# Compactification de Chabauty des espaces symétriques de type non compact

Thomas Haettel

Mémoire de seconde année de mastère sous la direction de
Frédéric Paulin

29 septembre 2008

# Introduction

L'objet de ce mémoire de seconde année de mastère est d'étudier la compactification de Chabauty des espaces symétriques de type non compact.

Un **espace symétrique** est une variété riemannienne telle qu'en tout point on puisse définir globalement la symétrie géodésique autour de ce point. La théorie des espaces symétriques a été initiée par Élie Cartan en 1926, et même si par définition celle-ci est purement riemannienne, elle fait intervenir de manière cruciale la théorie des groupes de Lie.

En effet, tout espace symétrique $X$ est isométrique à un quotient $G/K$, où $G$ est la composante neutre du groupe des isométries de $X$ muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche par $G$ et invariante à droite par le stabilisateur $K$ d'un point de $X$. Réciproquement, si $G$ est un groupe de Lie connexe, et $K$ un sous-groupe compact maximal de $G$ qui est l'ensemble des points fixes d'une involution de $G$, alors l'espace $G/K$, muni d'une métrique $G$-invariante, est un espace symétrique. Une référence très complète à propos des espaces symétriques est [Hel].

Les espaces symétriques qui nous intéressent sont ceux *de type non compact*, c'est-à-dire ceux qui sont simplement connexes, de courbure sectionnelle négative ou nulle, et qui n'ont pas de facteur euclidien, comme par exemple les espaces hyperboliques réels ou les variétés riemanniennes quotients $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, pour $n \geqslant 2$. Nous allons nous intéresser à la compactification de tels espaces, qui peut être faite par plusieurs constructions : la compactification conique, de Satake, de Furstenberg, de Chabauty, polyédrique, de Martin, de Karpelevic, etc. La référence de base au sujet de la compactification des espaces symétriques de type non compact est [GJT].

Si $G$ est un groupe topologique localement compact, l'espace $\mathcal{G}(G)$ des sous-groupes fermés de $G$ est muni de la *topologie de Chabauty* (voir la partie 4). Cette topologie fait de $\mathcal{G}(G)$ un espace compact, et métrisable pour la distance de Hausdorff pointée (si $G$ est métrisable). L'espace $\mathcal{G}(G)$ est en général difficile à expliciter : par exemple, pour le groupe $G = \mathbb{R}^2$, l'espace $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^4$ de dimension 4 (voir [PH]). Au sujet de la topologie de Chabauty, on pourra consulter [Cha], [CEG], [Bou] et [CDP].

Si $X$ est un espace symétrique de type non compact et si $G$ est la composante neutre du groupe des isométries de $X$, considérons l'application qui à un point de $X$ associe son stabilisateur dans l'espace $\mathcal{G}(G)$ des sous-groupes fermés de $G$. L'adhérence $\overline{X}^{\mathcal{G}}$ de l'image de $X$ par cette application est une compactification de $X$, appelée *compactification de Chabauty*. Nous allons décrire les sous-groupes fermés qui apparaissent lorsque l'on considère cette adhérence, appelés *groupes au bord*.

Soit $G$ un groupe de Lie semi-simple connexe, de centre fini et sans facteur compact. Nous renvoyons aux parties 1 et 2 pour des rappels, en particulier sur la terminologie qui suit. Soit $G = KAN$ une décomposition d'Iwasawa de $G$ et $X = G/K$, muni d'une métrique riemannienne $G$-invariante, l'espace symétrique de type non compact associé. L'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de $A$ est une sous-algèbre de Lie abélienne maximale de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $G$, elle définit un système de racines $\Sigma$, inclus dans le dual $\mathfrak{a}^*$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$. Choisissons une base $\Delta$ du système de racines défini par $\mathfrak{a}$ et la chambre de Weyl fermée associée $\overline{\mathfrak{a}^+}$. Notons de plus $M = Z_K(\mathfrak{a})$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $K$.

Pour toute partie propre $I \subsetneq \Delta$, notons $\mathfrak{a}_I = \cap_{\alpha \in I} \operatorname{Ker} \alpha$ et $\mathfrak{a}^I$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}_I$ dans $\mathfrak{a}$ pour la forme de Killing de $G$. Il existe un unique sous-groupe de Lie connexe $A^I$ de $G$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}^I$ (dont l'existence est à montrer), et notons $\overline{A^{I,+}} = A^I \cap \exp \overline{\mathfrak{a}^+}$.

Définissons alors le sous-groupe de Lie $G^I = D(Z(\mathfrak{a}_I))_0$, composante neutre du groupe dérivé du centralisateur de $\mathfrak{a}_I$ dans $G$, et $K^I = G^I \cap K$. Soit $\Sigma_I^+$ l'ensemble des racines positives qui ne sont pas combinaison linéaire des racines de $I$, posons $\mathfrak{n}_I$ la sous-algèbre de Lie somme directe des espaces de poids de $\Sigma_I^+$. Il existe un unique sous-groupe de Lie connexe $N_I$ de $G$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_I$.

Le théorème principal de ce mémoire est la description des groupes au bord de la compactification de Chabauty :

**Théorème.** *Soit $D \in \overline{X}^{\mathcal{G}} \backslash X$ un groupe au bord. Alors il existe $I$ une partie propre de $\Delta$, $a \in \overline{A^{I,+}}$ et $k \in K$ tels que*

$$D = kaK^I MN_I a^{-1} k^{-1}.$$

*De plus, cette écriture est unique au sens suivant : s'il existe $I_1, I_2$ deux parties propres de $\Delta$, $a_1 \in \overline{A^{I_1,+}}$, $a_2 \in \overline{A^{I_2,+}}$ et $k_1, k_2 \in K$ tels que*

$$k_1 a_1 K^{I_1} MN_{I_1} {a_1}^{-1} k_1^{-1} = k_2 a_2 K^{I_2} MN_{I_2} {a_2}^{-1} k_2^{-1},$$

*alors cela implique que*

$$I_1 = I_2 = I, a_1 = a_2 = a \text{ et } k_2^{-1} k_1 \in (K^I \cap aK^I a^{-1})M.$$

*Et la réciproque est vraie.*

Ce théorème a été démontré par [GJT], mais alors que dans cet ouvrage les auteurs se servent d'arguments de mesure, nous n'utilisons que des arguments de groupes de Lie. La compactification de Chabauty a en effet l'avantage de pouvoir se définir simplement, sans nécessiter de faire appel à la théorie des représentations ni aux frontières de Furstenberg. Il semble donc naturel d'étudier cette compactification avec des outils élémentaires.

Je tiens à remercier chaleureusement Frédéric Paulin pour sa disponibilité et ses conseils.

# Table des matières

# 1 Espaces symétriques de type non compact

Toutes les algèbres de Lie et tous les groupes de Lie considérés sont, sauf mention contraire, réels.

## 1.1 Décomposition de Cartan et décomposition polaire

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $B$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ et $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ la représentation adjointe. On rappelle que pour tous vecteurs $X, Y, Z$ de $\mathfrak{g}$, nous avons

$$B(X, \operatorname{ad} Y(Z)) = B(Y, \operatorname{ad} Z(X)) = B(Z, \operatorname{ad} X(Y)).$$

Et, pour tout automorphisme $\theta$ de $\mathfrak{g}$, et pour tous vecteurs $X, Y \in \mathfrak{g}$, nous avons

$$B(\theta(X), \theta(Y)) = B(X, Y).$$

On appelle *décomposition de Cartan* de $\mathfrak{g}$ toute décomposition de $\mathfrak{g}$ en somme directe vectorielle $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, où $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{p}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ tels que, si l'on note $\theta$ l'*involution de Cartan* :

$$\begin{array}{rcl} \theta : \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} & \rightarrow & \mathfrak{g} \\ X + Y & \mapsto & X - Y \end{array}$$

alors $\theta$ est un automorphisme de $\mathfrak{g}$ et la forme bilinéaire $B_\theta(X, Y) = -B(X, \theta(Y))$ est définie positive sur $\mathfrak{g}$. De plus, pour tous vecteurs $X, Y, Z$ de $\mathfrak{g}$, nous avons

$$B_\theta(X, \operatorname{ad} Y(Z)) = B_\theta(Y, \operatorname{ad} Z(X)) = B_\theta(Z, \operatorname{ad} X(Y)).$$

La proposition suivante est immédiate.

**Proposition 1.1.** *Une décomposition en somme directe vectorielle* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ *est une décomposition de Cartan si et seulement si :*
- *on a les inclusions :* $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ *et* $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$,
- *la forme de Killing de* $\mathfrak{g}$ *est définie négative sur* $\mathfrak{k}$, *et définie positive sur* $\mathfrak{p}$.

**Théorème 1.2.** *Toute algèbre de Lie semi-simple* $\mathfrak{g}$ *admet une décomposition de Cartan. De plus, les décompositions de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *sont conjuguées entre elles : si* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{p}'$ *sont deux décompositions de Cartan de* $\mathfrak{g}$, *il existe un élément* $g \in G$ *tel que* $\operatorname{Ad} g(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}'$ *et* $\operatorname{Ad} g(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}'$ *(voir [Hel, Theorem 7.1, p. 182]).*

**Remarque.** Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est une décomposition de Cartan, alors $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{p}$ sont en somme directe orhtogonale pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

**Exemple.** Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ l'algèbre de Lie des matrices réelles $n \times n$ de trace nulle, $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ des matrices antisymétriques et $\mathfrak{p}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ des matrices symétriques (de trace nulle). Alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$, et l'involution de Cartan associée est $\theta : Y \mapsto -{}^tY$. La forme de Killing $B(X, Y) = 2n \operatorname{tr}(XY)$ est bien symétrique définie positive sur $\mathfrak{p}$, et définie négative sur $\mathfrak{k}$.

Si $G$ est un groupe de Lie, nous noterons $\operatorname{Lie}(G)$ son algèbre de Lie et $\exp : \operatorname{Lie}(G) \to G$ son application exponentielle.

**Proposition 1.3.** *Soit $G$ un groupe de Lie semi-simple de centre fini ayant un nombre fini de composantes connexes, et soit $K$ un sous-groupe compact maximal de $G$, alors il existe une unique décomposition de Cartan de $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie}(G) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ telle que $\mathfrak{k} = \operatorname{Lie}(K)$ soit l'algèbre de Lie de $K$. De plus, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathfrak{p} \times K & \to & G \\ (X, k) & \mapsto & (\exp X)k \end{array}$$

*est un difféomorphisme, appelé décomposition polaire de $G$. Et, si on pose $P = \exp \mathfrak{p}$, alors $G = KP$ et l'application*

$$\begin{array}{rcl} \sigma : G = KP & \to & G \\ kp & \mapsto & kp^{-1} \end{array}$$

*est un automorphisme involutif de $G$, tel que $d\sigma_e$ soit l'involution de Cartan associée, et tel que $G^\sigma = \{g \in G, \sigma(g) = g\} = K$ (voir [OV, Theorem 2, p. 256]).*

**Corollaire 1.4.** *Sous les hypothèses de la proposition 1.3, le groupe $G$ est difféomorphe à $K \times \mathbb{R}^n$, où $n = \dim \mathfrak{p}$ (voir [OV, Corollary 1, p. 257]).*

**Exemple.** Pour $G = SL(n, \mathbb{R})$ et $K = SO(n, \mathbb{R})$, alors l'involution $\sigma$ de $G$ définie par $\sigma : g \mapsto {}^tg^{-1}$ est telle que $d\sigma_e = \theta : X \mapsto -\,{}^tX$ soit l'involution de Cartan de $\mathfrak{g}$.

**Proposition 1.5.** *Si $G$ est un groupe de Lie semi-simple de centre fini et ayant un nombre fini de composantes connexes, alors tous ses sous-groupes compacts maximaux sont conjugués (voir [OV, Theorem 3, p. 259]).*

## 1.2 Espaces symétriques

Une variété riemannienne connexe $M$ est appelée un *espace (globalement) symétrique* si tout point $p$ de $M$ est un point fixe isolé d'une isométrie involutive $s_p$ de $M$.

Remarquons que l'involution $s_p$ est alors unique, et qu'elle coïncide avec la symétrie géodésique au voisinage de $p$.

**Exemple.** Les sphères $\mathbb{S}^n$, les espaces hyperboliques réels $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ (au sujet de la géométrie hyperbolique, une référence assez complète est [Rat]) et les espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$ sont des espaces symétriques, ainsi que leurs produits riemanniens.

