

La conjecture du $K(\pi, 1)$
pour les groupes d'Artin affines,
d'après Giovanni Paolini et Mario Salvetti

Thomas Haettel

Séminaire Bourbaki
18 juin 2022

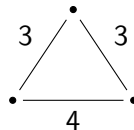
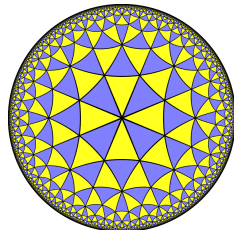
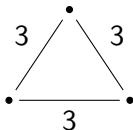
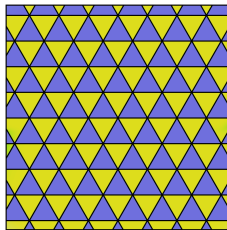
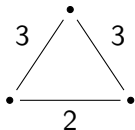
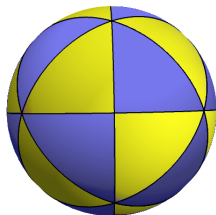
- 1 La conjecture du $K(\pi, 1)$
- 2 Stratégie de preuve
- 3 Idée de preuve du théorème A : $K_W = K(W_w, 1)$
- 4 Idée de preuve du théorème B : $K_W \simeq X'_W$

La conjecture du $K(\pi, 1)$

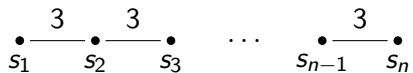
Groupe de Coxeter

S ensemble fini, $(m_{s,t})_{s,t \in S}$ matrice de Coxeter, groupe de Coxeter

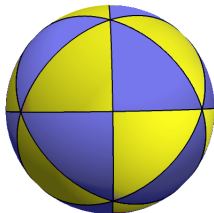
$$W = \langle S \mid \forall s \in S, s^2 = 1, \forall s, t \in S, (st)^{m_{st}} = 1 \rangle.$$



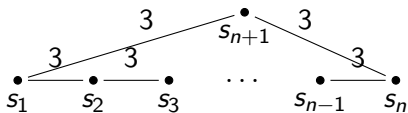
Exemple : en type A_n :



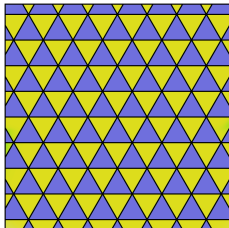
$W \simeq \mathfrak{S}_{n+1}$ agit par réflexions orthogonales sur la sphère de \mathbb{R}^n



Exemple : en type \widetilde{A}_n :



$W \simeq \mathfrak{S}_{n+1} \ltimes \mathbb{Z}^n$ agit par réflexions orthogonales sur l'espace euclidien \mathbb{R}^n



Groupes d'Artin-Tits

Le groupe d'Artin-Tits associé à W est

$$G_W = \langle S \mid \forall s, t \in S, \underbrace{stst \dots}_{m_{st}} = \underbrace{tsts \dots}_{m_{st}} \rangle.$$

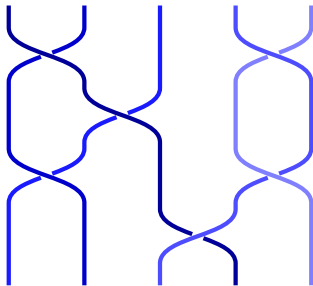
Exemple: en type A_n , $W = \mathfrak{S}_{n+1}$, le groupe d'Artin G_W est le groupe de tresses à $n + 1$ brins

$$B_{n+1} = \langle s_1, \dots, s_n \mid \begin{array}{l} \forall 1 \leq i \leq n, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \\ \forall |i - j| \geq 2, s_i s_j = s_j s_i \end{array} \rangle.$$

L'espace de configuration de n points du plan est

$$Y_W = \{F \subset \mathbb{C}, |F| = n\},$$

et son groupe fondamental est le groupe de tresses B_n à n brins.



