilité critique

Si  $d = 1$ , on a clairement:  $\theta(p) = 0$  dès que  $p < 1$ , et donc  $p_c(\mathbb{L}^1) = 1$ .

#### 4.1.1 Théorème

Si  $d \geq 2$ ,

$$0 < p_c(\mathbb{L}^d) < 1.$$

**preuve de  $0 < p_c(\mathbb{L}^d)$**  On va montrer qu'il existe  $p > 0$  tel que  $\theta(p) = 0$ . Pour cela, on fixe  $n > 0$ , et on considère le nombre  $\sigma(n)$  de SAWs de longueur  $n$  partant de l'origine. Soit, parmi les  $\sigma(n)$  SAWs de longueur  $n$  dont une extrémité est l'origine,  $N(n)$  le nombre (aléatoire) de ceux qui sont ouverts. On a alors, pour tout  $n$ :

$$\theta(p) \leq P_p(N(n) \geq 1) \leq E_p[N(n)] = p^n \sigma(n)$$

d'où:

$$\theta(p) \leq \frac{2d}{2d-1} (p(2d-1))^n$$

On choisit  $0 < p < \frac{1}{2d-1}$ , et on fait tendre  $n$  vers l'infini: on a bien  $\theta(p) = 0$ , et donc

$$0 < p \leq p_c(\mathbb{L}^d).$$

**preuve de  $p_c(\mathbb{L}^d) < 1$**     $\mathbb{L}^d$  s'injectant dans  $\mathbb{L}^{d+1}$ , on a  $p_c(\mathbb{L}^{d+1}) \leq p_c(\mathbb{L}^d)$ . Il suffit donc de montrer  $p_c(\mathbb{L}^2) < 1$ . Or on a, en dimension 2, la notion de graphe dual: soit

$$\mathbb{L}_d^2 = \left( \mathbb{Z}^2 + \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \mathbb{B}^2 + \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right).$$

Chaque arête de  $\mathbb{L}_d^2$  coupe une unique arête de  $\mathbb{L}^2$ .

A un sous graphe ouvert aléatoire  $G = (V, E)$  de  $\mathbb{L}^2$  obtenu par un processus de percolation de Bernoulli de paramètre  $p$ , on associe son sous graphe de  $\mathbb{L}_d^2$  dual:

$$G' := \left( \mathbb{Z}^2 + \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), E' \right)$$

où les arêtes ouvertes de  $G'$  (les éléments de  $E'$ ) sont celles de  $\mathbb{L}_d^2$  coupant des arêtes fermées de  $G$ , et les arêtes fermées de  $G'$  sont celles coupant des arêtes ouvertes de  $G$ .

La loi de  $G'$  est alors la même que celle d'un sous graphe ouvert obtenu par processus de percolation de Bernoulli de paramètre  $1 - p$  sur  $\mathbb{L}_d^2$ .

On remarque aussi que la composante connexe ouverte contenant 0 de  $G$  est finie si et seulement si il existe un circuit ouvert de  $G'$ , entourant 0.

Notons, pour un circuit  $\gamma$  de  $\mathbb{L}_d^2$ ,  $A_\gamma$  l'événement “ $\gamma$  est ouvert”. On a alors:

$$\begin{aligned} 1 - \theta(p) &= P_p(0 \not\leftrightarrow \infty) \\ &= P_p \left( \bigcup_{\substack{\gamma \text{ circuit de } \mathbb{L}_d^2 \\ \text{entourant } 0}} A_\gamma \right) \\ &\leq \sum_{\substack{\gamma \text{ circuit de } \mathbb{L}_d^2 \\ \text{entourant } 0}} P_p(A_\gamma) \end{aligned}$$

Soit  $\rho(n)$  le nombre de circuits de longueur  $n$  entourant 0.  $\rho(n) \leq n \times 3^n$  car un tel chemin doit passer par l'un des  $n$  sommets  $(0, 1), \dots, (0, n)$ . De plus, pour un circuit  $\gamma$  de longueur  $n$ ,

$$P_p(A_\gamma) = (1 - p)^n$$

et donc

$$1 - \theta(p) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n 3^n (1 - p)^n$$

On choisit  $p < 1$  suffisemment grand tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n 3^n (1 - p)^n < 1$$

et on a alors  $1 - \theta(p) < 1$ ,  $\theta(p) > 0$ , et donc  $p_c(\mathbb{L}^2) < 1$ .

On a ainsi prouvé l'existence de trois phases:  $p < p_c$ ,  $p = p_c$ ,  $p > p_c$ , en dimension  $d \geq 2$ .

## 4.2 Quelques outils techniques

### 4.2.1 Événements croissants et inégalité FKG

**Définition** On définit un ordre partiel sur  $\Omega$  de la façon suivante: si  $\omega, \omega' \in \Omega$ , on note  $\omega \geq \omega'$  si  $\forall e \in \mathbb{B}^d$ ,  $\omega(e) \geq \omega'(e)$ .

Une fonction  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sera dite *croissante* si

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \omega \geq \omega' \implies f(\omega) \geq f(\omega').$$

Un événement sera dit *croissant* si sa fonction indicatrice est croissante.

### Théorème

- si  $N$  est une variable aléatoire croissante sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ ,

$$0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1 \implies E_{p_1}[N] \leq E_{p_2}[N].$$

- si  $A$  est un évènement croissant de  $\mathcal{F}$ ,

$$0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1 \implies P_{p_1}(A) \leq P_{p_2}(A).$$

**preuve** Soient, pour  $e \in \mathbb{B}^d$ ,  $X(e)$  des variables aléatoires indépendantes uniformément réparties sur  $[0, 1]$ . On définit des variables aléatoires, pour  $e \in \mathbb{B}^d$ :

$$\omega_p(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(e) < p \\ 0 & \text{si } X(e) \geq p \end{cases}$$

Les  $\omega_p$  sont indépendantes, et  $P(\omega_p(e) = 1) = p$  ;  $P(\omega_p(e) = 0) = 1 - p$ . Donc

$$P_p = \prod_{e \in \mathbb{B}^d} \omega_p(e)$$

Si  $p_1 \leq p_2$ ,  $\omega_{p_1}(e) \leq \omega_{p_2}(e)$ ,  $\forall e \in E$ , donc  $\omega_{p_2} \geq \omega_{p_1}$ , donc, comme  $N$  est croissante,  $N(\omega_{p_2}) \geq N(\omega_{p_1})$ , et donc

$$E_{p_1}(N) \leq E_{p_2}(N).$$

**Théorème (inégalité FKG)** Si  $A$  et  $B$  sont des évènements croissants,

$$P_p(A \cap B) \geq P_p(A)P_p(B).$$

**preuve** Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires croissantes.

Supposons d'abord que  $X$  et  $Y$  ne dépendent que d'un nombre fini d'arêtes  $e_1, \dots, e_n$ . Raisonnons par récurrence sur  $n$ , pour montrer

$$E_p[XY] \geq E_p[X]E_p[Y].$$

si  $n = 1$ ,  $X$  et  $Y$  sont croissantes, donc pour tous  $\omega_1, \omega_2 \in \{0, 1\}$ , on a:

$$(X(\omega_1) - X(\omega_2))(Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) \geq 0.$$

On somme sur  $\omega_1, \omega_2 \in \{0, 1\}$ , et on obtient:

$$0 \leq 2(E_p[XY] - E_p[X]E_p[Y]).$$

Soit  $n \geq 2$ . Supposons avoir montré le résultat pour  $k \leq n - 1$ , et soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires ne dépendant que des arêtes  $e_1, \dots, e_n$ .

$$\begin{aligned} E_p[XY] &= E_p[E_p[XY \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})]] \\ &\geq E_p[E_p[X \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})]E_p[Y \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})]] \\ &\geq E_p[E_p[X \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})]]E_p[E_p[Y \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})]] \\ &\geq E_p[X]E_p[Y] \end{aligned}$$

(on a successivement utilisé l'hypothèse de récurrence pour  $k = 1$ , puis pour  $k = n - 1$ ).