**Proposition 1.6.** *Un espace symétrique $M$ est géodésiquement complet, donc deux points de $M$ peuvent être joints par une géodésique minimale. De plus, l'espace métrique $M$ est complet.*

**Preuve.** En effet, l'existence d'une symétrie géodésique autour de chaque point de $M$, globalement définie, assure que toute géodésique peut être prolongée à $\mathbb{R}$ tout entier. D'après le théorème de Hopf-Rinow ([GHL, Theorem 2.103, p.96]), on en déduit que deux points de $M$ peuvent être joints par une géodésique minimale. D'après ([GHL, Corollary 2.105, p.98]), ceci implique que l'espace métrique $M$ est complet. $\square$

Si $M$ est une variété riemannienne, notons $\mathrm{Isom}(M)$ le groupe des isométries de $M$. On munit $\mathrm{Isom}(M)$ de la topologie compacte ouverte, dont une prébase d'ouverts est fournie par les parties $W(C,U) = \{g \in \mathrm{Isom}(M) : g \cdot C \subset U\}$, où $C$ est un compact de $M$ et $U$ un ouvert de $M$. Notons de plus $\mathrm{Isom}_0(M)$ la composante neutre de $\mathrm{Isom}(M)$.

**Proposition 1.7.** *Si $M$ est un espace symétrique, il existe une unique structure de groupe de Lie sur* $\mathrm{Isom}(M)$ *compatible avec la topologie compacte ouverte (voir [Hel, Lemma 3.2, p. 205])*

Si $\sigma$ est un automorphisme d'un groupe de Lie $G$, notons $G^\sigma$ l'ensemble de ses points fixes.

Les propositions suivantes montrent comment passer d'un espace symétrique à son groupe d'isométries, et vice versa.

**Proposition 1.8.** *Soit $M$ un espace symétrique, et fixons un point $p_0$ de $M$. Posons $G = \mathrm{Isom}_0(M)$, $K = \{g \in G, g.p_0 = p_0\}$ le fixateur du point $p_0$ et $\sigma : G \to G$ le morphisme $g \mapsto s_{p_0} g s_{p_0}$. Alors $G$ est un groupe de Lie connexe,*

*$\sigma$ est une involution de $G$ et $K$ est un sous-groupe compact de $G$ tel que $(G^\sigma)_0 \subset K \subset G^\sigma$. De plus, l'application suivante est un difféomorphisme :*

$$\begin{array}{rcl} G/K & \to & M \\ gK & \mapsto & g \cdot p_0. \end{array}$$

*En particulier, l'action de $G$ sur $M$ est transitive. (voir [Hel, Theorem 3.3, p. 208]).*

**Proposition 1.9.** *Soient $G$ un groupe de Lie connexe, $\sigma$ une involution de $G$ et $K$ un sous-groupe compact de $G$ tel que $(G^\sigma)_0 \subset K \subset G^\sigma$. Alors pour toute structure riemannienne $G$-invariante sur $G/K$ (et il en existe), $G/K$ est un espace symétrique. (voir [Hel, Proposition 3.4, p. 209]).*

**Exemple.** Ces propositions sont illustrées par les exemples des sphères $\mathbb{S}^n = \mathrm{SO}(n{+}1,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, des espaces hyperboliques réels $\mathbb{H}^n_\mathbb{R} = \mathrm{SO}_0(n,1)/\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ et des espaces euclidiens $\mathbb{R}^n = \mathrm{Isom}_+(\mathbb{R}^n)/\mathrm{SO}(n)$.

Soit $G$ un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini et $K$ un sous-groupe compact maximal de $G$. Alors, d'après la proposition 1.3, si on note $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan associée à $K$, l'application

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathfrak{p} & \to & G/K \\ X & \mapsto & (\exp X)K \end{array}$$

est un difféomorphisme de $\mathfrak{p}$ sur $G/K$ : en particulier, l'espace symétrique $G/K$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, où $n = \dim \mathfrak{p}$.

## 1.3 Espaces symétriques de type non compact

Un espace symétrique $M$ est dit *de type non compact* si sa courbure sectionnelle est partout négative ou nulle, et si le revêtement universel $\widetilde{M}$ de $M$ n'admet pas de facteur de De Rham euclidien (i.e. $\widetilde{M}$ n'est pas le produit riemannien d'une variété riemannienne $M'$ et d'un espace euclidien $\mathbb{R}^n$, avec $n \geqslant 1$).

**Exemple.** Les espaces hyperboliques réels $\mathbb{H}^n_\mathbb{R}$ sont des espaces symétriques de type non compact car de courbure constante strictement négative, le produit riemannien de deux espaces symétriques de type non compact est encore de type non compact.

On dit qu'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ est *sans facteur compact* si $\mathfrak{g}$ n'admet pas d'*idéal compact* (i.e. un idéal $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{g}$ tel que la forme de Killing $B|_{\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}}$ soit définie négative) autre que $\{0\}$. On dit qu'un groupe de Lie semi-simple $G$ est *sans facteur compact* si son algèbre de Lie est sans facteur compact.

**Proposition 1.10.** *Si $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont deux algèbres de Lie sans facteur compact, alors la somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ est sans facteur compact.*

**Preuve.** Soit $\mathfrak{i}$ un idéal compact de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, alors $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{g}_1$ est un idéal compact de $\mathfrak{g}_1$, donc $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{g}_1 = \{0\}$. Or $[\mathfrak{i}, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{i} \cap \mathfrak{g}_1$ donc $\mathfrak{i}$ commute avec $\mathfrak{g}_1$. De même, $\mathfrak{i}$ commute avec $\mathfrak{g}_2$. Ainsi, $\mathfrak{i}$ est un idéal abélien de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ : puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple, nous avons $\mathfrak{i} = \{0\}$. □

**Proposition 1.11.** *Un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini $G$ est sans facteur compact si et seulement si $G$ n'a pas de sous-groupe compact distingué infini.*

**Preuve.** Supposons que $G$ soit sans facteur compact, et soit $K$ un sous-groupe compact distingué de $G$. Alors l'algèbre de Lie de $K$ est un idéal compact de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $G$, donc $K$ a pour algèbre de Lie $\{0\}$. Le groupe $K$ est discret et compact, donc fini.

Réciproquement, supposons que $G$ n'a pas de sous-groupe compact distingué infini. Soit $\mathfrak{k}$ un idéal compact de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{k}$ est une algèbre de Lie semi-simple, donc d'après [Hel, Proposition 6.6, p. 132], si l'on note $\mathrm{Int}(\mathfrak{k})$ (resp. $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$) le sous-groupe de Lie immergé connexe de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ d'algèbre de Lie $\mathrm{ad}\,\mathfrak{k}$ (resp. $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$), alors $\mathrm{Int}(\mathfrak{k})$ est un sous-groupe compact du groupe de Lie $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Or, d'après [Hel, Corollary 5.2, p. 129], le morphisme $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ a pour noyau le centre de $G$, et pour image $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Puisque le morphisme Ad est de noyau fini, le sous-groupe $K = \mathrm{Ad}^{-1}\,\mathrm{Int}(\mathfrak{k})$ est un sous-groupe compact de $G$. Or la composante neutre $K_0$ de $K$ a pour algèbre de Lie l'idéal $\mathfrak{k}$, donc $K_0$ est distingué : par hypothèse, $K_0$ est fini donc $\mathfrak{k} = \{0\}$. □

Les propositions suivantes montrent quelles hypothèses mettre sur $G$ et $K$ pour que $G/K$ soit un espace symétrique de type non compact :

**Proposition 1.12.** *Soient $G$ un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini et sans facteur compact, $\sigma$ une involution de $G$ telle que $d\sigma_e$ soit une involution de Cartan de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $G$, et $K$ un sous-groupe compact de $G$ tel que $(G^\sigma)_0 \subset K \subset G^\sigma$. Alors, pour toute structure riemannienne $G$-invariante sur $G/K$, l'espace $G/K$ est un espace symétrique de type non compact.*

**Preuve.** Par définition, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $G$ est sans facteur compact et semi-simple, donc la paire $(\mathfrak{g}, d\sigma_e)$ est de type non compact au sens de [Hel, Definition, p. 230]. La paire $(G, K)$ est associée à la paire $(\mathfrak{g}, d\sigma_e)$, donc est également de type non compact. D'après le théorème 3.1 page 241 de [Hel], pour toute structure riemannienne $G$-invariante sur $M = G/K$, la courbure sectionnelle de $M$ est négative ou nulle.

Supposons que le revêtement universel $\widetilde{M}$ de $M$ soit le produit riemannien d'une variété riemannienne $M'$ et d'un espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Notons Alors le sous-groupe des translations de $\mathbb{R}^n$ est connexe, fournirait un sous-groupe distingué abélien connexe, ce qui contredit la semi-simplicité de $G$. Donc $M$ est un espace symétrique de type non compact. □

**Proposition 1.13.** *Soit $M$ un espace symétrique de type non compact. Alors $G = \mathrm{Isom}_0(M)$ est un groupe de Lie connexe semi-simple, de centre trivial et sans facteur compact (voir [Hel, Exercise 5, p. 250]).*

**Preuve.** D'après la fin du paragraphe § 1.2, $M$ est simplement connexe, donc d'après la proposition 2.1.1 p. 69 de [Ebe], $G$ est semi-simple, de centre trivial et sans facteur compact. □

**Proposition 1.14.** *Soit $G$ est un groupe de Lie connexe semi-simple, de centre trivial et sans facteur compact, et $K$ est un sous-groupe compact maximal de $G$. Alors, pour tout métrique riemannienne $G$-invariante sur l'espace $G/K$, le groupe $G$ s'identifie canoniquement à la composante neutre $\mathrm{Isom}_0(G/K)$ du groupe des isométries de $G/K$.*

**Preuve.** D'après le théorème 4.1 p. 243 de [Hel], il suffit de montrer que l'action de $G$ sur $G/K$ est fidèle : soit $g \in G$ tel que pour tout $g'K \in G/K$, nous avons $gg'K = g'K$, i.e. $g \in g'Kg'^{-1}$. Donc $g \in \cap_{g' \in G} g'Kg'^{-1}$, or $\cap_{g' \in G} g'Kg'^{-1}$ est un sous-groupe distingué compact de $G$, donc $g = e$. □

**Proposition 1.15.** *Sous l'hypothèse de centre trivial, les deux constructions précédentes sont inverses l'une de l'autre : il revient au même de se donner un groupe de Lie connexe semi-simple, de centre trivial et sans facteur compact et se donner un espace symétrique de type non compact (aux facteurs multiplicatifs près sur chacun des facteurs de De Rham de $M$). De plus, choisir un sous-groupe compact $K$ de $G$ revient à choisir un point base de l'espace symétrique $M$.*

**Exemple.** L'espace $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ est un espace symétrique de type non compact. Une métrique riemannienne $G$-invariante sur $SL(n, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R})$ est donnée sur l'espace tangent en $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, isomorphe à $\mathfrak{p}$, par $B_\theta(X, Y) = 2n \operatorname{tr}(XY)$, et cette métrique est transportée par translation à gauche. L'importance de cet exemple est justifiée par la partie 2.2.

# 2 Décompositions de l'algèbre de Lie et du groupe de Lie

Dans toute cette partie, $G$ désigne un groupe de Lie connexe semi-simple, de centre fini, et $K$ un sous-groupe compact maximal.

Notons de plus $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $G$, $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de $K$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan associée, et $\theta$ l'involution de Cartan.

**Proposition 2.1.** *Si $X \in \mathfrak{g}$, l'adjoint de $\operatorname{ad} X$ pour le produit scalaire $B_\theta$ est $-\operatorname{ad} \theta X$. Ainsi, les éléments de $\operatorname{ad} \mathfrak{p}$ sont symétriques et les éléments de $\operatorname{ad} \mathfrak{k}$ sont antisymétriques.*

**Preuve.** Soit $X \in \mathfrak{g}$. Si $Y, Z \in \mathfrak{g}$, alors

$$\begin{aligned} B_\theta(Y, \operatorname{ad} X(Z)) &= -B(Y, \theta([X, Z])) \\ &= -B(Y, [\theta X, \theta Z]) \\ &= -B(\theta Z, [Y, \theta X]) \\ &= B([Y, \theta X], \theta Z) \\ &= -B([\theta X, Y], \theta Z) \\ &= B_\theta(-\operatorname{ad}(\theta X)Y, Z). \end{aligned}$$

Donc les formes linéaires $B_\theta(Y, \operatorname{ad} X)$ et $-B_\theta(-\operatorname{ad}(\theta X)Y, .)$ coïncident sur $\mathfrak{g}$, ce qui signifie que l'adjoint de $\operatorname{ad} X$ est $-\operatorname{ad} \theta X$. $\square$

## 2.1 La décomposition en espaces de racines

Choisissons $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ abélienne maximale dans $\mathfrak{p}$. D'après la proposition 2.1, les éléments de $\operatorname{ad} \mathfrak{a} \subset \operatorname{ad} \mathfrak{p}$ sont des endomorphismes de $\mathfrak{g}$ symétriques par rapport au produit scalaire $B_\theta$, donc diagonalisables sur $\mathbb{R}$, qui commutent. Par conséquent, $\operatorname{ad} \mathfrak{a}$ est "codiagonalisable" : si l'on note $\mathfrak{a}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{a}$, définissons le système de racines (restreint) associé à $\mathfrak{a}$ :

$$\Sigma = \{\alpha \in \mathfrak{a}^* \backslash \{0\} : \exists Y \in \mathfrak{g} \backslash \{0\}, \forall H \in \mathfrak{a}, \operatorname{ad} H(Y) = \alpha(H)Y\}.$$

Ce système fournit une décomposition de $\mathfrak{g}$ en espaces de racines :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha$$

où on a posé $\mathfrak{g}_\alpha = \{Y \in \mathfrak{g}, \forall H \in \mathfrak{a}, \operatorname{ad} H(Y) = \alpha(H)Y\}$ et $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ est le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{a}$. De plus, si l'on pose $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ le centralisateur dans $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{a}$, alors $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$.