Considérons dans \mathbb{C}^n les hyperplans $H_{ij} = \{z_i = z_j\}$, pour $i \neq j$. Alors

$$Y_W \simeq \left(\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i \neq j} H_{ij} \right) / \mathfrak{S}_n.$$

W groupe de Coxeter fini ou affine agissant sur \mathbb{R}^n .

$R = \{\text{conjugués de } S\} \subset W$ est l'ensemble des *réflexions* de W .

Si $r \in R$ est une réflexion, elle fixe un hyperplan $H_r \subset \mathbb{R}^n$.

L'espace de configuration de W est

$$Y_W = \left(\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{r \in R} H_r \otimes \mathbb{C} \right) / W.$$

Théorème (van der Lek, 1983)

L'espace de configuration Y_W a pour groupe fondamental le groupe d'Artin G_W .

Exemple : en type \widetilde{A}_n , les hyperplans de réflexions dans \mathbb{R}^n sont

$$\{x_i - x_j = k\}, \text{ où } 1 \leq i < j \leq n \text{ et } k \in \mathbb{Z}.$$

L'espace de configuration Y_W est donc

$$Y_W = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \forall i \neq j, z_i - z_j \notin \mathbb{Z}\} / W.$$

Conjecture (Conjecture du $K(\pi, 1)$: Arnol'd, Pham, Thom)

L'espace de configuration Y_W est un espace classifiant pour le groupe d'Artin G_W .

Théorème (Fox, Neuwirth 1962, Deligne 1972)

Si W est fini, la conjecture du $K(\pi, 1)$ est vraie.

Théorème (Paolini, Salvetti 2021)

Si W est affine, la conjecture du $K(\pi, 1)$ est vraie.

Types $\widetilde{A}_n, \widetilde{C}_n$: Okonek 1979

Type \widetilde{B}_n : Callegaro, Moroni, Salvetti 2010

Type \widetilde{G}_2 : Charney, Davis 1995

Les groupes d'Artin sont mystérieux

W un groupe de Coxeter quelconque.

Question

Le groupe d'Artin G_W est-il sans torsion ?

Question

Quel est le centre du groupe d'Artin G_W ?

Question

Le groupe d'Artin G_W a-t-il un problème du mot résoluble ?

Si la conjecture du $K(\pi, 1)$ est vraie pour un groupe de Coxeter W :

- Le groupe d'Artin G_W est sans torsion.
- Le centre du groupe d'Artin G_W est connu.
- L'homologie et la cohomologie du groupe d'Artin G_W et de l'espace de configuration Y_W sont les mêmes.

Stratégie de preuve

Groupes d'Artin duaux

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

$w = s_1 s_2 \dots s_n$ un élément de Coxeter de W .

$[1, w]$ réunion des géodésiques de 1 à w dans $\text{Cay}(W, R)$: équilibré.

$[1, w]$ est appelé intervalle des *partitions non croisées* de type W .

$R_0 = R \cap [1, w]$ réflexions apparaissant dans une factorisation de w .

Le *groupe d'Artin dual* W_w associé à W et w est

$$W_w = \langle R_0 \mid \text{cycles dans } [1, w] \rangle.$$

Complexe d'intervalle K_W , quotient par W du complexe simplicial

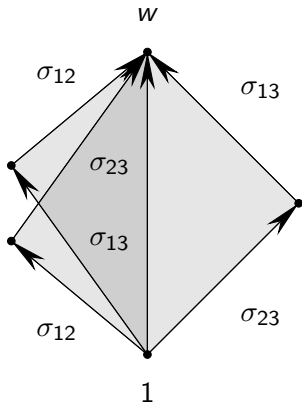
- de sommets W ,
- d'arêtes (g, gx_1) , pour chaque $x_1 \in [1, w] \setminus \{1\}$ et
- plus généralement de k -simplexes (g, gx_1, \dots, gx_k) pour chaque k -chaîne $1 < x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq w$ dans $[1, w]$.

Le simplexe de K_W est noté $[x_1|x_2|\dots|x_k]$.

Le groupe fondamental du complexe d'intervalle K_W est le groupe d'Artin dual W_w .