Si maintenant  $X$  et  $Y$  dépendent d'une infinité d'arêtes de  $\mathbb{L}^d$ , on suppose de plus  $E[X^2] < \infty$ ,  $E[X^2] < \infty$ . Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui parcourt  $E$ , et soient:

$$X_n = E_p[X \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_n)]$$

$$Y_n = E_p[X \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_n)]$$

$X_n$  et  $Y_n$  sont des variables aléatoires croissantes, donc, grâce au cas fini (elles ne dépendent que des arêtes  $e_1, \dots, e_n$ ):

$$E_p[X_n Y_n] \geq E_p[X_n] E_p[Y_n] .$$

Soit  $\mathcal{T}_n$  la tribu de  $\Omega$  engendrée par les cylindres  $\{\omega \in \Omega, \omega(e_1) = \omega_1, \dots, \omega(e_n) = \omega_n\}$ , où  $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n$ . Alors:

$$\forall F \in \mathcal{T}_n, \forall l \geq n, \int_F X_l(\omega) dP_p(\omega) = \int_F X_n(\omega) dP_p(\omega) .$$

D'après le théorème de convergence martingale,  $X_n$  converge presque sûrement vers  $X$ , et donc dans  $L^2(P_p)$ . Donc

$$E_p[X_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E_p[X] ;$$

$$E_p[Y_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E_p[Y] .$$

De plus,

$$\begin{aligned} E_p[|X_n Y_n - XY|] &\leq E_p[|X_n||Y_n - Y| + |Y||X_n - X|] \\ &\leq \sqrt{E_p[X_n^2]E_p[|Y_n - Y|^2]} + \sqrt{E_p[Y^2]E_p[|X_n - X|^2]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

donc

$$E_p[X_n Y_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E_p[XY] ,$$

et donc

$$E_p[XY] \geq E_p[X] E_p[Y] .$$

#### 4.2.2 Inégalité BK

**Définition** Soit  $G$  un sous graphe fini de  $\mathbb{L}^d$ . Soit  $A$  un événement. On note  $A|_G$  l'événement “ $A$  a lieu sur  $G$ ”:

$$A|_G = \{\omega \in \Omega, \bar{\omega} = \omega \text{ sur } G \implies \bar{\omega} \in A\} .$$

**Définition** Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux événements. On note  $A_1 \circ A_2$  l'événement “ $A_1$  et  $A_2$  ont lieu de façon disjointe”:

$$A_1 \circ A_2 := \{\omega \in \Omega, \exists G_1, G_2 \subset \mathbb{B}^d, G_1 \cap G_2 = \emptyset, \omega \in A_{1|G_1} \cap A_{2|G_2}\}$$

**Théorème (Inégalité BK)** Soient  $A, B \in \mathcal{F}$  ne dépendant que d'un nombre fini d'arêtes de  $\mathbb{L}^d$ . Alors

$$P_p(A \circ B) \leq P_p(A) P_p(B) .$$

**preuve** Soit  $m \in \mathbb{N}$ , soit  $\Gamma := \prod_{i=1}^m \{0, 1\}$ , soit  $\mathcal{G}$  l'ensemble des parties de  $\Gamma$ , et soit  $P$  la mesure de probabilité sur  $(\Gamma, \mathcal{G})$  définie par:

$$P := \prod_{i=1}^m \mu_i ,$$

où  $\mu_i$  est la mesure de probabilité sur  $\{0, 1\}$  définie par:

$$\begin{cases} \mu_i(0) = 1 - p \\ \mu_i(1) = p \end{cases}$$

Soient  $(\Gamma_1, \mathcal{G}_1, P_1)$  et  $(\Gamma_2, \mathcal{G}_2, P_2)$  deux copies de  $(\Gamma, \mathcal{G}, P)$ . Soient  $A$  et  $B$  deux évènements croissants dans  $\mathcal{G}$ . Soit

$$A' := \{(x, y) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2, x \in A\} .$$

Soit enfin, pour  $0 \leq k \leq m$ ,

$$B'_k := \{(x, y) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2, (y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \in B\} .$$

$A'$  et  $B'_k$  sont croissants dans  $(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2, P_1 \times P_2)$ , car  $A$  et  $B$  le sont dans  $\mathcal{G}$ . Alors  $P(A \circ B) = P_1 \times P_2(A' \circ B'_0)$  et  $A' \circ B'_m = A' \cap B'_m$ , donc

$$P_1 \times P_2(A' \circ B'_m) = P_1 \times P_2(A' \cap B'_m) = P_1 \times P_2(A')P_1 \times P_2(B'_m) = P(A)P(B) .$$

Pour conclure, il suffit de montrer le:

**lemme** Pour  $1 \leq k \leq m$ ,

$$P_1 \times P_2(A' \circ B'_{k-1}) \leq P_1 \times P_2(A' \circ B'_k) .$$

**preuve du lemme** Si  $(x, y) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$ , si  $I \subset \{1, \dots, m\}$ , on dit que  $I$  force  $A'$  si

$$(\forall i \in I, u_i = x_i) \implies (u, v) \in A' .$$

On dit que  $I$  force  $B'_k$  si

$$(\forall i \leq k, i \in I, u_i = y_i \text{ et } \forall i > k, i \in I, v_i = x_i) \implies (u, v) \in B'_k .$$

On va effectuer une partition de  $A' \circ B'_{k-1}$ : on pose:

$$C_1 = \{(x, y) \in A' \circ B'_{k-1}; (x_1, \dots, x_{k-1}, 1 - x_k, \dots, x_m, y) \in A' \circ B'_{k-1}\} ,$$

$$\begin{aligned} C_2 &= A' \circ B'_{k-1} \setminus C_1 \\ &= \{(x, y) \in A' \circ B'_{k-1}; (x_1, \dots, x_{k-1}, 1 - x_k, \dots, x_m, y) \notin A' \circ B'_{k-1}\} \\ &= \{(x, y) \in A' \circ B'_{k-1}; x_k = 1, (x_1, \dots, x_{k-1}, 0, \dots, x_m, y) \in A' \circ B'_{k-1}\} \end{aligned}$$

(car  $A'$  est croissant). Soit

$$C'_2 = \{(x, y) \in C_2, \exists I \subset \{1, \dots, m\}, k \in I, I \text{ force } A', \bar{I} \text{ force } B'_{k-1}\} .$$

Soit enfin  $C''_2 = C_2 \setminus C'_2$ . Par construction,

$$A' \circ B'_{k-1} = C_1 \sqcup C'_2 \sqcup C''_2 .$$

A  $(x, y) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$ , on associe  $(x', y') \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$ , où  $\forall i \neq k, x'_i = x_i$  et  $y'_i = y_i$ , et  $x'_k = y_k$ ;  $y'_k = x_k$ . Soit alors:

$$\begin{aligned} \Phi: \quad A' \circ B'_{k-1} &\longrightarrow A' \circ B'_k \\ (x, y) &\longrightarrow \begin{cases} (x, y) & \text{si } (x, y) \in C_1 \sqcup C'_2 \\ (x', y') & \text{si } (x, y) \in C''_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Montrons que  $\Phi$  est bien à valeurs dans  $A' \circ B'_k$ :

si  $(x, y) \in C_1$ ,  $x \in A$ , et  $(y_1, \dots, y_{k-1}, x_k, \dots, x_m) \in B$ ,  $\forall x_k$ . En particulier,  $(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \in B$   $\forall y_k \in \{0, 1\}$ , et donc

$$(x, y) \in A' \circ B'_k .$$

si  $(x, y) \in C'_2$ , soit  $I \subset \{1, \dots, m\}$  tel que:

- $k \in I$

- $(x_1, \dots, x_m) \in A$ , indépendemment des  $x_i$ ,  $i \notin I$ .
- $(y_1, \dots, y_{k-1}, x_k, \dots, x_m) \in B$ , indépendemment des  $x_i$  et des  $y_i$ ,  $i \in I$ .