Voici comment cette décomposition se comporte par rapport au crochet de Lie : soient $\alpha, \beta \in \Sigma$. Alors

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \begin{cases} \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \text{ si } \alpha+\beta \in \Sigma \cup \{0\} \\ = 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

De plus, l'automorphisme $\theta$ vérifie $\theta|_{\mathfrak{a}} = -\operatorname{id}|_{\mathfrak{a}}$ et $\theta|_{\mathfrak{m}} = \operatorname{id}|_{\mathfrak{m}}$. Et pour toute racine $\alpha \in \Sigma$, nous avons $\theta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Soit $X = X_0 + \Sigma_{\alpha\in\Sigma} X_\alpha$ la décomposition en espaces de racines d'un élément de $\mathfrak{g}$. Si $X \in \mathfrak{k}$, alors $\theta(X_\alpha) = X_{-\alpha}$ pour toute racine $\alpha \in \Sigma$. Si $X \in \mathfrak{p}$, alors $\theta(X_\alpha) = -X_{-\alpha}$ pour toute racine $\alpha \in \Sigma$.

Enfin, si $\alpha, \beta \in \Sigma$ sont deux racines telles que $\alpha + \beta \neq 0$, alors $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_\beta$ sont orthogonaux par rapport à $B$. Donc les espaces de racines $\mathfrak{g}_\alpha$, pour $\alpha \in \Sigma$, sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire $B_\theta$. De plus l'espace $\mathfrak{g}_0$ est orthogonal (pour $B_\theta$) aux espaces $\mathfrak{g}_\alpha$, pour $\alpha \in \Sigma$, et la décomposition $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ est orthogonale (pour $B_\theta$). En conclusion, la décomposition suivante est orthogonale pour le produit scalaire $B_\theta$ :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Sigma} \mathfrak{g}_\alpha.$$

**Exemple.** Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{p}$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de trace nulle, on peut choisir pour $\mathfrak{a}$ la sous-algèbre des matrices diagonales. Dans ce cas, le système de racines est

$$\Sigma = \{\alpha_{i,j} : H \mapsto H_{i,i} - H_{j,j}, \forall i, j \in [[1, n]], i \neq j\}$$

et, pour $i, j \in [[1, n]]$, avec $i \neq j$, nous avons $\mathfrak{g}_{\alpha_{i,j}} = \operatorname{Vect}(E_{i,j})$, où $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ désigne la base canonique de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Et $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}$ dans ce cas particulier.

**Proposition 2.2.** *Toutes les sous-algèbres abéliennes maximales de $\mathfrak{g}$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$ sont conjuguées par un élément de $\operatorname{Ad} G$, et si on en choisit une $\mathfrak{a}$, il existe une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ telle que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. L'unique entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{a} \simeq \mathbb{R}^r$ est appelé le rang (réel) de $\mathfrak{g}$ (voir [OV, Problem 1, p. 269]).*

**Proposition 2.3.** *Les sous-algèbres abéliennes maximales de $\mathfrak{p}$ sont conjuguées par $K$, et tout vecteur de $\mathfrak{p}$ est contenu dans une sous-algèbre abélienne maximale : ainsi, $\mathfrak{p} = \cup_{k\in K} \operatorname{Ad} k(\mathfrak{a})$ (voir [Hel, Lemma 6.3, p. 247]).*

**Exemple.** Le rang de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ est $n - 1$, le rang de $\mathrm{SO}_0(n, 1)$ est 1 et le rang de $\mathrm{SO}_0(p, q)$ est $\min(p, q)$.

On appelle les composantes connexes de $\mathfrak{a}\setminus\cup_{\alpha\in\Sigma}\operatorname{Ker}\alpha$ les *chambres de Weyl* (vectorielles, ouvertes) de $\mathfrak{a}$. On appelle *base* du système de racines $\Sigma$ une partie $\Delta\subset\Sigma$ telle que toutes les racines de $\Sigma$ s'expriment de manière unique comme combinaison linéaire à coefficients entiers, tous de même signe, des racines de la base $\Delta$.

Choisissons une chambre de Weyl $\mathfrak{a}^+$, que l'on appellera chambre de Weyl *positive*. On dit alors qu'une racine $\alpha\in\Sigma$ est *positive* si $\alpha|_{\mathfrak{a}^+}\geqslant 0$ (resp. *négative* si $\alpha|_{\mathfrak{a}^+}\leqslant 0$). Notons $\Sigma^+$ (resp. $\Sigma^-=\Sigma\setminus\Sigma^+$) l'ensemble des racines positives (resp. négatives). Soit $\Delta$ l'ensemble des racines $\alpha\in\Sigma$ positives, ne pouvant pas s'écrire $\alpha=\beta+\gamma$, avec $\beta$ et $\gamma$ des racines positives. Alors $\Delta$ est une base du système de racines $\Sigma$, et toute base s'obtient de la même manière grâce au choix d'une chambre de Weyl positive : si $\Delta$ système de racines de $\mathfrak{a}$, la chambre de Weyl positive associée est

$$\mathfrak{a}^+=\{X\in\mathfrak{a}\,:\,\forall\alpha\in\Delta,\alpha(X)>0\}.$$

Posons $M'=N_K(\mathfrak{a})$ le normalisateur de $\mathfrak{a}$ dans $K$ et $M=Z_K(\mathfrak{a})$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $K$. Alors le *groupe de Weyl* $W=M'/M$ agit simplement transitivement sur les chambres de Weyl, ainsi que sur les bases du système de racines $\Sigma$.

**Remarque.** Le groupe $M=Z_K(\mathfrak{a})$ a pour algèbre de Lie $\mathfrak{m}=\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$.

**Exemple.** Pour $G=\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ et $K=\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, on peut choisir pour chambre de Weyl positive $\mathfrak{a}^+=\{H\in\mathfrak{a},H_{1,1}>H_{2,2}>\ldots>H_{n,n}\}$. Ceci correspond au choix de la base $\Delta=\{\alpha_{i,i+1},i\in[[1,n-1]]\}$. De plus, $M'$ est égal au sous-groupe des matrices ayant exactement un coefficient non nul par ligne et par colonne, égal à $\pm1$, et $M$ est égal au sous-groupe des matrices diagonales ayant des $\pm1$ sur la diagonale. Ainsi, $W\simeq\mathfrak{S}_n$ est isomorphe au sous-groupe des matrices de permutations.

Notons $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}^-$ les sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ définies par $\mathfrak{n}=\oplus_{\alpha\in\Sigma^+}\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{n}^-=\oplus_{\alpha\in\Sigma^-}\mathfrak{g}_\alpha$, ce sont bien des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ d'après les relations 1. On peut alors écrire la décomposition $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{n}^-$. De plus, les algèbres de Lie $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}^-$ sont nilpotentes.

**Exemple.** Pour $G=\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ et $K=\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, avec les choix précédents,

$$\mathfrak{n}=\left\{\begin{pmatrix}0&*&\cdots&*\\ \vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&*\\ 0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}\right\}\text{ et }\mathfrak{a}=\left\{\begin{pmatrix}a_1&0&\cdots&0\\ 0&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&0\\ 0&\cdots&0&a_n\end{pmatrix},\sum_{i=1}^n a_i=0\right\}.$$

## 2.2 Le plongement dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$

Cette partie justifie l'importance de l'exemple de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ : on montre qu'on peut plonger l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ de manière compatible avec la décomposition d'Iwasawa.

**Proposition 2.4.** *Il existe une base orthonormée pour $B_\theta$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ telle que :*
- *les matrices de* $\mathrm{ad}\,\mathfrak{a}$ *soient diagonales ;*
- *les matrices de* $\mathrm{ad}\,\mathfrak{k}$ *soient antisymétriques ;*
- *les matrices de* $\mathrm{ad}\,\mathfrak{n}$ *soient triangulaires supérieures strictes ;*
- *les matrices de* $\mathrm{ad}\,\mathfrak{p}$ *soient symétriques.*

**Preuve.** (voir par exemple [Hel, Lemma VI.3.5, p. 261]) Soient $\alpha_1, ..., \alpha_m$ les racines de $\Sigma^+$ ordonnées telles que si $\alpha_j - \alpha_i \in \Sigma^+$, alors $i < j$. Choisissons pour chaque $i \in [[1,m]]$ une base orthonormée $(E_{i,1}, ..., E_{i,d_i})$ de $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$ pour le produit scalaire $B_\theta(X,Y) = -B(X,\theta(Y))$ : ainsi, $(\theta(E_{i,1}), ..., \theta(E_{i,d_i}))$ est une base orthonormée de $\theta(\mathfrak{g}_{\alpha_i}) = \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$. Choisissons de plus une base orthonormée $(F_1, ..., F_l)$ de $\mathfrak{g}_0$ adaptée à la décomposition en somme orthogonale $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$. Formons ainsi

$$\mathcal{B} = (E_{1,1}, ..., E_{m,d_m}, F_1, ..., F_l, \theta(E_{m,d_m}), ..., \theta(E_{1,1})).$$

La famille $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{g}$, montrons qu'elle convient :

D'après la proposition 2.1, les éléments de $\mathrm{ad}\,\mathfrak{k}$ sont antisymétriques, or la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, donc les matrices de $\mathrm{ad}\,\mathfrak{k}$ sont antisymétriques. De même, les matrices de $\mathrm{ad}\,\mathfrak{p}$ sont symétriques.

Soit $X \in \mathfrak{a}$. Alors pour tout vecteur $E_{i,j}$ de la base $\mathcal{B}$, $\mathrm{ad}\,X(E_{i,j}) = \alpha_i(X)E_{i,j}$ et $\mathrm{ad}\,X(\theta(E_{i,j})) = -\alpha_i(X)E_{i,j}$ ; et pour tout vecteur $F_i$ de la base, $\mathrm{ad}\,X(F_i) = 0$. Donc la matrice de $\mathrm{ad}\,X$ est diagonale.

Soit $X \in \mathfrak{n}$ : d'après la décomposition $\mathfrak{n} = \oplus_{k=1}^m \mathfrak{g}_{\alpha_k}$, on peut écrire $X = \sum_{k=1}^m X_{\alpha_k}$. Alors pour tout vecteur $E_{i,j}$ de la base $\mathcal{B}$, nous avons $\mathrm{ad}\,X(E_{i,j}) = \sum_{k=1}^m \mathrm{ad}\,X_{\alpha_k}(E_{i,j})$. Or $[X_{\alpha_k}, E_{i,j}] \in \mathfrak{g}_{\alpha_k+\alpha_i}$, et $\alpha_k + \alpha_i > \alpha_i$, donc $\mathrm{ad}\,X(E_{i,j}) \in \oplus_{\alpha>\alpha_i}\mathfrak{g}_\alpha$. Et $[X_{\alpha_k}, \theta(E_{i,j})] \in \mathfrak{g}_{\alpha_k-\alpha_i}$ donc $\mathrm{ad}\,X(\theta(E_{i,j})) \in \oplus_{\alpha>-\alpha_i}\mathfrak{g}_\alpha$. Enfin, pour tout vecteur $F_i$ de la base $\mathcal{B}$, $\mathrm{ad}\,X_{\alpha_k}(F_i) \in \mathfrak{g}_{\alpha_k}$ donc $\mathrm{ad}\,X(F_i) \in \mathfrak{n}$. On a donc montré que la matrice de $\mathrm{ad}\,X$ dans la base $\mathcal{B}$ était triangulaire supérieure stricte.
□

De plus, voici ce que l'on peut dire du plongement du point de vue riemannien. On dit qu'une variété riemannienne $M$ est *réductible* si elle admet un revêtement riemannien fini $M'$ qui peut s'écrire comme produit riemannien $M' = M_1 \times M_2$ de deux variétés riemanniennes de dimensions supérieures ou égales à 1. Si une variété $N$ n'est pas réductible, on dit qu'elle est *irréductible*.