Exemple : en type A_2 , $W = \mathfrak{S}_3$, $S = \{\sigma_{12}, \sigma_{23}\}$, $R = \{\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}\}$,
 $w = \sigma_{12}\sigma_{23}$.

$$W_w = \langle R \mid \sigma_{12}\sigma_{23} = \sigma_{23}\sigma_{13} = \sigma_{13}\sigma_{12} \rangle \simeq G_W = B_3.$$



Exemple : en type \widetilde{A}_2 , $S = \{a, b, c\}$, R est infini.

L'élément de Coxeter $w = abc$ a une infinité de factorisations comme produit de 3 réflexions :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, w = (w^n a w^{-n})(w^n b w^{-n})(w^n c w^{-n}),$$

et si $n \neq m$ alors $w^n a w^{-n} \neq w^m a w^{-m}$.

Théorème (Brady, Watt 2002, Bessis 2003, McCammond, Sulway 2017)

Si W est fini ou affine, alors W_w est isomorphe à G_W .

Si W est fini ou de type \widetilde{A}_n , \widetilde{C}_n ou \widetilde{G}_2 , alors $[1, w]$ est un treillis et W_w est un *groupe de Garside*.

Dans ce cas, K_W est un espace classifiant pour W_w .

Théorème A (Paolini, Salvetti 2021)

Si W est un groupe de Coxeter affine irréductible, alors le complexe d'intervalle K_W est un espace classifiant pour le groupe d'Artin dual W_w .

Complexe de Salvetti

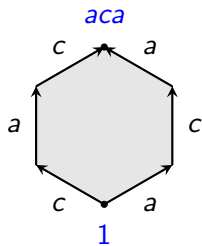
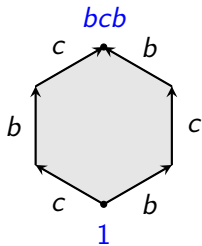
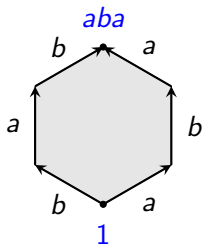
W groupe de Coxeter, complexe de Salvetti X_W est le CW-complexe ayant :

- 1 sommet
- S arêtes
- pour chaque $\{s, t\} \subset S$, une 2-cellule dont le bord est donné par $\underbrace{sts \dots}_{m_{st}} \dots \underbrace{t^{-1}s^{-1}t^{-1}}_{m_{st}}$.
- une $|T|$ -cellule pour chaque $T \subset S$ *sphérique*, i.e. tel que W_T est fini.

Théorème (Salvetti 1987,1994)

Pour tout groupe de Coxeter W , le complexe de Salvetti X_W a le même type d'homotopie que l'espace de configuration Y_W .

Exemple : en type \widetilde{A}_2 , avec $S = \{a, b, c\}$, le complexe de Salvetti X_W est le recollement suivant :



Complexe de Salvetti dual

Élément de Coxeter $w = s_1 s_2 \dots s_n$.

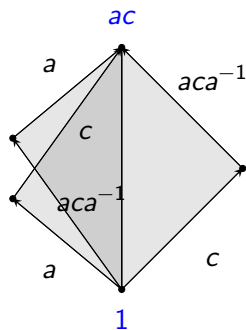
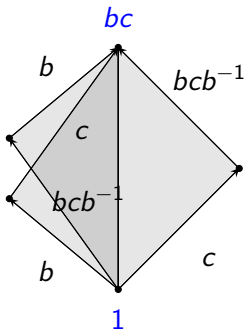
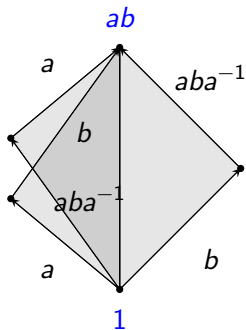
Pour tout $T \subset S$ sphérique, $w_T = \prod_{s_i \in T} s_i$ élément de Coxeter de W_T .