En particulier, comme  $k \in I$ ,

$$\forall y_k \in \{0, 1\}, (y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \in B \text{ et } (x, y) \in A' \cap B'_k.$$

$A'$  et  $B'_k$  ont clairement lieu séparément, et donc

$$(x, y) \in A' \circ B'_k.$$

si  $(x, y) \in C'_2$ , soit  $I \subset \{1, \dots, m\}$  tel que:

- $k \notin I$
- $(x_1, \dots, x_m) \in A$ , indépendemment des  $x_i$ ,  $i \notin I$ .
- $(y_1, \dots, y_{k-1}, x_k, \dots, x_m) \in B$ , indépendemment des  $x_i$  et des  $y_i$ ,  $i \in I$ .

$k \notin I$  donc  $x \in A$  indépendemment de  $x_k$ , donc  $x' = (x_1, \dots, y_k, \dots, x_m) \in A$ , et

$$(y'_1, \dots, y'_{k-1}, y'_k, x'_{k+1}, \dots, x'_m) = (y_1, \dots, y_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \in B$$

$A'$  et  $B'_k$  ont toujours lieu séparément, donc

$$(x', y') \in A' \circ B'_k.$$

Montrons maintenant que  $\Phi$  est une injection de  $A' \circ B'_{k-1}$  dans  $A' \circ B'_k$ .

$\Phi$  est clairement injective sur  $C_1 \sqcup C'_2$  ainsi que sur  $C''_2$ .

si  $\Phi$  n'était pas injective sur  $A' \circ B'_{k-1}$ , il existerait  $(x, y) \in C''_2$  tel que  $\Phi(x, y) = (x', y') \in C_1 \sqcup C'_2$ .  $(x, y) \in C''_2$  donc  $x_k = 1$ .  $(C_1 \sqcup C'_2) \cap C''_2 = \emptyset$  donc  $(x, y) \neq (x', y')$ ,  $x_k \neq y_k$ , et donc  $y_k = 0$ .

- si  $(x', y') \in C'_2$ ,  $x'_k = y_k = 1$ , ce qui est absurde.
- si  $(x', y') \in C_1$ , l'occurrence de  $A' \circ B'_{k-1}$  ne dépend pas de  $x_k$  et  $y_k$ , ce qui contredit  $(x, y) \in C_2$ .

Enfin,  $\forall (x, y)$ ,  $P_1 \times P_2(\Phi(x, y)) = P_1 \times P_2(x, y)$ , donc

$$P_1 \times P_2(A' \circ B'_{k-1}) = P_1 \times P_2(\Phi(A' \circ B'_{k-1})) \leq P_1 \times P_2(A' \circ B'_k).$$

#### 4.2.3 Formule de Russo

**Définition** Soit  $A$  un évènement, soit  $\omega \in \Omega$ . On dit que  $e_0 \in \mathbb{B}^d$  est une arête charnière pour  $(A, \omega)$  si  $\mathbf{1}_A(\omega) \neq \mathbf{1}_A(\omega')$ , où

$$\begin{aligned} \forall e \in \mathbb{B}^d \setminus \{e_0\}, \omega'(e) &= \omega(e) \\ \omega'(e_0) &= 1 - \omega(e_0) \end{aligned}$$

Soit  $N(A)$  la variable aléatoire qui compte les arêtes charnières pour  $A$ .

**Théorème (formule de Russo)** Soit  $A$  un évènement croissant ne dépendant que d'un nombre fini d'arêtes de  $\mathbb{L}^d$ . Alors

$$\frac{d}{dp}(P_p(A)) = E_p[N(A)].$$

**preuve** Soit  $\Lambda$  l'ensemble fini d'arêtes de  $\mathbb{L}^d$  dont dépend  $A$ . Soit, pour  $b \in \Lambda$ ,  $p_b$  la probabilité que l'arête  $b$  soit ouverte. On a alors:

$$\frac{dP_p(A)}{dp} = \sum_{b \in \Lambda} \frac{\partial P_p(A)}{\partial p_b}(p)$$

Soit  $b \in \Lambda$ , soit  $\omega_b \in \{0, 1\}^{\Lambda \setminus \{b\}}$ , et  $\omega_b^+, \omega_b^- \in \{0, 1\}^\Lambda$  tels que:

$$\forall e \in \Lambda \setminus \{b\}, \omega_b^+(e) = \omega_b^-(e) = \omega(e),$$

et  $\omega_b^+(b) = 1, \omega_b^-(b) = 0$ . Alors:

$$P_p(A) = \sum_{\omega_b \in \{0, 1\}^{\Lambda \setminus \{b\}}} P_p(\omega_b)(p_b \mathbf{1}_A(\omega_b^+) + (1 - p_b) \mathbf{1}_A(\omega_b^-))$$

et donc

$$\frac{\partial P_p(A)}{\partial p_b} = \sum_{\omega_b \in \{0, 1\}^{\Lambda \setminus \{b\}}} P_p(\omega_b)(\mathbf{1}_A(\omega_b^+) - \mathbf{1}_A(\omega_b^-)).$$

Mais  $A$  est croissant, donc

$$\mathbf{1}_A(\omega_b^+) - \mathbf{1}_A(\omega_b^-) = \mathbf{1}_{\{b \text{ est arête charnière pour } A\}}(\omega_b)$$

donc

$$\frac{dP_p(A)}{dp} = P_p(b \text{ est arête charnière pour } A).$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp}(P_p(A)) &= \sum_{b \in \Lambda} P_p(b \text{ est une arête charnière pour } A) \\ &= E_p[N(A)]. \end{aligned}$$

### 4.3 Absence de phase intermédiaire pour $p < p_c$

#### 4.3.1 Définitions

Pour  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ , soit  $\delta(x, y)$  la *distance* de  $x$  à  $y$ , c'est à dire le nombre d'arêtes dans le plus court chemin de  $x$  à  $y$ . Soit, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} S(n) &= \{x \in \mathbb{Z}^d, \delta(0, x) \leq n\} \\ \partial S(n) &= \{x \in \mathbb{Z}^d, \delta(0, x) = n\} \\ A_n &= \{\exists x \in \partial S(n), 0 \leftrightarrow x\}. \end{aligned}$$

#### 4.3.2 Théorème

$$\text{Si } p < p_c, \exists \psi(p) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, P_p(A_n) < e^{-n\psi(p)}.$$

**preuve**  $A_n$  est un évènement croissant ne dépendant que d'un nombre fini d'arêtes de  $\mathbb{L}^d$ , donc, d'après la formule de Russo:

$$\frac{d}{dp}(P_p(A)) = E_p[N(A)].$$

or

$$\begin{aligned} E_p[N(A_n)] &= \sum_{e \in \mathbb{B}^d} P_p(\{e \text{ est une arête charnière pour } A_n\}) \\ &= \sum_{e \in \mathbb{B}^d} \frac{P_p(\{e \text{ est une arête charnière pour } A_n\} \cap A_n)}{P_p(e \text{ est ouvert })}. \end{aligned}$$

car les événements  $\{e \text{ est ouvert}\}$  et  $\{e \text{ est une arête charnière pour } A_n\}$  sont indépendants. Donc

$$\begin{aligned} E_p[N(A_n)] &= \sum_{e \in \mathbb{B}^d} \frac{P_p(\{e \text{ est une arête charnière pour } A_n\} \cap A_n)}{p} \\ &= \frac{1}{p} E_p[N(A_n) ; A_n] \\ &= \frac{1}{p} E_p[N(A_n) | A_n] P_p(a_n) . \end{aligned}$$

Intégrons cette égalité entre  $\alpha$  et  $\beta$ , où  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ :

$$\begin{aligned} P_\alpha(A_n) &= P_\beta(A_n) \exp \left( - \int_\alpha^\beta \frac{E_p[N(A_n) | A_n]}{p} dp \right) \\ P_\alpha(A_n) &\leq P_\beta(A_n) \exp \left( - \int_\alpha^\beta E_p[N(A_n) | A_n] dp \right) \end{aligned} \tag{7}$$

Pour majorer  $P_\alpha(A_n)$ , on va minorer  $E_p[N(A_n) | A_n]$ . On suppose que  $A_n$  a lieu. Soient  $e_1, \dots, e_N$  les arêtes charnières pour  $A_n$ .  $A_n$  étant croissant, elles sont toutes ouvertes. Les chemins ouverts allant de 0 à  $\partial S(n)$  parcourrent les  $(e_j)_{j \in \{1, \dots, N\}}$  dans le même ordre (sinon, ce ne seraient pas arêtes charnières). Supposons que  $e_1, \dots, e_N$  sont rangés dans cet ordre.

Pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ , on note  $e_i = \langle x_i, y_i \rangle$ , où  $x_i$  est le premier sommet atteint quand on parcourt n'importe quel chemin ouvert reliant 0 à  $\partial S(n)$ , en partant de 0.

On remarque que pour  $i \in \{0, \dots, N-1\}$ , il existe au moins deux chemins ouverts reliant  $y_i$  et  $x_{i+1}$ , à moins que  $y_i = x_{i+1}$  (on a noté  $y_0 = 0$ ).

Soit  $M := \max\{k, A_k \text{ a lieu}\}$ , et  $\rho_i := \delta(y_i, x_{i+1})$ , pour  $i \in \{0, \dots, N-1\}$ .

**lemme 4.3.2.1** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , soient  $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}$  tels que

$$\sum_{i=1}^k r_i \leq n - k .$$

Alors, pour tout  $p$  dans  $]0, 1[$ ,

$$P_p(\rho_k \leq r_k, \rho_i = r_i, 1 \leq i < k | A_n) \geq P_p(M \leq r_k) P_p(\rho_i = r_i, 1 \leq i < k | A_n) .$$

**preuve du lemme 4.3.2.1** Pour tout  $e = \langle u, v \rangle$ , soit  $D_e$  l'ensemble des sommets que l'on peut atteindre depuis 0 par des chemins ouverts ne passant pas par  $e$ . Soit  $B_e$  l'événement:  $B_e := \{(a); (b); (c); (d)\}$ , où:

- (a) l'un et seulement un des sommets  $u, v$  est dans  $D_e$ , disons par exemple que c'est  $u$ .
- (b)  $e$  est ouvert
- (c)  $D_e \cap \partial S(n) = \emptyset$
- (d) les arêtes charnières pour  $\{0 \leftrightarrow v\}$  sont dans l'ordre:  $\langle x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle x_{k-1}, y_{k-1} \rangle = e$ , avec  $\delta(y_{i-1}, x_i) = r_i$  pour  $1 \leq i \leq k-1$ .

Soit  $B = \bigcup_e B_e$ , soit  $\omega \in B \cap A_n$ , et  $e = e(\omega)$  tel que  $B_e$  ait lieu (un tel  $e$  est unique: d'après (a), (b) et (c), il doit être arête charnière pour  $A_n$ , et c'est nécessairement la  $(k-1)^{\text{ème}}$  arête charnière d'après (d)).

Soit  $G$  le graphe dont les sommets et les arêtes sont ceux que l'on peut atteindre par des chemins ouverts depuis l'origine, sans passer par  $e(\omega)$ , auxquels on ajoute  $e(\omega)$  et  $y_{k-1} = y(G)$ . On a:

$$\begin{aligned} P_p(A_n \cap B) &= \sum_{\Gamma} P_p(A_n \mid B, G = \Gamma) P_p(B, G = \Gamma) \\ &= \sum_{\Gamma} P_p(\{y(\Gamma) \leftrightarrow \partial S(n)\}_{|S(n) \setminus \Gamma}} P_p(B, G = \Gamma) \end{aligned} \quad (8)$$

de même,

$$\begin{aligned} P_p(\{\rho_k > r_k\} \cap A_n \cap B) &= \sum_{\Gamma} P_p(\{\rho_k > r_k\} \cap A_n \mid B, G = \Gamma) P_p(B, G = \Gamma) \\ &= \sum_{\Gamma} P_p(\{y(\Gamma) \leftrightarrow \partial S(n)\}_{|S(n) \setminus \Gamma} \circ \{y(\Gamma) \leftrightarrow \partial S(r_k + 1, y(\Gamma))\}_{|S(n) \setminus \Gamma}} P_p(B, G = \Gamma) \end{aligned}$$

(il existe au moins deux chemins ouverts de  $y(\Gamma)$  à  $x_k$ , car  $\rho_k \geq 1$ ), où  $\partial S(r_k + 1, y(\Gamma))$  est la “sphère” de rayon  $r_k + 1$  centrée en  $y(\Gamma)$ . Par l'inégalité BK, on a donc:

$$\begin{aligned} P_p(\{\rho_k > r_k\} \cap A_n \cap B) &\leq \sum_{\Gamma} P_p(\{y(\Gamma) \leftrightarrow \partial S(n)\}_{|S(n) \setminus \Gamma}} P_p(B, G = \Gamma) P_p(\{y(\Gamma) \leftrightarrow \partial S(r_k + 1, y(\Gamma))\}_{|S(n) \setminus \Gamma}} \end{aligned}$$

Le réseau étant invariant par translation,

$$P_p(\{y(\Gamma) \leftrightarrow \partial S(r_k + 1, y(\Gamma))\}_{|S(n) \setminus \Gamma}} = P_p(0 \leftrightarrow \partial S(r_k + 1))$$

et grâce à l'égalité (8), on a:

$$\begin{aligned} P_p(\{\rho_k > r_k\} \cap A_n \cap B) &\leq P_p(A_{r_k+1}) P_p(A_n \cap B) \\ P_p(\{\rho_k > r_k\} \mid A_n \cap B) &\leq P_p(A_{r_k+1}) \\ P_p(\{\rho_k \leq r_k\} \cap A_n \cap B) &\geq 1 - P_p(A_{r_k+1}) = P_p(M \leq r_k) \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de multiplier membre à membre par  $P_p(B \mid A_n) = P_p(\rho_i = r_i, 1 \leq i < k \mid A_n)$ .

**lemme 4.3.2.2** Pour  $0 < p < 1$ , on a:

$$E_p[N(A_n) \mid A_n] \geq \frac{n}{\sum_{i=0}^n P_p(A_i)} - 1 \quad (9)$$

**preuve**

$$\begin{aligned} P_p(\rho_1 + \dots + \rho_k \leq n - k \mid A_n) &= \sum_{i=0}^{n-k} P_p(\rho_1 + \dots + \rho_{k-1} = i, \rho_k \leq n - k - i \mid A_n) \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{r_1 + \dots + r_{k-1} = i} P_p(\rho_k \leq n - k - i, \rho_1 = r_1, \dots, \rho_{k-1} = r_{k-1} \mid A_n) \\ &\geq \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{r_1 + \dots + r_{k-1} = i} P_p(\rho_1 = r_1, \dots, \rho_{k-1} = r_{k-1} \mid A_n) P_p(M_k \leq n - k - i) \end{aligned}$$