**Théorème 2.5** (Décomposition de De Rham)**.** *Toute variété riemannienne simplement connexe $M$ s'écrit comme produit riemannien $M = M_0 \times \ldots \times M_n$, où $M_0$ est un espace euclidien, et où pour tout $i \in [[1, n]]$ la variété $M_i$ est irréductible et non euclidienne. De plus, cette décomposition est unique à permutation des facteurs $M_i$ ($i \in [[1, n]]$) près, ainsi qu'à leurs isométries près. Les facteurs sont appelés facteurs de De Rham de la variété $M$ (voir [Ebe, § 1.2, p. 12])*

**Proposition 2.6.** *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sans facteur compact. Alors il existe une base de $\mathfrak{g}$ telle que, pour la représentation adjointe $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, le groupe $\mathrm{Ad}(G)$ soit un sous-groupe autoadjoint de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. De plus, l'application $G/K \to \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ définie par $gK \mapsto \mathrm{Ad}(g)\,\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ est un difféomorphisme bien défini sur une sous-variété complète totalement géodésique de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$. De plus, la métrique sur chaque facteur de De Rham de $G/K$ coïncide avec la métrique tirée en arrière de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, à une constante multiplicative près (voir [Ebe, théorème 2.6.5, p. 76]).*

## 2.3 Décomposition d'Iwasawa

**Proposition 2.7.** *Il existe des uniques sous-groupes de Lie de $G$ connexes $A$, $N$ et $N^-$, d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}^-$. De plus, l'exponentielle réalise un difféomorphisme de $\mathfrak{a}$ sur $A$, de $\mathfrak{n}$ sur $N$ et de $\mathfrak{n}^-$ sur $N^-$.*

**Preuve.** Supposons d'abord $G$ de centre trivial, ce qui permet d'identifier $G$ avec $\mathrm{Ad}(G) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. D'après le paragraphe précédent, les éléments de $\mathrm{ad}\,\mathfrak{a}$ sont symétriques par rapport au produit scalaire $B_\theta$ sur $\mathfrak{g}$. Or on sait que l'exponentielle de matrices réalise un difféomorphisme de l'algèbre de Lie des matrices diagonales réelles sur le groupe des matrices diagonales à diagonale strictement positive, donc l'exponentielle $\exp_{\mathrm{Ad}(G)} : \mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \to \mathrm{Ad}(G)$ réalise un difféomorphisme de $\mathrm{ad}\,\mathfrak{a}$ sur son image D'après [Hel, Corollary 6.5, p. 132], puisque le groupe $G$ est semi-simple, le groupe $\mathrm{Ad}(G)$ est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{Aut}(G)$, donc est aussi un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. Posons $A = \mathrm{Ad}^{-1}(\exp(\mathrm{ad}\,\mathfrak{a}))$, alors $A$ est un sous-groupe fermé de $G$, donc un sous-groupe de Lie d'après le théorème de Cartan. Par ailleurs $\mathrm{Lie}(\mathrm{Ad}\,A) = \mathrm{ad}\,\mathfrak{a}$, or puisque $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Ad}\,G$ et $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ sont des difféomorphismes, l'exponentielle $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ réalise un difféomorphisme de $\mathfrak{a}$ sur $A$, donc $A$ a pour algèbre de Lie $\mathfrak{a}$.

De même, d'après la proposition 2.4, les éléments de $\mathrm{ad}\,\mathfrak{n}$ peuvent être représentés par des matrices triangulaires supérieures strictes. Or l'exponentielle de matrices réalise un difféomorphisme de l'algèbre de Lie des matrices triangulaires supérieures strictes sur le groupe des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale, donc si on pose $N = \mathrm{Ad}^{-1}(\exp(\mathrm{ad}\,\mathfrak{n}))$, alors $N$ est un sous-groupe de Lie de $G$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$. Même chose pour $N^-$.

Dans le cas général où $G$ est de centre $Z$ fini, $G/Z$ est de centre trivial : soient donc $A$, $N$ et $N^-$ les sous-groupes de Lie de $G/Z$ construits ci-dessus. Notons $A'$ (resp. $N'$, $N'^-$) le sous-groupe immergé de $G$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}^-$). Remarquons que le revêtement $G \to G/Z$ envoie surjectivement $A'$ sur $A$ (resp. $N'$ sur $N$, $N'^-$ sur $N^-$). Donc $A'$ (resp. $N'$, $N'^-$) est un sous-groupe localement fermé de $G$ : il est ainsi fermé, c'est donc un sous-groupe de Lie de $G$. $\square$

**Exemple.** Pour $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ et $K = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, avec les choix précédents,

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{et } A = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \prod_{i=1}^{n} a_i = 1 \text{ et } \forall i \in [[1, n]], a_i > 0 \right\}.$$

**Théorème 2.8** (Décomposition d'Iwasawa)**.** *L'application $K \times A \times N \to G$ définie par $(k, a, n) \mapsto kan$ est un difféomorphisme (voir [OV, Theorem 6, p. 275])*

**Remarque.** On peut aussi écrire la décomposition d'Iwasawa $G = NAK$, ou bien $G = KAN^-$.

**Proposition 2.9.** *Le groupe $A$ normalise le groupe $N$, et le produit $S = AN$ est résoluble.*

**Preuve.** Il est clair que $[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$, or les groupes $A$ et $N$ sont connexes, donc le groupe $A$ normalise le groupe $N$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ étant nilpotente, l'algèbre de Lie $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ est résoluble, donc le groupe de Lie $S = AN$ est résoluble. $\square$

L'application $NA \to G/K$ définie par $na \mapsto naK$ est un difféomorphisme. Si $gK \in G/K$ est un point de l'espace symétrique, on appelle l'unique couple $(n, a) \in N \times A$ tel que $naK = gK$ les *coordonnées horocycliques* de ce point. Celles-ci dépendent du choix du sous-groupe compact maximal $K$ de $G$ ou, de manière équivalente, du choix d'un point base dans l'espace symétrique.

**Exemple.** Pour $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et $K = \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$, l'espace symétrique $G/K$ muni d'une métrique riemannienne $G$-invariante (à constante multiplicative près), s'identifie au le plan hyperbolique réel $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, dans le modèle du demi-plan de Poincaré, par l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ par homographies sur $\mathbb{R}^2$. On a en effet pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \cdot i = x + iy.$$

De plus, l'action vectorielle de $\mathrm{SO}(2)$ sur le demi-plan est irréductible, donc la métrique $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-invariante sur le demi-plan est unique, à constante multiplicative près.

Définissons $A^+ = \exp(\mathfrak{a}^+)$ la chambre de Weyl (ouverte) positive de $A$, et notons $\overline{\mathfrak{a}^+}$ et $\overline{A^+}$ (les adhérences dans $\mathfrak{g}$ et $G$) les chambres de Weyl fermées.

**Théorème 2.10** (Décomposition de Cartan $K\overline{A^+}K$)**.** *Tout élément $g$ de $G$ s'écrit $g = k_1 a k_2$, où $k_1, k_2 \in K$ et $a \in \overline{A^+}$. De plus, l'élément $a \in \overline{A^+}$ est uniquement déterminé par $g$ (voir [Hel, Theorem 1.1, p. 402]).*

## 2.4 "Découpage" de l'espace symétrique selon une partie de la base

Rappelons que la forme de Killing $B$ sur $\mathfrak{g}$ est définie positive sur $\mathfrak{p}$, donc sur $\mathfrak{a}$ : ainsi, $B$ définit un isomorphisme de $\mathfrak{a}$ sur $\mathfrak{a}^*$ par $X \mapsto \{Y \mapsto B(Y,X)\}$. Pour tout $\alpha \in \Sigma$, soit $H_\alpha$ l'unique élément de $\mathfrak{a}$ tel que pour tout $H \in \mathfrak{a}$, on ait $\alpha(H) = B(H, H_\alpha)$.

Fixons une base $\Delta$ du système de racines $\Sigma$ associé à $\mathfrak{a}$, et choisissons une partie $I$ de la base $\Delta$.

Définissons $\mathfrak{a}^I$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{a}$ engendré par les $H_\beta$, pour $\beta \in I$, et définissons $\mathfrak{a}_I$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}^I$ dans $\mathfrak{a}$ pour la forme de Killing. Ainsi, $\mathfrak{a}_I = \{H \in \mathfrak{a}, \forall \beta \in I, \beta(H) = 0\} = \cap_{\beta \in I} \operatorname{Ker} \beta$. Remarquons que $\dim \mathfrak{a}^I = \operatorname{Card} I$.

**Exemple.** Pour $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ et $K = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, avec $\Delta$ le système de racines précédemment défini, en prenant $I = \{\alpha_{i,i+1}, \alpha_{j,j+1}\}$, où $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ :

$$\mathfrak{a}^I = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 I_i I_i & 0 & 0 \\ 0 & a_2 I_{j-i} & 0 \\ 0 & 0 & a_3 I_{n-j} \end{pmatrix} : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\}$$

$$\text{et } \mathfrak{a}_I = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{a} : a_i = a_{i+1} \text{ et } a_j = a_{j+1} \right\}$$

où $I_k$ désigne la matrice identité de taille $k \times k$. De plus, puisque la forme de Killing est donnée pour tous $X, Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ par $B(X, Y) = 2n \,\mathrm{tr}(XY)$, on en déduit que pour tous $1 \leqslant i < j \leqslant n$, nous avons $H_{\alpha_{i,j}} = \frac{1}{2n}(E_{i,i} - E_{j,j})$ (où $(E_{k,l})$ désigne la base canonique de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$).

Ce choix d'une partie $I$ définit également une partition de l'ensemble des racines $\Sigma$ : soit $\Sigma^I$ l'ensemble des racines qui sont combinaison linéaire (à coefficients entiers) d'éléments de $I$. Nous avons également

$$\Sigma^I = \{\alpha \in \Sigma, \forall H \in \mathfrak{a}_I, \alpha(H) = 0\}.$$

Désignons par $p : \mathfrak{a}^* \to (\mathfrak{a}^I)^*$ le morphisme de restriction à $\mathfrak{a}^I$. Alors la projection $p(\Sigma^I)$ est un système de racines de $(\mathfrak{a}^I)^*$, qui admet pour base $p(I)$.

- Le système $p(\Sigma^I)$ est une partie finie de $(\mathfrak{a}^I)^* \backslash \{0\}$.
- Le système $p(\Sigma^I)$ engendre $(\mathfrak{a}^I)^*$.
- Pour toutes racines $p(\alpha), p(\beta) \in p(\Sigma^I)$, nous avons
$$\frac{2B(p(\alpha), p(\beta))}{B(p(\beta), p(\beta))} = \frac{2B(\alpha, \beta)}{B(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}$$
car $\Sigma$ est un système de racines.
- Pour toutes racines $p(\alpha), p(\beta) \in p(\Sigma^I)$, nous avons
$$p(\alpha) - \frac{2B(p(\alpha), p(\beta))}{B(p(\beta), p(\beta))} p(\beta) = p(\alpha - \frac{2B(\alpha, \beta)}{B(\beta, \beta)} \beta) \in p(\Sigma^I)$$
car $\Sigma^I$ est l'ensemble des combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de $I$.

Définissons de plus $\Sigma_I = \Sigma \backslash \Sigma^I$ le complémentaire de $\Sigma^I$. Ce n'est pas a priori un système de racines. Notons encore $\Sigma^{I,\pm} = \Sigma^I \cap \Sigma^\pm$ et $\Sigma_I^\pm = \Sigma_I \cap \Sigma^\pm$.

Ceci définit également une décomposition de $\mathfrak{n}$ en somme directe $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^I \oplus \mathfrak{n}_I$, où $\mathfrak{n}^I = \oplus_{\alpha \in \Sigma^{I,+}} \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{n}_I = \oplus_{\alpha \in \Sigma_I^+} \mathfrak{g}_\alpha$. De plus, $\mathfrak{n}^I$ et $\mathfrak{n}_I$ sont des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{n}$, et $[\mathfrak{n}^I, \mathfrak{n}_I] \subset \mathfrak{n}_I$ : ceci provient de la relation $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ valable pour toutes racines $\alpha$ et $\beta$, et du fait que $\Sigma^I$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des racines de $I$.

**Exemple.** Pour $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ et $K = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, en prenant comme ci-dessus $I = \{\alpha_{i,i+1}, \alpha_{j,j+1}\}$, où $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ :

$$\mathfrak{n}^I = \left\{ \begin{pmatrix} T_i & 0 & 0 \\ 0 & T_{j-i} & 0 \\ 0 & 0 & T_{n-j} \end{pmatrix} \in \mathfrak{a} \right\}$$

$$\text{et } \mathfrak{n}_I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a} \right\}$$

où les blocs sont de dimensions respectives $i$, $j-i$ et $n-j$, et où $T_i \in \mathfrak{gl}(i, \mathbb{R})$ désigne une matrice triangulaire supérieure stricte quelconque.

**Proposition 2.11.** *Il existe des sous-groupes de Lie de $G$ connexes $A^I$, $A_I$, $N^I$, $N_I$ uniques d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{a}^I$, $\mathfrak{a}_I$, $\mathfrak{n}^I$ et $\mathfrak{n}_I$. Nous avons les inclusions $A^I \subset A$, $A_I \subset A$, $N^I \subset N$ et $N_I \subset N$. De plus, l'exponentielle de chacun de ces quatre sous-groupes est surjective. Par ailleurs, le groupe $A$ normalise $N_I$ et $N^I$, les groupes $N^I$ et $A_I$ commutent. Le groupe $N_I$ est distingué dans $N$, et $N = N_I N^I$.*

**Preuve.** En utilisant la même démonstration que celle de la proposition 2.7, on montre l'existence de ces quatre sous-groupes de Lie, ainsi que la surjectivité des exponentielles.