Le *complexe de Salvetti dual* X'_W est le sous-complexe de K_W constitué des simplexes

$$[x_1 | x_2 | \dots | x_k], \text{ avec } x_1 x_2 \dots x_k \leq w_T, \text{ où } T \subset S \text{ sphérique}$$

Si W est fini, $X'_W = K_W$.

Exemple : en type \widetilde{A}_2 , avec $S = \{a, b, c\}$ et $w = abc$, le complexe de Salvetti dual X'_W est le recollement suivant :



Théorème (Paolini, Salvetti 2021)

Pour tout groupe de Coxeter W , le complexe de Salvetti dual X'_W a le même type d'homotopie que le complexe de Salvetti X_W , et donc aussi que l'espace de configuration Y_W .

Point de départ : si W est fini, alors X_W et $X'_W = K_W$ sont des $K(G_W, 1)$, et ont donc le même type d'homotopie.

Stratégie pour la conjecture du $K(\pi, 1)$:

Théorème B (Paolini, Salvetti 2021)

Le complexe d'intervalle K_W se rétracte par déformation forte sur le complexe de Salvetti dual X'_W .

Idée de preuve du théorème A : $K_W = K(W_w, 1)$

Factorisations d'isométries euclidiennes

W un groupe de Coxeter affine irréductible agissant sur \mathbb{R}^n .

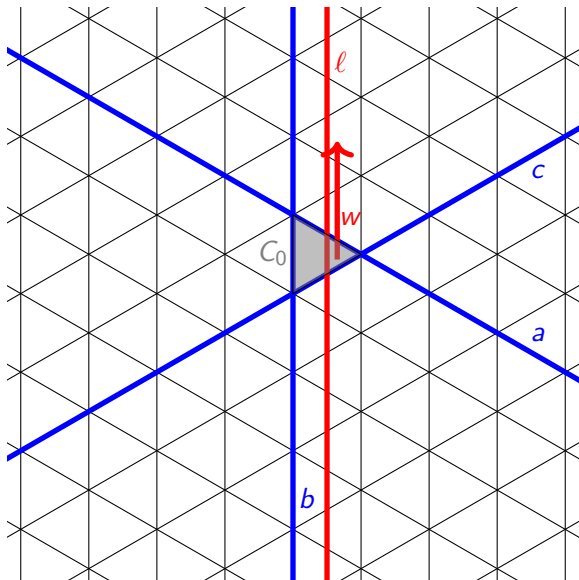
Un élément de W , considéré comme une isométrie affine de \mathbb{R}^n , est :

- *elliptique* s'il fixe un point,
- *hyperbolique* sinon.

Les éléments de S sont les réflexions par rapport à une chambre fondamentale C_0 .

w élément de Coxeter est une isométrie hyperbolique de \mathbb{R}^n , d'axe de Coxeter une droite ℓ intersectant C_0 .

Exemple : en type \widetilde{A}_2 , l'élément de Coxeter $w = abc$.



Horizontal / Vertical

Une isométrie elliptique $u \in W$ est :

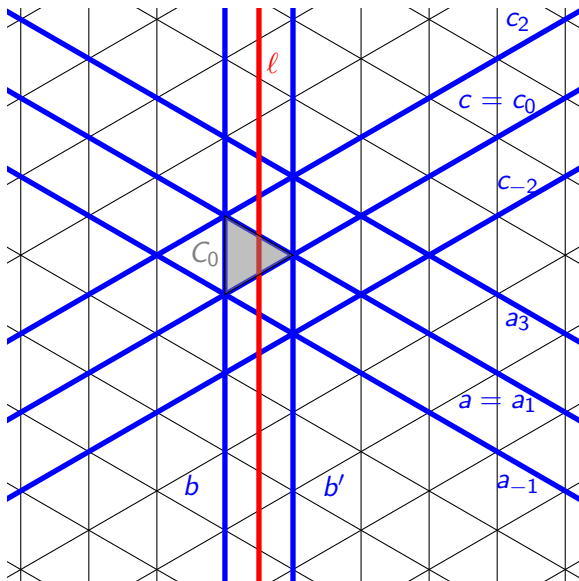
- *horizontale* si elle fixe la direction de ℓ ,
- *verticale* sinon.