(grâce au lemme 4.3.2.1, où les  $M_j$  sont des variables aléatoires indépendantes de même loi que  $M$ ). Donc

$$\begin{aligned}
P_p(\rho_1 + \dots + \rho_k \leq n - k \mid A_n) &\geq \sum_{i=0}^{n-k} P_p(M_k \leq n - k - i) P_p(\rho_1 + \dots + \rho_{k-1} = i \mid A_n) \\
&\geq P_p(\rho_1 + \dots + \rho_{k-1} + M_k \leq n - k \mid A_n) \\
&\geq P_p(M_1 + \dots + M_k \leq n - k \mid A_n) \quad (\text{par itération}) \\
&\geq P_p(M_1 + \dots + M_k \leq n - k) .
\end{aligned}$$

et donc, comme  $\{\rho_1 + \dots + \rho_k \leq n - k\} \subset \{N(A_n) \geq k\}$ ,

$$P_p(N(A_n) \geq k \mid A_n) \geq P_p(M_1 + \dots + M_k \leq n - k) .$$

On somme sur  $k$ :

$$\begin{aligned}
E_p[N(A_n) \mid A_n] &\geq \sum_{k=1}^{\infty} P_p(M_1 + \dots + M_k \leq n - k) \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} P_p(M'_1 + \dots + M'_k \leq n)
\end{aligned}$$

où  $M'_i = 1 + \min(n, M_i)$ . Soit  $K := \min\{k, M'_1 + \dots + M'_k > n\}$

$$\{M'_1 + \dots + M'_k \leq n\} = \{K \geq k + 1\}$$

donc

$$\begin{aligned}
E_p[N(A_n) \mid A_n] &\geq E_p[K] - P(K \geq 1) \\
&\geq E_p[K] - 1 .
\end{aligned}$$

Par l'équation de Wald qu'on montrera plus tard,

$$E_p[M'_1 + \dots + M'_K] = E_p[M'_1] E_p[K]$$

Mais  $E_p[M'_1 + \dots + M'_K] > n$  par définition de  $K$ , donc

$$\begin{aligned}
E_p[K] > \frac{n}{E_p[M'_1]} &= \frac{n}{1 + \sum_{i=0}^n i P_p(\min(M_1, n) = i)} \\
&= \frac{n}{\sum_{i=0}^n P_p(M \geq i)} \\
&= \frac{n}{\sum_{i=0}^n P_p(A_i)} .
\end{aligned}$$

et on a donc bien:

$$E_p[N(A_n) \mid A_n] \geq \frac{n}{\sum_{i=0}^n P_p(A_i)} - 1$$

Montrons l'équation de Wald:

$$\begin{aligned}
E[M'_1 + \dots + M'_K] &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x_1=0}^{\infty} \dots \sum_{x_n=0}^{\infty} (x_1 + \dots + x_n) P(K = n, M'_1 = x_1, \dots, M'_n = x_n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x_1=0}^{\infty} \dots \sum_{x_{n-1}=0}^{\infty} (x_1 + \dots + x_{n-1}) P(K = n, M'_1 = x_1, \dots, M'_{n-1} = x_{n-1}) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} E[M'_n] P(K = n)
\end{aligned}$$

et en itérant,

$$\begin{aligned} E[M'_1 + \dots + M'_K] &= \sum_{n=0}^{\infty} (E[M'_1] + \dots + E[M'_n]) P(K = n) \\ &= E[M'_1] E[K] . \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve du lemme.

Le lemme 4.3.2.2 nous fournit donc la minoration de  $E_p[N(A_n) \mid A_n]$  que l'on cherchait: en regroupant (7) et (9), on obtient:

$$\begin{aligned} P_{\alpha}(A_n) &\leq P_{\beta}(A_n) \exp \left( - \int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{n}{\sum_{i=0}^n P_p(A_n)} - 1 \right) dp \right) \\ &\leq P_{\beta}(A_n) \exp \left( -(\beta - \alpha) \left( \frac{n}{\sum_{i=0}^n P_{\beta}(A_n)} - 1 \right) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

**lemme 4.3.2.3** Pour  $p < p_c$ ,  $\exists \delta(p)$  tel que:

$$\forall n \geq 1, P_p(A_n) < \frac{\delta(p)}{\sqrt{n}} .$$

**preuve** Soit  $0 < \beta < p_c$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $\alpha$  tel que  $0 < \alpha < \beta$ , et  $n' \geq n$ . D'après (10),

$$\begin{aligned} P_{\alpha}(A_{n'}) &\leq P_{\beta}(A_{n'}) \exp \left( 1 - \frac{(\beta - \alpha)n'}{\sum_{i=0}^{n'} P_{\beta}(A_{n'})} \right) \\ &\leq P_{\beta}(A_n) \exp \left( 1 - \frac{(\beta - \alpha)n'}{\sum_{i=0}^{n'} P_{\beta}(A_{n'})} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

or

$$\begin{aligned} \frac{1}{n'} \sum_{i=0}^{n'} P_{\beta}(A_i) &\leq \frac{n + n' P_{\beta}(A_n)}{n'} \\ &\leq 3P_{\beta}(A_n) , \end{aligned}$$

en choisissant  $n' \geq n \left\lfloor \frac{1}{P_{\beta}(A_n)} \right\rfloor$ . Choisissons donc  $n' = n \left\lfloor \frac{1}{P_{\beta}(A_n)} \right\rfloor$ , et  $\alpha = \beta - 3P_{\beta}(A_n)(1 - \log P_{\beta}(A_n))$ . Pour  $n$  assez grand, comme  $P_{\beta}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (car  $\beta < p_c$ ), on a donc  $0 < \alpha < \beta$ , et, d'après (11),

$$P_{\alpha}(A_{n'}) \leq P_{\beta}(A_n)^2 .$$

Soit maintenant  $p < p_c$ , soit  $p < \pi < p_c$ ,  $p_0 = \pi$ . Supposons avoir construit  $p_0, \dots, p_i$  et  $n_0, \dots, n_i$ . Soit alors

$$\begin{cases} n_{i+1} = n_i \left\lfloor \frac{1}{P_{p_i}(A_{n_i})} \right\rfloor \\ p_{i+1} = p_i - 3P_{p_i}(A_{n_i})(1 - \log P_{p_i}(A_{n_i})) \end{cases}$$

On sait:  $p_{i+1} < p_i$ , et en sommant,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = p_0 - \sum_{i=0}^{\infty} P_{p_i}(A_{n_i})(1 - \log P_{p_i}(A_{n_i})) .$$

Mais, si  $0 < x_0 < 1$  et  $x_{j+1} = x_j^2$ , pour  $j \geq 0$ ,

$$S(x_0) := \sum_{i=0}^{\infty} x_i(1 - \log x_i) = \sum_{i=0}^{\infty} x_0^{2^i} (1 - 2^i \log x_0) \xrightarrow{x_0 \rightarrow 0} 0 .$$

et a fortiori (comme  $x \rightarrow x(1 - \log x)$  est croissante sur  $[0, x_0]$ ), si  $x_{j+1} \leq x_j^2$ .

Ceci permet de choisir  $n_0$  assez grand, de sorte que  $P_{p_0}(A_{n_0})$  soit suffisement petit pour que

$$3 \sum_{i=0}^{\infty} P_{p_i}(A_{n_i})(1 - \log P_{p_i}(A_{n_i})) \leq \pi - p$$

et donc  $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i \geq \pi - (\pi - p) = p$ . On a donc:

$$\begin{aligned} P_{p_{k-1}}(A_{n_{k-1}})^2 &\leq P_{p_{k-1}}(A_{n_{k-1}})P_{p_{k-2}}(A_{n_{k-2}})^2 \\ &\leq P_{p_{k-1}}(A_{n_{k-1}}) \dots P_{p_1}(A_{n_1})P_{p_0}(A_{n_0})^2 \\ &\leq \left[ \frac{1}{P_{p_{k-1}}(A_{n_{k-1}})} \right] \times \dots \times \left[ \frac{1}{P_{p_0}(A_{n_0})} \right] P_{p_0}(A_{n_0}) . \end{aligned}$$

Mais  $n_k = n_0 \left\lfloor \frac{1}{P_{p_0}(A_{n_0})} \right\rfloor \times \dots \times \left\lfloor \frac{1}{P_{p_{k-1}}(A_{n_{k-1}})} \right\rfloor$ , donc

$$P_{p_{k-1}}(A_{n_{k-1}})^2 \leq \frac{n_0 P_{p_0}(A_{n_0})}{n_k} = \frac{\delta^2}{n_k} ,$$

où on a posé:  $\delta := \sqrt{n_0 P_{p_0}(A_{n_0})}$ .