Soient $a \in A$ et $n \in N^I$, montrons que $ana^{-1} \in N^I$ : soient $H \in \mathfrak{a}$ et $Y \in \mathfrak{n}^I$ tels que $a = \exp H$ et $n = \exp Y$. Alors $ana^{-1} = \exp(\operatorname{Ad} a(Y))$. La décomposition en somme directe $\mathfrak{n}^I = \oplus_{\alpha \in \Sigma^{I,+}} \mathfrak{g}_\alpha$ fournit une décomposition de $Y$ : $Y = \oplus_{\alpha \in \Sigma^{I,+}} Y_\alpha$. Alors $\operatorname{Ad} a(Y) = \oplus_{\alpha \in \Sigma^{I,+}} \operatorname{Ad} a(Y_\alpha)$, or $\operatorname{Ad} a(Y_\alpha) = \exp(\operatorname{ad} H)(Y_\alpha) = e^{\alpha(H)} Y_\alpha$. Donc $\operatorname{Ad} a(Y) \in \mathfrak{n}^I$, puis $ana^{-1} \in N^I$ : $A$ normalise $N^I$. On montre de même que $A$ normalise $N_I$.

Les groupes $N^I$ et $A_I$ commutent : soient $n \in N^I$, $a \in A_I$, $Y \in \mathfrak{n}^I$ et $H \in \mathfrak{a}_I$ tels que $a = \exp H$ et $n = \exp Y$. Alors $ana^{-1} = \exp(\operatorname{Ad} a(Y))$, or d'après la décomposition en somme directe $\mathfrak{n}^I = \oplus_{\alpha \in \Sigma^{I,+}} \mathfrak{g}_\alpha$, on peut écrire $Y = \oplus_{\alpha \in \Sigma^{I,+}} Y_\alpha$. Ainsi $\operatorname{Ad} a(Y) = \oplus_{\alpha \in \Sigma^{I,+}} \exp(\operatorname{ad} H)(Y_\alpha) = \oplus_{\alpha \in \Sigma^{I,+}} Y_\alpha = Y$ car $H \in \mathfrak{a}_I$ donc pour tout $\alpha \in \Sigma^I$, $\alpha(H) = 0$.

Le groupe $N^I$ normalise $N_I$ : ceci provient du fait que si $\alpha \in \Sigma^I$ et $\beta \in \Sigma_I$, $\alpha + \beta \in \Sigma_I$, donc $[\mathfrak{n}^I, \mathfrak{n}_I] \subset \mathfrak{n}_I$. Puis, par surjectivité de l'exponentielle de $N^I$ et de $N_I$, on en déduit que le groupe $N^I$ normalise $N_I$. Enfin nous avons $N = N_I N^I$ : soit $n \in N$, et soit $Y = \log n \in \mathfrak{n}$. Écrivons alors la décomposition $Y = Y_I + Y^I$ de $Y$ selon $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_I \oplus \mathfrak{n}^I$. Nous avons alors $n = \exp Y = (\exp(Y_I + Y^I) \exp(-Y^I)) \exp(Y^I)$. Or l'élément $\exp(Y^I)$ appartient à $N^I$, et d'après la formule de Campbell-Baker-Hausdorff (voir [Ebe, Theorem 1.13.17, p. 61]), on déduit que l'élément $\exp(Y_I + Y^I) \exp(-Y^I)$ appartient à $N_I$ (car $[\mathfrak{n}^I, \mathfrak{n}_I] \subset \mathfrak{n}_I$). Ainsi, $N$ est égal au produit semi-direct $N_I \rtimes N^I$. □

On définit de manière analogue $\Sigma^{I,-}$, $\Sigma_I^-$, $N^{I,-}$ et $N_I^-$. Nous avons alors des propriétés semblables.

**Proposition 2.12.** *L'exponentielle de $N^{I,-}$ et $N_I^-$ est surjective. Par ailleurs, le groupe $A$ normalise $N_I^-$ et $N^{I,-}$, les groupes $N^{I,-}$ et $A_I$ commutent. Le groupe $N_I^-$ est distingué dans $N$, et $N = N_I^- N^{I,-}$.*

**Proposition 2.13.** *L'algèbre dérivée* $\mathfrak{g}^I = \mathfrak{d}(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}_I))$ *du centralisateur* $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}_I)$ *dans* $\mathfrak{g}$ *de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{a}_I$ *est une sous-algèbre semi-simple de* $\mathfrak{g}$.

**Preuve.** (voir [GJT, Proposition II.2.10, p. 17])

Posons $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}_I)$, $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{z}$ pour $B_\theta$. Commençons par montrer que $[\mathfrak{z}, \mathfrak{z}^\perp] \subset \mathfrak{z}^\perp$ : soient $X, U \in \mathfrak{z}$ et $Y \in \mathfrak{z}^\perp$. Alors

$$\begin{aligned} B_\theta(U, [X,Y]) &= -B(U, [\theta(X), \theta(Y)]) \\ &= +B([U, \theta(X)], \theta(Y)) \\ &= -B_\theta([U, \theta(X)], Y) = 0 \end{aligned}$$

car, puisque $\mathfrak{a}_I$ est $\theta$-invariant, $\mathfrak{z}$ est $\theta$-invariant donc $[U, \theta(X)] \in \mathfrak{z}$.

Comme $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}^\perp$ sont $\theta$-invariants, on peut trouver une base de $\mathfrak{g}$ adaptée à la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{z}^\perp$, orthonormale pour $B_\theta$. D'après la proposition 2.1, dans cette base, $\operatorname{ad}\mathfrak{k}$ est représentée par des matrices antisymétriques et $\operatorname{ad}\mathfrak{p}$ par des matrices symétriques.

Soit $X \in \mathfrak{z} \cap \mathfrak{k}$. Alors, puisque $\operatorname{ad} X(\mathfrak{z}^\perp) \subset \mathfrak{z}^\perp$, la matrice de $\operatorname{ad} X$ est antisymétrique et diagonale par blocs (dans la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{z}^\perp$), ce qui implique que $(\operatorname{ad} X)|_{\mathfrak{z}} = 0$ équivaut à $(\operatorname{ad} X)^2|_{\mathfrak{z}} = 0$. Donc, si $B_{\mathfrak{z}}$ désigne la forme de Killing de $\mathfrak{z}$, alors $B_{\mathfrak{z}}(X, X) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X)^2|_{\mathfrak{z}} \leqslant 0$ et $B_{\mathfrak{z}}(X, X) = 0$ si et seulement si $(\operatorname{ad} X)|_{\mathfrak{z}} = 0$, ce qui équivaut à $X \in \mathfrak{c}$. Donc $B_{\mathfrak{z}}$ est définie négative sur $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{c}^\perp$.

Soit $X \in \mathfrak{z} \cap \mathfrak{p}$. Alors, puisque $\operatorname{ad} X(\mathfrak{z}^\perp) \subset \mathfrak{z}^\perp$, la matrice de $\operatorname{ad} X$ est symétrique et diagonale par blocs, ce qui implique que $(\operatorname{ad} X)|_{\mathfrak{z}} = 0$ équivaut à $(\operatorname{ad} X)^2|_{\mathfrak{z}} = 0$. Donc $B_{\mathfrak{z}}(X, X) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X)^2|_{\mathfrak{z}} \geqslant 0$ et $B_{\mathfrak{z}}(X, X) = 0$ si et seulement si $(\operatorname{ad} X)|_{\mathfrak{z}} = 0$, ce qui équivaut à $X \in \mathfrak{c}$. Donc $B_{\mathfrak{z}}$ est définie positive sur $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{p} \cap \mathfrak{c}^\perp$.

En conclusion, puisque $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{p}$ sont orthogonaux pour $B$ donc pour $B_{\mathfrak{z}}$, la forme bilinéaire $B_{\mathfrak{z}}$ est non dégénérée sur $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{c}^\perp$. Ainsi, l'algèbre de Lie $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{c}^\perp$ est semi-simple. Montrons enfin que $\mathfrak{g}^I = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{c}^\perp$ : soient $X, Y \in \mathfrak{z}$, si $Z \in \mathfrak{c}$, alors $B_\theta([X,Y], Z) = B_\theta([Y,Z], X) = 0$, donc $[X, Y] \in \mathfrak{c}^\perp$. Ceci montre que $\mathfrak{g}^I \subset \mathfrak{z} \cap \mathfrak{c}^\perp$. Par ailleurs, puisque $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{c}^\perp$ est semi-simple, $\mathfrak{d}(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{c}^\perp) = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{c}^\perp$ donc $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{c}^\perp \subset \mathfrak{d}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{g}^I$. Ainsi $\mathfrak{g}^I$ est semi-simple.

□

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^I$ contient $\mathfrak{a}^I \oplus \mathfrak{n}^I$. Plus précisément, $\mathfrak{a}^I = \mathfrak{g}^I \cap \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}^I = \mathfrak{g}^I \cap \mathfrak{n}$. Posons $\mathfrak{k}^I = \mathfrak{g}^I \cap \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{p}^I = \mathfrak{g}^I \cap \mathfrak{p}$. Puisque $\mathfrak{a}^I \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}_I)$ est stable par l'involution de Cartan $\theta$, donc $\mathfrak{g}^I$ également : ainsi, $\mathfrak{g}^I = \mathfrak{k}^I \oplus \mathfrak{p}^I$ est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}^I$, d'involution $\theta|_{\mathfrak{g}^I}$. Si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Lie abélienne telle que $\mathfrak{a}^I \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}^I$, puisque $\mathfrak{p}^I \subset \mathfrak{g}^I \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{a}_I)$, alors $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_I$ est une sous-algèbre abélienne incluse dans $\mathfrak{p}$, contenant $\mathfrak{a}$ : par maximalité de $\mathfrak{a}$, nous avons $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^I$. Ainsi, $\mathfrak{a}^I$ est une sous-algèbre de Lie abélienne de $\mathfrak{g}^I$ incluse dans $\mathfrak{p}^I$ maximale.

Par ailleurs, les racines de $\mathfrak{g}^I$ par rapport à $\mathfrak{a}^I$ sont les restrictions à $\mathfrak{a}^I$ des racines de $\Sigma^I$ : soit $\alpha$ une racine de $\mathfrak{g}^I$ par rapport à $\mathfrak{a}^I$. Etendons $\alpha$ en une forme linéaire $\beta$ sur $\mathfrak{a}$, grâce à la décomposition $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^I \oplus \mathfrak{a}_I$, en posant $\beta|_{\mathfrak{a}^I} = \alpha$ et $\beta|_{\mathfrak{a}_I} = 0$. Alors $\beta$ est une racine de $\Sigma^I$. Réciproquement, si $\beta$ est une racine de $\Sigma^I$, alors sa restriction à $\mathfrak{a}^I$ est non nulle et c'est bien une racine pour $\mathfrak{g}^I$ par rapport à $\mathfrak{a}^I$. De plus, les projections orthogonales sur $\mathfrak{a}^I$ des chambres de Weyl de $\mathfrak{a}$ sont les chambres de Weyl de $\mathfrak{a}^I$ : ainsi, choisissons comme chambre de Weyl positive de $\mathfrak{a}^I$ la projection $\mathfrak{a}^{I,+}$ de la chambre de Weyl positive $\mathfrak{a}^+$.

Le centralisateur $\mathfrak{m}^I = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}^I}(\mathfrak{a}^I)$ de $\mathfrak{a}^I$ dans $\mathfrak{k}^I$ est égal à $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{k}^I$ : l'inclusion $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{k}^I \subset \mathfrak{m}^I$ est claire, et tout élément de $\mathfrak{k}^I \subset \mathfrak{g}^I$ centralise $\mathfrak{a}_I$, ce qui fournit la seconde inclusion.

La décomposition en espaces de racines de $\mathfrak{g}^I$ associée à $\mathfrak{a}^I$ est donc

$$\mathfrak{g}^I = \mathfrak{a}^I \oplus \mathfrak{m}^I \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^I} \mathfrak{g}_\alpha$$

où $\mathfrak{g}_\alpha$ est l'espace correspondant à la racine $\alpha|_{\mathfrak{a}^I}$ de $\mathfrak{g}^I$.

Posons $G^I = D(Z_G(\mathfrak{a}_I))_0$ la composante neutre du groupe dérivé du centralisateur dans $G$ de $\mathfrak{a}_I$ (pour l'action adjointe).