Un *sommet axial* est un sommet d'une chambre intersectant ℓ .

Théorème

*Toute réflexion verticale de W est dans $[1, w]$, et fixe des sommets axiaux.
Une réflexion horizontale de W est dans $[1, w]$ si et seulement si elle fixe au moins un sommet axial.*

Exemple : en type \widetilde{A}_2 , pour $w = abc$, les réflexions parallèles à b sont horizontales, les autres sont verticales.



Théorème

Soit $u, v \in [1, w]$ tels que $uv = w$. Il y a 3 possibilités :

- 1 u est elliptique horizontal et v est hyperbolique,
- 2 u et v sont elliptiques verticaux,
- 3 u est hyperbolique et v est elliptique horizontal.

Les cas 1. et 3. sont finis, le cas 2. est infini.

Exemple : en type \widetilde{A}_2 :

$$w = \underbrace{(b)(c_2 c_0)}_{1.} = \underbrace{(a_1)(bc_0)}_{2.} = \underbrace{(a_1 a_{-1})(b)}_{3.}$$

Système de racines horizontal

Le système de racines horizontal Φ_{hor} a $k \in \{1, 2, 3\}$ composantes irréductibles de type A .

$R_{hor} = \{ \text{réflexions horizontales de } W \} \subset R = \{ \text{réflexions de } W \}$

$T = \{ \text{translations de } W \} \subset T_F = \{ \text{translations de facteurs} \}$

4 groupes d'isométries de \mathbb{R}^n :

- Le groupe diagonal D , engendré par R_{hor} et T ,
- Le groupe factorisé F , engendré par R_{hor} et T_F ,
- Le groupe de Coxeter W , engendré par R et T ,
- Le groupe cristallographique C , engendré par R et T_F .

Théorème (McCammond, Sulway 2017)

Les 4 intervalles entre 1 et w vérifient :

$$\begin{aligned}[1, w]^C &= [1, w]^W \cup [1, w]^F \\ [1, w]^D &= [1, w]^W \cap [1, w]^F.\end{aligned}$$

De plus, les intervalles $[1, w]^F$ et $[1, w]^C$ sont des treillis.

Théorème (McCammond, Sulway 2017)

Les 4 groupes d'intervalles associés D_w , F_w , W_w et C_w vérifient :

$$C_w = W_w \star_{D_w} F_w.$$

Le groupe C_w est appelé groupe cristallographique tressé.

Théorème (Paolini, Salvetti 2021)

Le groupe D_w est une extension par \mathbb{Z} d'un produit de groupes d'Artin de types \widetilde{A}_{n_i} , pour $1 \leq i \leq k$. Le complexe d'intervalle associé à $[1, w]^D$ est un espace classifiant pour D_w .

Ceci a pour conséquence :

Théorème A (Paolini, Salvetti 2021)

Le complexe d'intervalle K_W est un espace classifiant pour le groupe d'Artin dual W_w .

Idée de preuve du théorème B : $K_W \simeq X'_W$

Théorie de Morse discrète

X CW-complexe, $\mathcal{F}(X)$ ensemble des faces de X .

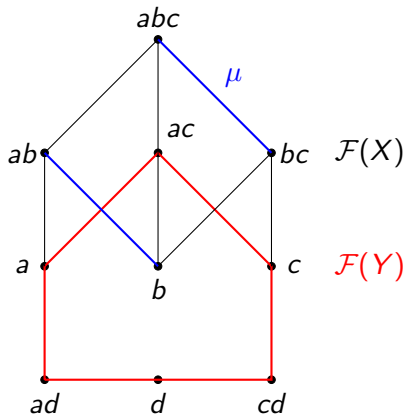
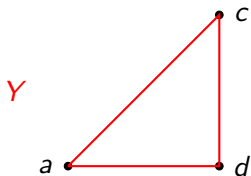
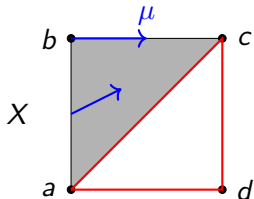
H diagramme de Hasse de $\mathcal{F}(X)$: arête entre σ et τ si σ est une facette de τ , ou l'inverse.