Soit  $n > n_0$ , soit  $k$  tel que  $n_{k-1} \leq n < n_k$  ( $n_k$  est strictement croissante à partir d'un certain rang, car  $P_{p_k}(A_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$ ). On a alors:

$$\begin{aligned} P_p(A_n) &\leq P_{p_{k-1}}(A_n) \quad (\text{car } p \leq p_{k-1}) \\ &\leq P_{p_{k-1}}(A_{n_{k-1}}) \quad (n \geq n_{k-1}) \\ &\leq \frac{\delta}{\sqrt{n_k}} \\ &\leq \frac{\delta}{\sqrt{n}} \quad (n < n_k) \end{aligned}$$

La propriété est donc vérifiée pour  $n > n_0$ . Quitte à réajuster  $\delta$ , elle est vraie pour  $n \geq 1$ .

Du lemme 4.3.2.3, on déduit l'existence de  $\Delta(p) < \infty$  tel que:

$$\forall p < p_c, \forall n \geq 1, \sum_{i=0}^n P_p(A_i) \leq \Delta(p)\sqrt{n} .$$

On en déduit grâce à (10):

$$\begin{aligned} P_{\alpha}(A_n) &\leq P_{\beta}(A_n) \exp \left( -(\beta - \alpha) \left( \frac{\sqrt{n}}{\Delta(\beta)} - 1 \right) \right) \\ &\leq \exp \left( -\frac{(\beta - \alpha)\sqrt{n}}{\Delta(\beta)} \right) . \end{aligned}$$

et donc  $\sum_{n=1}^{\infty} P_{\alpha}(A_n) < \infty$ . On conclut en réinjectant dans (10),

$$\forall \alpha < p_c, \exists \psi(\alpha) > 0, P_{\alpha}(A_n) \leq e^{-n\psi(\alpha)} .$$

**corollaire** Si  $p < p_c$ ,  $E_p[|C(0)|] < \infty$ .

**preuve**

$$\begin{aligned} E_p[|C(0)|] &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} E_p[|C(0)| \mid M = n] P_p(M = n) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |S(n)| P_p(A_n) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (2n+1)^d e^{-\psi(p)n} < \infty. \end{aligned}$$

Ceci signifie en particulier qu'il n'y a pas de phase intermédiaire, où l'on aurait à la fois  $\theta(p) = 0$  et  $E_p[|C(0)|] = \infty$ .

## 4.4 Unicité de la composante connexe infinie ouverte pour $p < p_c$

### 4.4.1 Théorème

Soit  $p > p_c$ . Alors

$$P_p(\text{le nombre de composantes connexes infinies ouvertes est } 1) = 1.$$

**preuve** Soit  $N$  la variable aléatoire comptant le nombre de composantes connexes infinies ouvertes. Si  $B$  est un sous ensemble fini de  $\mathbb{Z}^d$ , on notera  $\mathbb{B}_B$  l'ensemble des arêtes de  $\mathbb{L}^d$  joignant deux sommets de  $B$ . On notera  $N_B(0)$  (resp.  $N_B(1)$ ) le nombre de composantes connexes infinies ouvertes quand toutes les arêtes de  $\mathbb{B}_B$  sont fermées (resp. ouvertes). Soit  $M_B$  le nombre de composantes connexes infinies ouvertes intersectant  $B$ .

$N$  est invariante par translation,  $P_p$  est une mesure produit sur  $\{0,1\}^{\mathbb{B}^d}$ , donc il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $P_p(N = k) = 1$ .

Supposons par l'absurde  $1 < k < \infty$ . On a alors  $P_p(N_{S(n)}(0) = N_{S(n)}(1) = k) = 1$  (si on avait par exemple  $P_p(N_{S(n)}(0) = k) < 1$ ,  $P_p(N \neq k) \geq \min(p, 1-p)^{|\mathbb{B}_{S(n)}|} P_p(N_{S(n)}(0) \neq k) > 0$ ), et on en déduit:  $P_p(M_{S(n)} \geq 2) = 0$ : supposons en effet le contraire. Si  $M_{S(n)} \geq 2$ ,  $N_{S(n)}(1) < N_{S(n)}(0) < \infty$ , et donc

$$P_p(N_{S(n)}(1) < N_{S(n)}(0) < \infty) > 0,$$

ce qui contredit  $N_{S(n)}(0) = N_{S(n)}(1)$  presque sûrement. Mais  $P_p(M_{S(n)} \geq 2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_p(N \geq 2)$ , et donc  $P_p(\infty > N \geq 2) = 0$ , donc  $k \in \{0, 1, \infty\}$ . On a supposé  $p > p_c$ , donc  $k \neq 0$ . Supposons donc enfin:  $k = \infty$ .

On dit que  $x \in \mathbb{Z}^d$  est une *trifurcation*, et on note cet événement  $T_x$ , si:

- $x$  est dans une composante connexe infinie ouverte
- il y a exactement trois arêtes ouvertes incidentes à  $x$
- en fermant les trois arêtes ouvertes incidentes à  $x$ , on coupe la composante connexe infinie ouverte de  $x$  en trois nouvelles composantes connexes infinies ouvertes.

$$P_p(M_{S(n)}(0) \geq 3) \geq P_p(M_{S(n)} \geq 3) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_p(N \geq 3) = 1$$

Soit donc  $n$  tel que  $P_p(M_{S(n)}(0) \geq 3) \geq \frac{1}{2}$ . Soit  $\omega \in \{M_{S(n)}(0) \geq 3\}$ , et  $x, y, z$  trois sommets de  $\partial S(n)$  appartenant à trois composantes connexes infinies ouvertes distinctes de  $\mathbb{L}^d \setminus S(n)$ .

Soient trois chemins joignant 0 respectivement à  $x, y$  et  $z$ , ne se coupant qu'en 0, ne rencontrant  $\partial S(n)$  que respectivement en  $x, y$  et  $z$ . Alors

$$\begin{aligned} P_p(\{0 \text{ est une trifurcation}\}) &\geq P_p(J_{x,y,z} \mid M_{S(n)}(0) \geq 3) P_p(M_{S(n)}(0) \geq 3) \\ &\geq (\min(p, 1-p))^R \times \frac{1}{2} > 0 \end{aligned}$$

où  $R$  est le nombre d'arêtes dans  $S(n)$ , et  $J_{x,y,z}$  l'évènement: "toutes les arêtes de  $\mathbb{B}_{S(n)}$  sont fermées, excepté celles des trois chemins ouverts joignant 0 à respectivement  $x, y$  et  $z$ ". Or

$$E \left[ \sum_{x \in S(n)} \mathbf{1}_{T_x} \right] = |S(n)| P_p(T_0) \quad (12)$$

On va obtenir une contradiction grâce au:

**lemme** Soit  $Y$  un ensemble fini,  $|Y| \geq 3$ . Si  $\mathcal{P}$  est une famille compatible de 3-partitions de  $Y$  (une *3-partition* est une partition en exactement trois sous ensembles non vides), où deux 3-partitions  $\Pi = \{P_1, P_2, P_3\}$  et  $\Pi' = \{P'_1, P'_2, P'_3\}$  sont dites *compatibles* si, quitte à renommer les  $(P_i)$  et les  $(P'_i)$ ,  $P'_2 \cup P'_3 \subset P_1$ . Alors

$$|\mathcal{P}| \leq |Y| - 2 .$$

**preuve du lemme** Raisonnons par récurrence sur  $|Y|$ . Si  $|Y| = 3$ ,  $|\mathcal{P}| \leq 1$ .

Soit  $n \geq 3$ , et supposons avoir montré le résultat pour  $|Y| \leq n$ . Soit  $Y$  tel que  $|Y| = n + 1$ , soit  $y \in Y$ , soit  $\mathcal{P}$  une famille de 3-partitions de  $Y$ . Si  $\Pi \in \mathcal{P}$ , on écrit  $\Pi = \{\Pi_1 \cup \{y\}, \Pi_2, \Pi_3\}$ , où  $\Pi_1 \sqcup \Pi_2 \sqcup \Pi_3 = Y \setminus \{y\}$ , avec  $\Pi_2, \Pi_3 \neq \emptyset$ .