**Proposition 2.14.** *Le sous-groupe de Lie connexe $G^I$ a pour algèbre de Lie $\mathfrak{g}^I$, et est donc semi-simple.*

**Preuve.** L'algèbre de Lie de $G^I$ est égale à celle de $D(Z_G(\mathfrak{a}_I))$, donc est égale à la dérivée de l'algèbre de Lie de $Z_G(\mathfrak{a}_I)$, laquelle coïncide avec le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{a}_I$. Donc l'algèbre de Lie de $G^I$ est égale à $\mathfrak{d}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_I)) = \mathfrak{g}^I$. □

Posons $K^I = G^I \cap K$, c'est un sous-groupe de Lie compact de $G^I$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}^I$.

**Théorème 2.15.** *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$. Soit $G$ un groupe de Lie connexe, de centre fini, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $K$ un sous-groupe de Lie compact de $G$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ et $\sigma$ une involution de Cartan de $G$ telle que $(G^\sigma)_0 \subset K \subset G^\sigma$. Alors $K$ est un sous-groupe connexe, et compact maximal dans $G$, et de plus $K$ contient le centre de $G$.*

**Preuve.** (voir [Hel, Theorem 1.1, p. 252])

Notons $K_0$ la composante neutre de $K$. Alors $(G^\sigma)_0 \subset K_0 \subset G^\sigma$, donc d'après la proposition 1.9, $G/K_0$ est un espace symétrique. D'après la proposition 1.6, pour toute structure riemannienne $G$-invariante sur $G/K_0$, la variété riemannienne $G/K_0$ est complète. D'après [Hel, Proposition 10.5, p. 58], l'application exponentielle Exp en tout point de la variété $G/K_0$ est surjective. Or, d'après [Hel, équation (3), p. 212], si $\pi$ désigne la projection canonique $\pi : G \to G/K_0$, pour tout $X \in \mathfrak{p}$, nous avons $\pi(\exp X) = \mathrm{Exp}(d\pi(X))$. Or $d\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est la projection sur $\mathfrak{p}$ parallèlement à $\mathfrak{k}$, donc l'application $\phi : \mathfrak{p} \to G/K_0$ définie par $X \mapsto \exp(X)K_0$ est surjective. Ainsi, l'application $\psi : \mathfrak{p}\times K \to G$ définie par $(X,k) \mapsto \exp(X)k$ vérifie $\psi(\mathfrak{p}\times K_0) = G$.

Soient $X_1, X_2 \in \mathfrak{p}$, $k_1, k_2 \in K$ tels que $\exp(X_1)k_1 = \exp(X_2)k_2$. Alors $\exp(\operatorname{ad} X_1)\circ \operatorname{Ad}(k_1) = \exp(\operatorname{ad} X_2) \circ \operatorname{Ad}(k_2)$. Or les éléments de $\operatorname{Ad}(K)$ sont orthogonaux pour le produit scalaire $B_\theta$ (où $\theta = d_e\sigma$) : soit $k \in K$, alors puisque $K \subset G^\sigma$, nous avons $\theta \circ \operatorname{Ad}(k) = \operatorname{Ad}(k) \circ \theta$, donc

$$B_\theta(\operatorname{Ad}(k)(.), \operatorname{Ad}(k)(.)) = -B(\operatorname{Ad}(k)(.), \operatorname{Ad}(k) \circ \theta(.)) = B_\theta(.,.).$$

Par ailleurs, d'après la proposition 2.1, les éléments de $\operatorname{ad}\mathfrak{p}$ sont symétriques. Par unicité de la décomposition polaire matricielle, on en déduit que $\exp(\operatorname{ad} X_1) = \exp(\operatorname{ad} X_2)$ et $\operatorname{Ad}(k_1) = \operatorname{Ad}(k_2)$. Or l'exponentielle est un difféomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives, donc $\operatorname{ad} X_1 = \operatorname{ad} X_2$. De plus $\mathfrak{g}$ a un centre trivial, donc $X_1 = X_2$. Enfin, puisque $\exp(X_1)k_1 = \exp(X_2)k_2$, on conclut que $k_1 = k_2$. Donc l'application $\psi$ est surjective, ce qui implique que $K = K_0$ : ainsi, $K$ est connexe. Si $K'$ est un sous-groupe de Lie compact maximal de $G$ contenant $K$, alors d'après la proposition 1.3, il existe une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ dont la partie "compacte" soit $\operatorname{Lie}(K')$. Or, d'après le corollaire 1.4, les décompositions de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées entre elles, donc $\operatorname{Lie}(K') = \mathfrak{k}$. Il existe donc une involution de Cartan $\sigma'$ de $G$ telle que $G^{\sigma'} = K'$. D'après le début de la démonstration, $K'$ est alors connexe, donc $K = K'$ : le sous-groupe $K$ est donc compact maximal dans $G$. □

D'après le théorème qui précède, le sous-groupe $K$ est connexe. De plus $\mathfrak{g}^I = \mathfrak{k}^I \oplus \mathfrak{p}^I$ est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}^I$, donc le sous-groupe $K^I$ est connexe et est un sous-groupe compact maximal de $G^I$.

Les sous-groupes de $G^I$, $A^I$ et $N^I$, satisfont les hypothèses de la proposition 2.7, donc la décomposition d'Iwasawa pour $G^I$ s'écrit $G^I = K^I A^I N^I$.

Lorsque $I = \emptyset$, alors $A^I = \{e\}$, $N^I = \{e\}$, $A_I = A$, $N_I = N$, $G^I = \{e\}$ et $K^I = \{e\}$.

Lorsque $I = \Delta$, alors $A^I = A$, $N^I = N$, $A_I = \{e\}$, $N_I = \{e\}$, $G^I = G$ et $K^I = K$.

**Exemple.** Pour $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ et $K = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, en prenant $I = \{\alpha_{i,i+1}, \alpha_{j,j+1}\}$, où $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ :

$$\mathfrak{g}^I = \left\{ \begin{pmatrix} X_i & 0 & 0 \\ 0 & X_{j-i} & 0 \\ 0 & 0 & X_{n-j} \end{pmatrix} : X_k \in \mathfrak{sl}(k,\mathbb{R}) \right\},$$

$$\mathfrak{k}^I = \left\{ \begin{pmatrix} U_i & 0 & 0 \\ 0 & U_{j-i} & 0 \\ 0 & 0 & U_{n-j} \end{pmatrix} : U_k \in \mathfrak{so}(k,\mathbb{R}) \right\}$$

$$\text{et } \mathfrak{p}^I = \left\{ \begin{pmatrix} X_i & 0 & 0 \\ 0 & X_{j-i} & 0 \\ 0 & 0 & X_{n-j} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) : X_k \in \mathrm{Sym}(k,\mathbb{R}) \right\},$$

où les blocs sont de dimensions respectives $i$, $j-i$ et $n-j$, et où $\mathrm{Sym}(k,\mathbb{R})$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{gl}(k,\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques.

Supposons maintenant que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est sans facteur compact, ce qui implique d'après la proposition 1.12 que l'espace symétrique $G/K$ est de type non compact.

**Proposition 2.16.** *L'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}^I$ est sans facteur compact.*

**Preuve.** Soit $\mathfrak{i}$ un idéal de $\mathfrak{g}^I$ tel que $B|_{\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}}$ soit définie négative, montrons que $\mathfrak{i} = \{0\}$. Notons $\mathfrak{j}$ l'idéal de $\mathfrak{g}$ engendré par $\mathfrak{i}$. Alors $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{k}$, or $[\mathfrak{k},\mathfrak{p}] = \{0\}$, donc $[\mathfrak{i},\mathfrak{p}] = \{0\}$. Ainsi, l'idéal $\mathfrak{j}$ est inclus dans $\mathfrak{k}$, donc $B|_{\mathfrak{j}\times\mathfrak{j}}$ est définie négative. Comme par hypothèse l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est sans facteur compact, nous avons $\mathfrak{j} = \{0\}$ donc $\mathfrak{i} = \{0\}$. □

**Proposition 2.17.** *L'espace $G^I/K^I$ est un espace symétrique de type non compact, et s'identifie à l'orbite dans $G/K$ du point $K$ par le sous-groupe $G^I$, par l'application $gK^I \mapsto gK$.*

**Exemple.** Pour $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ et $K = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, prenons $I = \{\alpha_{i,i+1}, \alpha_{j,j+1}\}$, où $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$. Alors l'espace symétrique de type non compact $G^I/K^I$ est isométrique au produit $\mathrm{SL}(i,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(i,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(j-i,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(j-i,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(n-j,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n-j,\mathbb{R})$ (à une constante multiplicative près sur la métrique de chacun des facteurs).

## 2.5 Un exemple : $\mathrm{SO}_0(p,p)/\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(p)$

Soit $G = \mathrm{SO}_0(p,p)$ la composante neutre du groupe orthogonal pour une forme quadratique (réelle) de signature $(p,p)$, où $p$ est un entier supérieur ou égal à 2. C'est un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini, égal à $\{\mathrm{Id}\}$ si $p$ est impair et à $\{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$ si $p$ est pair.

Choisissons pour matrice de la forme quadratique la matrice carrée de taille $2p$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \iddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors les éléments de $G$, vu comme sous-groupe de $\mathrm{SL}(2p,\mathbb{R})$, sont exactement les matrices $X$ telles que ${}^tXJX = J$. De plus, l'algèbre de Lie

$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p,p)$ de $G$ est constituée des matrices $X$ de $\mathfrak{sl}(2p,\mathbb{R})$ telles que ${}^tXJ + JX = 0$. Puisque $J^2 = 1$, on peut aussi écrire :

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{sl}(2p,\mathbb{R}) : J{}^tXJ = -X\}.$$

Donc l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est constituée des matrices antisymétriques par rapport à la deuxième diagonale. En raison de cette symétrie, pour tout entier $i \in [[1, 2p]]$, nous noterons $\bar{i} = 2p + 1 - i$ son "symétrique".

Posons $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ le morphisme d'algèbres de Lie défini par $X \mapsto -{}^tX$, et notons $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{so}(2p)$ l'ensemble des points fixes par $\theta$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \cap \mathrm{Sym}(2p)$ l'ensemble des vecteurs propres pour la valeur $-1$ (où $\mathrm{Sym}(2p)$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{gl}(2p,\mathbb{R})$ des matrices symétriques). Alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$. La forme de Killing sur $\mathfrak{g}$ est donnée par $B(X,Y) = 2p\,\mathrm{tr}(XY)$.

Notons $\mathfrak{a}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ constitué des matrices diagonales : c'est une sous-algèbre de Lie abélienne maximale de $\mathfrak{g}$. Une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$ est donnée par les matrices $H_i = E_{i,i} - E_{\bar{i},\bar{i}}$, pour $i \in [[1,p]]$ (où $(E_{i,j})_{i,j}$ désigne la base canonique de $\mathfrak{gl}(2p,\mathbb{R})$). Notons $(\beta_i)_{i \in [[1,p]]}$ la base duale de cette base. La forme linéaire $\beta_i$ est l'application qui à une matrice diagonale $H \in \mathfrak{a}$ associe $H_{i,i} - H_{\bar{i},\bar{i}}$.

Définissons les vecteurs suivants, pour $1 \leqslant i < j \leqslant p$.

$$\begin{array}{rcl} X_{\beta_i-\beta_j} & = & E_{i,j} - E_{\bar{j},\bar{i}} \\ X_{-(\beta_i-\beta_j)} & = & E_{j,i} - E_{\bar{i},\bar{j}} \\ X_{\beta_i+\beta_j} & = & E_{i,\bar{j}} - E_{j,\bar{i}} \\ X_{-(\beta_i+\beta_j)} & = & E_{\bar{j},i} - E_{\bar{i},j} \end{array}$$

Alors le vecteur $X_\alpha$ est de poids $\alpha$.

Le système de racines $\Sigma$ de $\mathfrak{g}$ associé à la sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{a}$ est

$$\Sigma = \{\beta_i - \beta_j : i,j \in [[1,p]], i \neq j\} \cup \{\beta_i + \beta_j : i,j \in [[1,p]], i \neq j\}.$$

L'espace de racine correspondant à une racine $\alpha \in \Sigma$ est $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{R}X_\alpha$. De plus, le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ est égal à $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}$.

Posons $\alpha_i = \beta_i - \beta_{i+1}$ pour $i \in [[1, p-1]]$ et $\alpha_p = \beta_{p-1} + \beta_p$. Alors l'ensemble $(\alpha_i)_{i \in [[1,p]]}$ est une base du système de racines $\Sigma$. Les racines positives correspondantes sont

$$\Sigma^+ = \{\beta_i - \beta_j : i,j \in [[1,p]], i < j\} \cup \{\beta_i + \beta_j : i,j \in [[1,p]], i < j\}.$$

La chambre de Weyl positive (vectorielle) associée est

$$\mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a} : H_{1,1} > \ldots > H_{p,p} > 0\}.$$

L'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{n} = \oplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha$ est égale à la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ constituée des matrices strictement triangulaires supérieures. Le sous-groupe de Lie connexe $A$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ est

$$A = \{\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_p, a_p^{-1}, \ldots, a_1^{-1}) : \forall i \in [[1,p]], a_i \in \,]0, +\infty[\,\}.$$

Le sous-groupe de Lie connexe $N$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ est le sous-groupe de $G$ constitué des matrices triangulaires supérieures, avec des 1 sur la diagonale.