$\mu \subset \mathcal{E}(H)$ est un *couplage* si toute face de X appartient à au plus une arête de μ . Si une face n'appartient à aucune arête de μ , on dit que c'est une *face critique* de μ .

Théorème (Forman, Chari, Batzies)

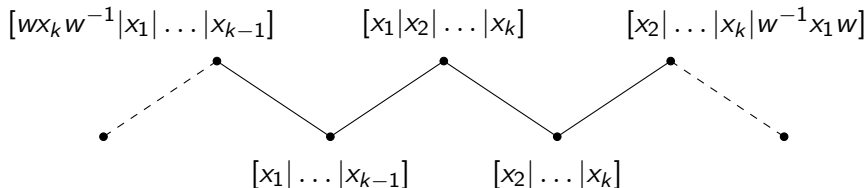
Soit Y un sous-CW-complexe de X , et un couplage $\mu \subset \mathcal{E}(H)$ acyclique et propre dont l'ensemble des faces critiques est $\mathcal{F}(Y)$. Alors X se rétracte par déformation forte sur Y .

Exemple de couplage



Composantes fibrées

Les faces de K_W se répartissent en un nombre fini de *composantes fibrées*, correspondant à l'action de w par conjugaison :



Proposition

Si $x_1 x_2 \dots x_k = w$, la composante fibrée de $[x_1 | x_2 | \dots | x_k]$ est :

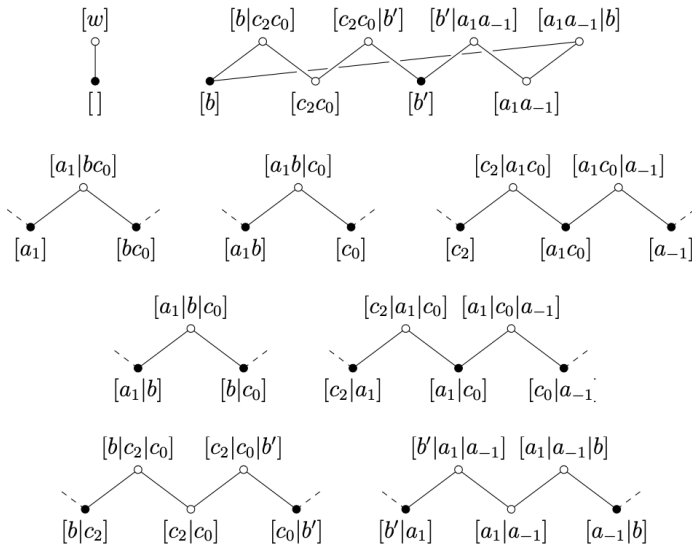
- infinie si tous les x_i sont elliptiques, dont au moins 1 vertical,
- finie si l'un des x_i est hyperbolique, et les autres sont elliptiques horizontaux.

Définissons $K'_W \subset K_W$ comme le sous-complexe dont les faces sont constituées :

- de toutes les composantes finies de K_W , et
- pour chaque composante infinie de K_W , de l'intervalle entre la première et la dernière face appartenant à X'_W .

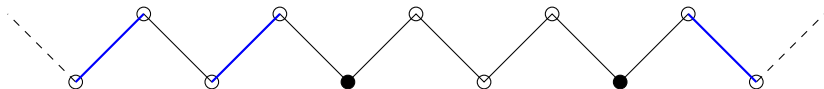
Les faces de X'_W sont les faces $[x_1|x_2|\dots|x_k]$ telles que $x_1x_2\dots x_k$ fixe un sommet de C_0 .