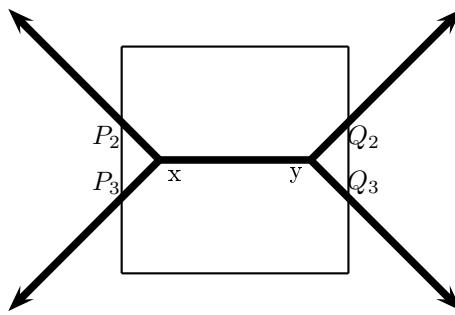
Soit  $\mathcal{P}' = \{\Pi \in \mathcal{P}, \Pi_1 \neq \emptyset\}$ .  $\{\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\}, \Pi \in \mathcal{P}'\}$  est alors clairement une famille de 3-partitions de  $Y \setminus \{y\}$ , et donc, par hypothèse de récurrence,

$$|\mathcal{P}'| \leq |Y| - 1 - 2 = |Y| - 3 .$$

Supposons  $|\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'| \geq 2$ . Soient alors  $\{\{y\}, \Pi_2, \Pi_3\} \neq \{\{y\}, \Pi'_2, \Pi'_3\} \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$ . Comme  $\mathcal{P}$  est compatible, on devrait avoir:  $\{y\} \cup \Pi_2 \subset \{y\}$ ,  $\Pi'_2$  ou  $\Pi'_3$ , ce qui n'est pas. Donc  $|\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'| \leq 1$ , et donc

$$|\mathcal{P}| \leq |Y| - 2 .$$

Si  $K$  est une composante connexe ouverte de  $S(n)$ , toute trifurcation  $x \in K \cap S(n-1)$  induit canoniquement une 3-partition  $\Pi(x)$  de  $\partial S(n) \cap K$ . Si  $x, y$  sont deux telles trifurcations, on note  $\Pi(x) = (P_1, P_2, P_3)$ , et  $\Pi(y) = (Q_1, Q_2, Q_3)$ .



Supposons par exemple (quitte à renommer) que  $y$  (resp.  $x$ ) soit dans la composante connexe ouverte de  $K$  privé des trois arêtes ouvertes adjacentes à  $x$  (resp.  $y$ ) qui contiennent  $P_1$  (resp.  $Q_1$ ). On a alors  $Q_2 \sqcup Q_3 \subset P_1$  (sur le dessin, les  $Q_i$  et les  $P_i$  sont des singletons pour  $i \in \{2, 3\}$ , et  $P_1 = Q_2 \cup Q_3$ ;  $Q_1 = P_2 \cup P_3$ ). Le lemme entraîne donc que, si  $\mathcal{T}$  est le nombre de trifurcations dans  $S(n-1) \cap K$ ,

$$\mathcal{T} \leq |K \cap \partial S(n)| - 2 .$$

On somme sur les composantes connexes ouvertes dans  $S(n-1)$ , et le nombre  $\tau$  de trifurcations dans  $S(n-1)$  vérifie:

$$\sum_{x \in S(n-1)} \mathbf{1}_{T_x} = \tau \leq |\partial S(n)| .$$

et donc, d'après (12),

$$|S(n-1)|P_p(T_0) \leq |\partial S(n)| .$$

Mais  $|S(n-1)| \sim C_1 n^d$  et  $|\partial S(n)| \sim C_2 n^{d-1}$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes strictement positives. On obtient une contradiction en faisant tendre  $n$  vers l'infini, car  $P_p(T_0) > 0$ .

## 5 Percolation dans $\mathbb{L}^2$

### 5.1 La dualité

Comme on l'a déjà vu en 4.1, il existe en dimension 2 une propriété particulière qui rend l'étude plus facile: la dualité.

#### 5.1.1 Définition

Soit  $G$  un graphe du plan. On construit son sous graphe dual  $G_d$  de la façon suivante:

- à toute face de  $G$ , on associe un sommet de  $G_d$
- à toute arête  $e$  de  $G$ , on associe une arête  $e^*$  de  $G_d$  joignant les sommets de  $G_d$  correspondant aux faces adjacentes à  $e$ .

#### 5.1.2 Exemple

On à déjà vu:  $\mathbb{L}_d^2 \simeq \mathbb{L}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Dans le cadre d'un processus de percolation, on dit qu'une arête  $b^* \in \mathbb{B}_d^2$  est ouverte (resp. fermée) si  $b \in \mathbb{B}^2$  est fermée (resp. ouverte).

#### 5.1.3 Remarques

Effectuer un processus de percolation de Bernoulli de paramètre  $p$  sur  $\mathbb{L}^2$  revient à effectuer un processus de percolation de Bernoulli de paramètre  $1-p$  sur  $\mathbb{L}_d^2$ . Plus précisément, si  $A$  est un événement de  $\Omega$ , en associant à  $A$  l'événement  $A_d \in \Omega_d = \{0,1\}^{\mathbb{B}_d^2}$ , où les éléments de  $A_d$  sont les configurations duales des configurations des éléments de  $A$ , on a la relation:  $P_p(A) = P_{1-p}^d(A_d)$ , où  $P_{1-p}^d$  est une mesure "égale" à  $P_{1-p}$ , par l'isomorphisme entre  $\mathbb{L}^2$  et  $\mathbb{L}_d^2$ .

Si  $C$  est la composante connexe ouverte de  $\mathbb{L}^2$  contenant l'origine,  $C$  est fini si et seulement si  $0^*$  est encerclé par un circuit ouvert de  $\mathbb{L}_d^2$ .

## 5.2 La probabilité critique $p_c(\mathbb{L}^2)$

### Théorème

$$p_c(\mathbb{L}^2) = \frac{1}{2} .$$

**preuve de  $p_c(\mathbb{L}^2) \geq \frac{1}{2}$**  Supposons par l'absurde  $\theta(\frac{1}{2}) > 0$ .

On considère les événements  $A^g(n)$  (respectivement  $A^d(n)$ ,  $A^i(n)$ ,  $A^s(n)$ ): "il existe un sommet du côté gauche (respectivement droit, inférieur, supérieur) de  $T(n) = [0, n]^2$  qui est dans un chemin infini de  $\mathbb{L}^2$  ne passant par aucun autre sommet de  $T(n) \setminus \partial T(n)$ ". Les  $\{A^u(n)\}_{u \in \{g, d, i, s\}}$  sont clairement des événements croissants. De plus, on a:

$$\bigcup_{u \in \{g, d, i, s\}} A^u(n) = \{\exists x \in T(n), |C(x)| = \infty\} .$$

et donc  $P_{\frac{1}{2}} \left( \bigcup_{u \in \{g, d, i, s\}} A^u(n) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ . Mais, d'après l'inégalité FKG (les  $\overline{A^u(n)}$  sont décroissants),

$$\begin{aligned} P_{\frac{1}{2}} \left( \bigcup_u A^u(n) \right) &= 1 - P_{\frac{1}{2}} \left( \bigcap_u \overline{A^u(n)} \right) \\ &\leq 1 - \prod_u P_{\frac{1}{2}} \left( \overline{A^u(n)} \right) \end{aligned}$$

Or  $\forall u, v, P_{\frac{1}{2}}(A^u(n)) = P_{\frac{1}{2}}(A^v(n))$  ( $\mathbb{L}^2$  est invariant par rotation d'un quart de tour), donc

$$1 \xleftarrow{n \rightarrow \infty} P_{\frac{1}{2}} \left( \bigcup_u A^u(n) \right) \leq 1 - (1 - P_{\frac{1}{2}}(A^u(n)))^4.$$

donc  $\forall u, P_{\frac{1}{2}}(A^u(n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .

On considère de même les événements  $A_d^u(n)$  sur  $\mathbb{L}_d^2$  (où le carré dual est  $T(n)_d = \{x + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), x \in \{0, \dots, n\}^2\}$ ). Chaque arête de  $\mathbb{L}_d^2$  est ouverte avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ , donc  $\forall u, P_{\frac{1}{2}}(A_d^u(n)) = P_{\frac{1}{2}}(A^u(n))$ .

Soit  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq m, P_{\frac{1}{2}}(A^u(n)) > \frac{7}{8}$ . Soit  $A(m) := A^g(m) \cap A^d(m) \cap A_d^s(m) \cap A_d^i(m)$ .

Alors  $P_{\frac{1}{2}} \left( \overline{A(m)} \right) \leq 4 \times (1 - \frac{7}{8}) = \frac{1}{2}$ , et donc

$$P_{\frac{1}{2}}(A(m)) \geq \frac{1}{2}.$$

Or, par unicité de la composante connexe infinie,

$$\begin{aligned} 0 &= P_{\frac{1}{2}}(N \geq 2) \\ &\geq P_{\frac{1}{2}}(\{N \geq 2\} \cap A(m)) \\ &\geq P_{\frac{1}{2}}(\{N \geq 2\} \mid A(m)) P_{\frac{1}{2}}(A(m)) \\ &\geq \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(sachant  $A(n)$ , on peut imposer  $N \geq 2$  en “coupant en deux”  $T(m)$  avec un chemin ouvert dans  $T(m)_d$  reliant un sommet supérieur de  $T(m)_d$  à un de ses sommets inférieurs, ce chemin pouvant être de longueur  $m+1$ ), d'où une contradiction.

**preuve de  $p_c(\mathbb{L}^2) \leq \frac{1}{2}$**  Soit  $S(n)$  le sous graphe de  $\mathbb{L}^2$  dont les sommets sont les éléments de  $\{0, \dots, n+1\} \times \{0, \dots, n\}$ , et les arêtes toutes celles induites par celles de  $\mathbb{L}^2$  reliant deux de ces sommets, excepté les  $\langle (0, i), (0, i+1) \rangle$  et les  $\langle (n+1, i), (n+1, i+1) \rangle$ , pour  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Dualement, soit  $S(n)_d$  le sous graphe de  $\mathbb{L}_d^2$  dont les sommets sont les  $\{x + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), x \in \{0, \dots, n\} \times \{-1, \dots, n\}\}$ , d'arêtes toutes celles induites par celles de  $\mathbb{L}_d^2$  reliant deux de ces sommets, excepté les  $\langle (i, -\frac{1}{2}), (i+1, -\frac{1}{2}) \rangle$  et les  $\langle (i, n+\frac{1}{2}), (i+1, n+\frac{1}{2}) \rangle$ , pour  $i \in \{0, \dots, n-1\} + \frac{1}{2}\}$ .

Soient les événements:

- $A_n = \{\text{un sommet du côté gauche de } S(n) \text{ est relié à un sommet du côté droit par un chemin ouvert dans } S(n)\}$
- $B_n = \{\text{un sommet du côté supérieur de } S(n)_d \text{ est relié à un sommet du côté inférieur par un chemin ouvert dans } S(n)_d\}$ .

Clairement,  $A_n \cap B_n = \emptyset$ , et  $A_n \cup B_n = \Omega$ . Donc  $P_p(A_n) + P_p(B_n) = 1$ . Mais  $P_p(B_n) = P_{1-p}(A_n)$ , donc  $P_{\frac{1}{2}}(A_n) = \frac{1}{2}$ .

On note  $L_n = \{(n+1, i), 0 \leq i \leq n\}$ . Supposons  $p_c > \frac{1}{2}$ . D'après 5.3,  $P_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow L_n) \leq e^{-\sigma n}$ , où  $\sigma > 0$ . Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = P_{\frac{1}{2}}(A_n) &= P_{\frac{1}{2}}(\exists i \in \{0, \dots, n\}, (0, i) \leftrightarrow L_n) \\ &\leq \sum_{i=0}^n P_{\frac{1}{2}}((0, i) \leftrightarrow L_n) \\ &\leq \sum_{i=0}^n P_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow L_n) \\ &\leq (n+1)e^{-\sigma n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

d'où une contradiction.

## References

- [1] CHAYES, *Percolation*.
- [2] Yuval PERES, *Probability on trees: an introduction climb*, Springer.
- [3] Russel LYONS, *Probability and trees*.
- [4] Geoffrey GRIMMETT, *Percolation*, Springer, 1999.

## Contents

<b>1 Généralités</b>	<b>1</b>
1.1 La percolation par liens . . . . .	1
1.1.1 Définition . . . . .	2
1.2 La percolation par sites . . . . .	2
1.2.1 Remarque . . . . .	2
1.2.2 Théorème . . . . .	2
1.3 Exemples d'application . . . . .	5
<b>2 Les arbres</b>	<b>5</b>
2.1 Préliminaires sur les arbres . . . . .	5
2.1.1 Définition . . . . .	5
2.1.2 Taux de croissance . . . . .	5
2.1.3 Le nombre de branchement . . . . .	6
2.1.4 Correspondance avec les marches aléatoires sur $T$ . . . . .	7
2.2 Les arbres de Galton-Watson . . . . .	8
2.3 Théorème . . . . .	9
2.3.1 preuve de $p_c(T) \geq \frac{1}{br(T)}$ . . . . .	9
2.3.2 Définitions et notations . . . . .	9
2.3.3 Remarque . . . . .	9
2.3.4 Lemme . . . . .	10
2.3.5 preuve de $p_c(T) \leq \frac{1}{br(T)}$ . . . . .	11
<b>3 Etude de l'arbre <math>k</math>-aire <math>T_k</math>. (<math>k \geq 2</math>)</b>	<b>12</b>
3.1 La probabilité critique $p_c(T_k)$ . . . . .	12
3.2 L'exposant $\beta$ . . . . .	13
3.2.1 Définition . . . . .	13
3.2.2 Théorème . . . . .	13

3.3	L'exposant $\gamma$	13
3.3.1	Définition	13
3.3.2	Théorème	13
3.4	La probabilité $P_p( C(0)  = n)$	14
3.5	L'exposant $\Delta$	16
3.5.1	Définition	16
3.5.2	Théorème	16
3.6	L'exposant $\alpha$	19
3.6.1	Définition	19
3.6.2	Théorème	19
3.7	L'exposant $\delta$	20
3.7.1	Définition	20
3.7.2	Théorème	20
3.8	La probabilité $P_{p_c}(\text{rad}(C(0)) \geq n)$	20
3.8.1	Définition	20
3.8.2	Théorème	20
<b>4</b>	<b>Percolation de Bernoulli sur <math>\mathbb{L}^d</math></b>	<b>21</b>
4.1	Existence d'une probabilité critique	21
4.1.1	Théorème	21
4.2	Quelques outils techniques	22
4.2.1	Evènements croissants et inégalité FKG	22
4.2.2	Inégalité BK	24
4.2.3	Formule de Russo	26
4.3	Absence de phase intermédiaire pour $p < p_c$	27
4.3.1	Définitions	27
4.3.2	Théorème	27
4.4	Unicité de la composante connexe infinie ouverte pour $p < p_c$	33
4.4.1	Théorème	33
<b>5</b>	<b>Percolation dans <math>\mathbb{L}^2</math></b>	<b>35</b>
5.1	La dualité	35
5.1.1	Définition	35
5.1.2	Exemple	35
5.1.3	Remarques	35
5.2	La probabilité critique $p_c(\mathbb{L}^2)$	35