Le sous-groupe de Lie compact maximal de $G$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ est $K = G \cap \mathrm{SO}(2p)$. Pour voir que le groupe $K$ est isomorphe à $\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(p)$, il est plus clair de changer la matrice de la forme quadratique de signature $(p,p)$, en prenant

$$J' = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$$

où $I_p$ désigne la matrice identité de $\mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$. Alors l'application suivante est un isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(p) & \rightarrow & K \\ (X, Y) & \mapsto & \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}. \end{array}$$

Si $H$ est un sous-groupe compact distingué de $G$, alors $H$ est inclus dans un conjugué de $K$, or $H$ est distingué donc $H \subset K$. De plus, $K$ est isomorphe au groupe $\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(p)$. Alors $H \cap (\mathrm{SO}(p) \times \{1\})$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{SO}(p) \times \{1\}$, or $\mathrm{PSO}(p)$ est simple, donc $H \cap (\mathrm{SO}(p) \times \{1\})$ est égal à $\{1\} \times \{1\}$, $\{\pm 1\} \times \{1\}$ ou $\mathrm{SO}(p) \times \{1\}$). Idem sur le deuxième facteur, donc $H$ est isomorphe au produit $H_1 \times H_2$, où $H_i$ est égal à $\{1\}$, $\{\pm 1\}$ ou $\mathrm{SO}(p)$. Or dès que $H_i = \mathrm{SO}(p)$, le groupe $H$ n'est pas distingué dans $G$ car le groupe $\mathrm{SO}(p,p)$ est simple, donc $H$ est fini. Ainsi le groupe $G$ est sans facteur compact, donc l'espace symétrique $G/K$ est de type non compact, de rang la dimension de $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire $p$.

En choisissant comme matrice $J'$ pour la forme quadratique, l'appartenance à $\mathrm{SO}(p,p)$ s'exprime à l'aide des blocs de taille $p \times p$

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(p,p) & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix} J' \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = J' \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} {}^tAA - {}^tCC = I_p \\ {}^tAB - {}^tCD = 0 \\ {}^tBB - {}^tDD = -I_p \end{array} \right. \end{array}$$

Ceci implique que la matrice $A$ est définie positive, donc inversible. Ainsi $\det A$ est de signe constant sur chacune des deux composantes connexes de $\mathrm{SO}(p,p)$, et $\det A > 0$ sur $\mathrm{SO}_0(p,p)$ car $I_{2p} \in \mathrm{SO}_0(p,p)$. Or la matrice $\mathrm{Diag}(-1,1,\ldots,1,-1)$ appartient à $\mathrm{SO}(p,p)$, et son premier bloc $p\times p$ est de déterminant $-1$. Ceci permet donc de décrire les éléments de $\mathrm{SO}_0(p,p)$ : soit $X \in \mathrm{SO}(p,p)$, alors

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_0(p,p) \Longleftrightarrow \det A > 0.$$

Une matrice de passage de la forme quadratique $J$ à la forme $J'$ est

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_p & I'_p \\ I'_p & -I_p \end{pmatrix}$$

où $I'_p$ désigne la matrice de $\mathrm{GL}(p,\mathbb{R})$ ayant des 1 sur la deuxième diagonale et des 0 ailleurs.

Le centralisateur $M = Z_K(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{a}$ dans $K$ est égal à

$$M = \{\mathrm{Diag}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p,\varepsilon_p,\ldots,\varepsilon_1) : \forall i \in [[1,p]], \varepsilon_i = \pm 1 \text{ et } \Pi_{i\in[[1,p]]}\, \varepsilon_i = 1\}. \quad (2)$$

La conidition imposée assure que les éléments considérés sont bien dans la composante neutre $G = \mathrm{SO}_0(p,p)$ de $\mathrm{SO}(p,p)$.

On remarque que, dans ce cas particulier également, les espaces de racines $\mathfrak{g}_\alpha$ sont tous de dimension 1, et le groupe $M$ est fini, mais ce n'est pas toujours le cas.

# 3 Compactifications d'un espace symétrique

## 3.1 Définitions

Soit $X$ un espace topologique localement compact. Une *compactification* de $X$ est la donnée d'une paire $(K, i)$, où $K$ est un espace topologique compact et $i : X \to K$ est un plongement (i.e. $i$ réalise un homéomorphisme sur son image) d'image dense. On identifie souvent $X$ et $i(X)$ par l'application $i$. On appelle *bord* de $X$ l'espace $\partial X = K \backslash i(X)$. Si $H$ est un groupe agissant continûment sur $X$, on dit que c'est une *$H$-compactification* si l'action de $H$ sur $i(X)$, conjuguée par $i$ de l'action de $H$ sur $X$, s'étend continûment à $K$. Cette extension est alors unique.

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $X$ est *fuyante* si elle sort de tout compact de $X$.

**Proposition 3.1.** *Si $K$ est métrisable, le bord $\partial X$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites fuyantes de $X$, et l'image $i(X)$ est ouverte dans $K$.*

**Preuve.** (voir [Rém, § 2, p. 3]) Identifions $X$ et $i(X)$, et choisissons une distance $d$ sur $K$ induisant la topologie de $K$. Un point de $X$ a un voisinage compact, et ne peut donc être valeur d'adhérence d'une suite fuyante. Soit $x \in \partial X$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $X$ convergeant vers $x$. Si $F$ est un compact de $X$, c'est également un compact de $K$, il est donc à distance strictement positive de $x$ : ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'appartient pas à $F$ à partir d'un certain rang.

Supposons qu'il existe $x \in \overline{K\backslash X} \cap X$. Soit $r > 0$ tel que la boule fermée $\overline{B}_X(x, r)$ dans $X$ soit un voisinage compact de $x$ dans $X$. Par hypothèse, il existe $y \in (K\backslash X) \cap \overline{B}_K(x, \frac{r}{2})$. Or $X$ est dense dans $K$, il existe donc une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $K$ convergeant vers $y$. D'après le début de la preuve, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fuyante, donc en particulier sort du compact $\overline{B}_X(x, r)$ à partir d'un certain rang, ce qui implique que $d(y_n, y) \geqslant d(y_n, x) - d(x, y) \geqslant \frac{r}{2}$ à partir d'un certain rang. Ceci contredit la convergence de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $y$. $\square$

Deux compactifications $(K_1, i_1)$ et $(K_2, i_2)$ de $X$ sont dites *isomorphes* s'il existe un homéomorphisme $\phi : K_1 \to K_2$ tel que $\phi \circ i_1 = i_2$. Si ce sont des $H$-compactifications, on dit qu'elles sont *$H$-isomorphes* si de plus $\phi$ est $H$-équivariante.

On dit qu'une compactification $(K_1, i_1)$ *domine* une compactification $(K_2, i_2)$ s'il existe une application continue surjective $\phi : K_1 \to K_2$ telle que $\phi \circ i_1 = i_2$.

## 3.2 La compactification conique

La compactification conique pouvant se définir dans le cadre plus général des espaces CAT(0), nous allons nous intéresser à ceux-ci. Une référence assez complète pour les espaces CAT(0) notamment est [BH].

Un espace métrique $X$ est dit géodésique si par toute paire de points de $X$ passe une géodésique.

Un espace métrique géodésique $X$ est appelé CAT(0) si, pour tout triangle géodésique $pqr$ dans $X$, et pour tous points $x \in [pq]$, $y \in [pr]$, si l'on désigne par $\overline{pqr}$ le triangle euclidien de comparaison, et si $\overline{x} \in [\overline{pq}]$ et $\overline{y} \in [\overline{pr}]$ sont les points de comparaison dans ce triangle (voir figure 1), alors

$$d(x, y) \leqslant d(\overline{x}, \overline{y}).$$

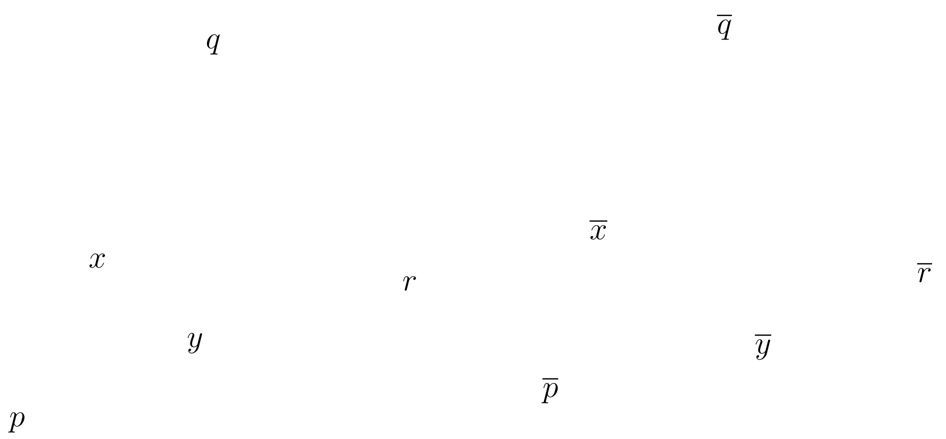


FIG. 1 – L'inégalité CAT(0)

**Proposition 3.2.** *Un espace métrique* CAT(0) $X$ *est uniquement géodésique, c'est-à-dire que par deux points distincts de* $X$ *passe une unique géodésique (voir [BH, Proposition 1.4, p. 160]).*

**Théorème 3.3** (Cartan)**.** *Si* $X$ *est une variété riemannienne de courbure sectionnelle négative ou nulle, alors* $X$ *est un espace* CAT(0) *(voir [BH, Theorem 1A.6, p. 173]).*

Un espace symétrique de type non compact est donc un espace CAT(0), donc d'après la proposition 3.2 est uniquement géodésique.

**Proposition 3.4.** *Soit* $X$ *est un espace métrique* CAT(0) *complet et* $Y \subset X$ *un ensemble borné. Alors il existe un unique point* $c \in X$*, appelé centre de* $Y$*, tel que* $Y$ *soit inclus dans la boule fermée de centre* $c$*, de rayon égal au rayon de* $Y$*. Autrement dit,* $c$ *est l'unique centre de la plus petite boule fermée contenant* $Y$ *(voir [BH, Proposition 2.7, p. 179]).*

Deux rayons géodésiques $c, c' : [0, \infty[ \ \to X$ sont dits *asymptotes* s'il existe une constante $K$ telle que, pour tout $t \in [0, \infty[$, $d(c(t), c'(t)) \leqslant K$. Ceci définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des rayons géodésiques de $X$, appelons *bord* (visuel) de $X$ l'ensemble de ces classes d'équivalence, et notons-le $\partial X$. Notons de plus $\overline{X}^v = X \cup \partial X$.

**Proposition 3.5.** *Soit $X$ est un espace métrique* CAT(0) *complet et $c : [0, \infty[ \ \to X$ un rayon géodésique issu d'un point $x \in X$. Alors pour tout point $x' \in X$, il existe un unique rayon géodésique $c'$ issu de $x'$ qui soit asymptote à $c$ (voir [BH, Proposition 2.8, p. 261]).*

**Proposition 3.6.** *Soit $X$ un espace métrique* CAT(0)*, et $C \subset X$ une partie convexe non vide complète. Alors pour tout point $x$ de $X$, il existe un unique point $p(x)$ de $C$ qui réalise la distance de $x$ à $C$ : le point $p(x)$ est appelé projection de $x$ sur $C$. De plus, si $x'$ appartient au segment géodésique $[xp(x)]$, alors $p(x') = p(x)$ (voir [BH, Proposition 2.7, p. 179]).*

Soit $X$ un espace métrique CAT(0) complet. Nous allons définir une topologie sur $\overline{X}^v$ telle que la topologie induite sur $X$ soit la topologie originale.

Fixons un point base $x_0 \in X$, et considérons le système $(\overline{B}(x_0, r), p_r)_{r \geqslant 0}$ constitué des boules fermées centrées en $x_0$. Celles-ci sont convexes et complètes, donc on peut définir les projections $p_r : X \to \overline{B}(x_0, r)$.

Remarquons que, si $r' \geqslant r$, alors $p_r \circ p_{r'} = p_r$. Ainsi, pour $r' \geqslant r$, les projections $p_r|_{\overline{B}(x_0, r')} : \overline{B}(x_0, r') \to \overline{B}(x_0, r)$ forment un système projectif. Considérons sa limite projective $\varprojlim \overline{B}(x_0, r)$, muni de la topologie limite projective : c'est la topologie la moins fine rendant continues les applications $\varprojlim \overline{B}(x_0, r) \to \overline{B}(x_0, r_0)$, pour $r_0 \geqslant 0$.