Exemple : composantes fibrées en type \widetilde{A}_2



$$K_W \simeq K'_W$$

Couplage acyclique propre μ sur $\mathcal{F}(K_W)$:



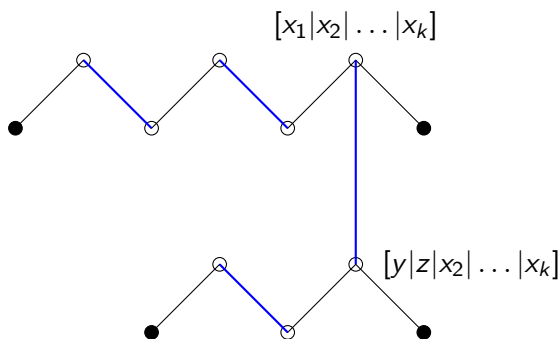
Les faces critiques de μ sont $\mathcal{F}(K'_W)$: K_W se rétracte par déformation forte sur K'_W .

Corollaire

Pour tout groupe de Coxeter affine W , le groupe d'Artin dual W_w a un espace classifiant fini K'_W .

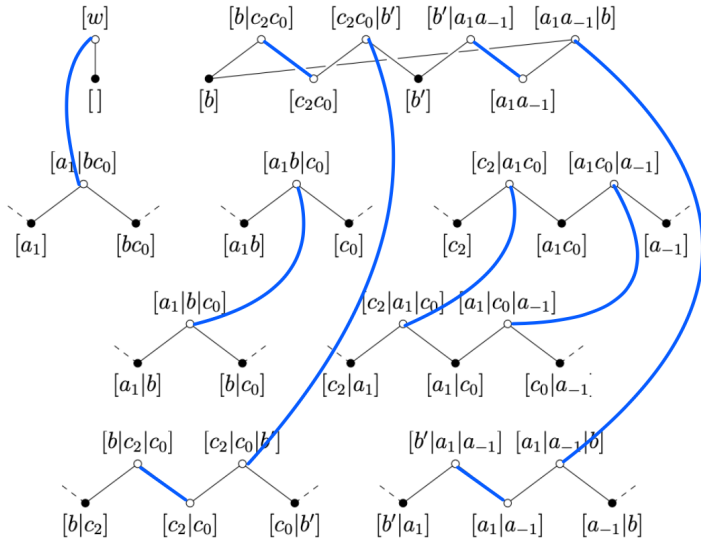
$$K'_W \simeq X'_W$$

Couplage acyclique propre μ sur $\mathcal{F}(K'_W)$:



Ici $x_1 = yz$, où y est la *plus petite réflexion* de $R \cap [1, x_1]$, pour un *ordre total* \prec sur $R \cap [1, w]$.

Exemple : couplage en type \widetilde{A}_2



Les faces critiques de μ sont $\mathcal{F}(X'_W)$.

μ est un couplage acyclique.

Ainsi K'_W se rétracte par déformation forte sur X'_W .

Corollaire (Conjecture du $K(\pi, 1)$)

Pour tout groupe de Coxeter affine, le complexe d'intervalle K_W et le complexe de Salvetti dual X'_W ont le même type d'homotopie. Ainsi l'espace de configuration Y_W est un espace classifiant pour $G_W \simeq W_w$.

Ordres de réflexions : cas fini

$W \simeq \mathfrak{S}_n$ groupe de Coxeter fini de type A_{n-1} , agissant par isométries linéaires sur \mathbb{R}^n .

Pour $1 \leq i < j \leq n$, la réflexion $r_{i,j}$ a pour hyperplan $\{x_i - x_j = 0\}$.

Élément de Coxeter $w = r_{1,2}r_{2,3} \dots r_{n-1,n}$, un n -cycle.

$\ell' = a + \mathbb{R}\mu'$ une droite affine orientée générique de \mathbb{R}^n . Un ordre total \prec , appelé *ordre axial* sur R est défini ainsi :

- en premier viennent les réflexions fixant un point de ℓ' au-dessus de a , et $r \prec r'$ si $\text{Fix}(r) \cap \ell'$ est en-dessous de $\text{Fix}(r') \cap \ell'$;
- ensuite viennent les réflexions fixant un point de ℓ' en-dessous de a , et $r \prec r'$ si $\text{Fix}(r) \cap \ell'$ est en-dessous de $\text{Fix}(r') \cap \ell'$.

Pour un bon choix de ℓ' : $r_{i,j} \prec r_{i',j'}$ si et seulement si $i < i'$, ou $i = i'$ et $j < j'$.

Théorème (Athanasiadis, Brady, Watt 2007)

Soit W un groupe de Coxeter fini cristallographique, w un élément de Coxeter, \prec un ordre axial sur R . Tout intervalle $[u, v]$ de $[1, w]$ a une unique chaîne maximale croissante, qui est lexicographiquement minimale.

L'intervalle $[1, w]$, aussi appelé intervalle des partitions non croisées de type W , est ainsi *lexicographiquement décortiquable*.

En particulier, cela implique que sa réalisation géométrique a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères.

Ordres de réflexions : cas affine

W groupe de Coxeter affine irréductible agissant sur \mathbb{R}^n

w élément de Coxeter, d'axe orienté $\ell \subset \mathbb{R}^n$

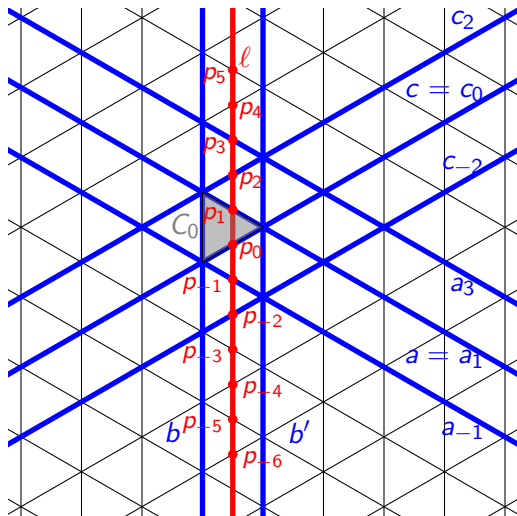
$R_0 = R \cap [1, w]$ réflexions de $[1, w]$

Un ordre total \prec , appelé *ordre axial* sur R_0 est défini ainsi :

- en premier viennent les réflexions verticales fixant un point de ℓ au-dessus de C_0 , et $r \prec r'$ si $\text{Fix}(r) \cap \ell$ est en-dessous de $\text{Fix}(r') \cap \ell$;
- ensuite viennent les réflexions horizontales, selon un ordre axial du système de racines horizontal ;
- enfin viennent les réflexions verticales fixant un point de ℓ en-dessous de C_0 , et $r \prec r'$ si $\text{Fix}(r) \cap \ell$ est en-dessous de $\text{Fix}(r') \cap \ell$.

Exemple : en type \widetilde{A}_2 , un ordre axial \prec sur R_0 est :

$$a_1 \prec c_2 \prec a_3 \prec c_4 \prec \dots \prec b \prec b' \prec \dots \prec a_{-3} \prec c_{-2} \prec a_{-1} \prec c_0$$



Théorème (Paolini, Salvetti 2021)

Soit W un groupe de Coxeter affine irréductible. Soit \prec un ordre axial sur R_0 . Tout intervalle $[u, v]$ de $[1, w]$ a une unique chaîne maximale croissante, qui est lexicographiquement minimale.

L'intervalle $[1, w]$, aussi appelé intervalle des partitions non croisées affines de type W , est ainsi *lexicographiquement décortiquable*.

Perspectives

W groupe de Coxeter quelconque, w élément de Coxeter.

Conjecture

Le complexe d'intervalle K_W est un espace classifiant pour le groupe d'Artin dual W_w .

Conjecture

Le groupe d'Artin dual W_w est isomorphe au groupe d'Artin G_W .

Conjecture

Le complexe d'intervalle K_W a le même type d'homotopie que l'espace de configuration Y_W .

Merci !