Un élément de l'espace $\varprojlim \overline{B}(x_0, r)$ est une suite de points situés sur un rayon ou un segment géodésique. Plus précisément, on peut identifier tout élément de l'espace $\varprojlim \overline{B}(x_0, r)$ avec une application $c : [0, \infty[ \ \to X$ telle que, si $r' \geqslant r$ alors $p_r(c(r')) = c(r)$. La topologie de $\varprojlim \overline{B}(x_0, r)$ coïncide avec la topologie induite de la topologie compacte-ouverte sur l'espace $C([0, \infty[\ , X)$ des applications continues de $[0, \infty[$ dans $X$.

Les éléments de $\varprojlim \overline{B}(x_0, r)$, vus comme applications de $[0, \infty[$ dans $X$, sont de deux types :

- soit pour tout $r \neq r'$, nous avons $c(r) \neq c(r')$ : dans ce cas, $c$ est un rayon géodésique issu de $x_0$ ;
- soit il existe un $r_0 \geqslant 0$ minimal tel que pour tout $r \geqslant r_0$, nous ayons $c(r) = c(r_0)$ : dans ce cas, $c|_{[0, r_0]}$ est un segment géodésique joignant $x_0$ à $c(r_0)$, et $c|_{[r_0, \infty[}$ est constante.

On peut alors définir une bijection $\phi : \overline{X}^v \to \varprojlim \overline{B}(x_0, r)$, qui à un point $x \in X$ associe l'application $c : [0, \infty[ \to X$ telle que $c|_{[0,r_0]}$ soit le segment géodésique joignant $x_0$ à $x$ (où $r_0 = d(x_0, x)$), et telle que $c|_{[r_0,\infty[}$ soit l'application constante égale à $x$. Et, si $c \in \partial X$, on définit $\phi(c)$ comme étant l'unique rayon géodésique issu de $x_0$ asymptote à $c$. Posons alors sur $\overline{X}^v$ la topologie telle que $\phi$ soit un homéomorphisme.

**Proposition 3.7.** *La topologie ainsi définie sur $\overline{X}^v$ est indépendante du choix du point $x_0$ (voir [BH, Proposition 8.8, p. 264]).*

L'inclusion $X \to \overline{X}^v$ est alors un homéomorphisme sur un ouvert dense de $\overline{X}^v$ : ainsi, $\overline{X}^v$ est une compactification de $X$, appelée *compactification conique*, ou *compactification par le bord visuel*.

Soit $\gamma$ une isométrie de $X$. Si $c$ et $c'$ sont deux rayons géodésiques asymptotes, $\gamma(c)$ et $\gamma(c')$ sont encore deux rayons géodésiques asymptotes : ceci permet d'étendre $\gamma$ à une application de $\overline{X}^v$ dans $\overline{X}^v$.

**Proposition 3.8.** *Si $\gamma$ une isométrie de $X$, alors le prolongement de $\gamma$ à $\overline{X}^v$ est un homéomorphisme (voir [BH, Corollary 8.9, p. 264]).*

Si l'on note $G$ le groupe des isométries de $X$, la compactification conique est en fait une $G$-compactification.

**Exemple.** Dans le cas du plan hyperbolique réel $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}} = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$, dans le modèle du disque ouvert, la compactification conique est $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$-isomorphe à la compactification usuelle où l'on ajoute le cercle à l'infini pour obtenir le disque fermé.

**Proposition 3.9.** *Soit $X$ une variété riemannienne complète simplement connexe de dimension $n$, de courbure sectionnelle négative ou nulle. Alors pour tout point base $x \in X$, l'application $T^1_x \to \partial X$ qui à un vecteur unitaire tangent $u$ à $X$ en $x$ associe l'unique rayon géodésique $c$ issu de $x$ tel que $c'(0) = u$ est un homéomorphisme. Ainsi, $\partial X$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ de dimension $n - 1$ et la compactification $\overline{X}^v$ à la boule fermée $\mathbb{B}^n$ de dimension $n$ (voir [BH, Example 8.11, p. 265]).*

# 4 La topologie de Chabauty sur l'espace des sous-groupes fermés

## 4.1 Définitions

Soit $X$ un espace topologique localement compact, et $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des fermés de $X$. On munit $\mathcal{F}(X)$ de la *topologie de Chabauty* ([Cha]) : les ouverts sont les réunions quelconques d'intersections finies de parties de la forme :

$$O_K = \{H \in \mathcal{G}(G) : H \cap K = \emptyset\}$$
$$O'_U = \{H \in \mathcal{G}(G) : H \cap U \neq \emptyset\}$$

où $K$ est un compact de $X$ et $U$ un ouvert de $X$.

Le résultat suivant est classique :

**Proposition 4.1.** *L'espace topologique $\mathcal{F}(X)$ est compact.*

**Preuve.** (voir [Cha], [Bou], [CDP, Proposition 1.7, p. 58]) Montrons que $\mathcal{F}(X)$ est séparé : soient $F, F'$ deux fermés distincts de $X$. Quitte à échanger $F$ et $F'$, on peut supposer qu'il existe $x \in F \backslash F'$. Comme $X$ est localement compact, il existe un voisinage ouvert $U$ de $x$ dans $X$ tel que $\overline{U}$ soit compact et $\overline{U} \cap F' = \emptyset$. Alors $O'_U$ et $O_{\overline{U}}$ sont des ouverts disjoints, contenant respectivement $F$ et $F'$.

Soient $(K_i)_{i\in I}$ des compacts de $X$, $(U_j)_{j\in J}$ des ouverts de $X$ tels que $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{i\in I} O_{K_i} \cup \bigcup_{j\in J} O'_{U_j}$. Soit $F = X \backslash \bigcup_{j\in J} U_j$ : c'est un fermé de $X$ n'appartenant à aucun $O'_{U_j}$ : soit donc $i_0 \in I$ tel que $F \in O_{K_{i_0}}$. Alors $K_{i_0} \subset X \backslash F = \bigcup_{j\in J} U_j$ : par compacité, soient $j_1, ..., j_n \in J$ tels que $K_{i_0} \subset \bigcup_{k=1}^n U_{j_k}$. Alors

$$\mathcal{F}(X) = O_{K_{i_0}} \cup \bigcup_{k=1}^{n} O'_{U_{j_k}},$$

ainsi tout recouvrement de $\mathcal{F}(X)$ par des ouverts de la prébase considérée admet un sous-recouvrement fini.

Par une application du lemme de Zorn, ceci implique que l'espace $\mathcal{F}(X)$ est compact. $\square$

Soit $G$ un groupe topologique localement compact. On note $\mathcal{G}(G) \subset \mathcal{F}(G)$ l'ensemble de ses sous-groupes fermés, muni de la topologie induite.

**Proposition 4.2.** *Le sous-espace $\mathcal{G}(G)$ est un fermé de $\mathcal{F}(G)$, donc est compact.*

**Preuve.** (voir [Cha], [CEG, Proposition I.3.1.2, p. 59], [Bou, Livre VI (Intégration), Chap. VIII, §5], [CDP, Proposition 1.7, p. 58]) Par l'absurde, supposons qu'il existe un fermé $F \in \mathcal{F}(G)$ adhérent à $\mathcal{G}(G)$ qui ne soit pas un sous-groupe : il existe donc $x, y \in F$ tels que $xy^{-1} \notin F$. Puisque $G$ est un groupe topologique localement compact, il existe $K$ un voisinage compact de $xy^{-1}$ disjoint de $F$, et $U, V$ des voisinages ouverts de $x, y$ dans $G$ tels que $UV^{-1} \subset K$. Alors $F$ appartient à $O_K \cap O'_U \cap O'_V$, tandis que $\mathcal{G}(G)$ ne rencontre pas $O_K \cap O'_U \cap O'_V$ : contradiction. Donc $\mathcal{G}(G)$ est fermé dans $\mathcal{F}(G)$. □

**Proposition 4.3.** *Un système fondamental de voisinages ouverts de $H_0 \in \mathcal{G}(G)$ est donnée par*

$$V_{K,U}(H_0) = \{H \in \mathcal{G}(G) : H \cap K \subset H_0U \text{ et } H_0 \cap K \subset HU\}$$

*où $K$ est un compact de $G$ et $U$ un voisinage ouvert de $e$.*

**Preuve.** Montrons tout d'abord que pour tout compact $K_0$ de $G$, pour tout voisinage ouvert $U_0$ de $e$ dans $G$, et pour tout $H_0 \in \mathcal{G}(G)$, l'ensemble $V_{K_0,U_0}(H_0)$ est un voisinage ouvert de $H_0$ dans $\mathcal{G}(G)$. Soit $K = K_0 \backslash (H_0U_0)$, qui est un compact de $G$ : alors $H_0 \in O_K$, et $H \cap K_0 \subset H_0U_0$ si et seulement si $H \cap K = \emptyset$. Comme $G$ est un groupe topologique, soit $U$ un voisinage symétrique ouvert de $e$ dans $G$ tel que $U^2 = \{uv : u, v \in U\} \subset U_0$. L'ensemble $\{hU : h \in H_0 \cap K_0\}$ est un recouvrement ouvert du compact $H_0 \cap K_0$ : soient $h_1, ..., h_n \in H_0 \cap K_0$ tels que $H_0 \cap K_0 \subset \cup_{i=1}^n h_iU$. Soit $H \in \cap_{i=1}^n O'_{h_iU}$. Si $h \in H_0 \cap K_0$, alors il existe $i$ tel que $h \in h_iU$. Or $h_iU \cap H \neq \emptyset$ : soit donc $h' \in h_iU \cap H$. Alors $h \in HU^2 \subset HU_0$. Par ailleurs $h_i \in H_0 \cap h_iU$, donc $H_0 \in O'_{h_iU}$ pour tout $i$. Ainsi $H_0 \in O_K \cap \cap_{i=1}^n O'_{h_iU} \subset V_{K_0,U_0}(H_0)$.

Réciproquement, soit $H_0 \in \mathcal{G}(G)$ et $K$ un compact de $G$ tel que $H_0 \in O_K$ : $H_0 \cap K = \emptyset$. Comme $H_0$ est fermé, pour tout $k \in K$, il existe un voisinage ouvert $U_k$ de $e$ dans $G$ tel que $kU_k \cap H_0 = \emptyset$. Par compacité de $K$, on peut trouver un voisinage symétrique ouvert $U$ de $e$ tel que $KU \cap H_0 = \emptyset$. Alors, si $H \in V_{K,U}(H_0)$, comme $K \cap H_0U = \emptyset$, nous avons $H \cap K = \emptyset$ : $H \in O_K$. Donc $H_0 \in V_{K,U}(H_0) \subset O_K$.

Soit $H_0 \in \mathcal{G}(G)$ et $U$ un ouvert de $G$ tel que $H_0 \in O'_U$. Puisque $H_0 \cap U \neq \emptyset$, on peut choisir $h_0 \in H_0 \cap U$. Comme $G$ est localement compact, on peut considérer voisinage symétrique ouvert $U'$ de $e$ dans $G$ tel que $\overline{U'}$ soit compact et $h_0\overline{U'} \subset U$. Notons $K = h_0\overline{U'}$, c'est un compact de $G$. Si $H \in V_{K,U'}(H_0)$, alors $h_0 \in H_0 \cap K \subset HU'$ : il existe $h \in H$ et $u \in U'$ tels que $h_0 = hu$. Donc $h = h_0u^{-1} \in h_0U' \subset U$, d'où $h \in H \cap U$ : nous avons ainsi montré que $H_0 \in V_{K,U'}(H_0) \subset O'_U$. □

Si l'on se donne un morphisme de groupes topologiques localement compacts $f : G \to H$, on peut définir $\mathcal{G}(f) : \mathcal{G}(H) \to \mathcal{G}(G)$ par $A \mapsto f^{-1}(A)$ : ainsi, $\mathcal{G}$ est un foncteur contravariant de la catégorie des groupes topologiques localement compacts à valeur dans la catégorie des espaces topologiques, avec pour morphismes les applications ensemblistes. En effet, si $f$ est un morphisme de groupes topologiques localement compacts de $G$ dans $H$, l'application $\mathcal{G}(f)$ n'est pas nécessairement continue. Voici un critère permettant de l'affirmer.

**Proposition 4.4.** *Soit $f : G \to H$ un morphisme surjectif de groupes topologiques localement compacts. Alors l'application $\mathcal{G}(f)$ est continue et injective, donc un homéomorphisme sur son image.*

**Preuve.** Puisque le morphisme $f$ est surjectif, pour tout sous-groupe fermé $A$ de $H$, nous avons $f(\mathcal{G}(f)(A)) = A$, donc l'application $\mathcal{G}(f)$ est injective.

Notons $N$ le noyau du morphisme $f$. Soit $A$ un sous-groupe fermé de $H$, montrons que $\mathcal{G}(f)$ est continue en $A$ : soient $K$ un compact de $G$ et $U$ un voisinage ouvert de $e$ dans $G$, de sorte que $V_{K,U}(\mathcal{G}(f)(A))$ soit un voisinage ouvert de $\mathcal{G}(f)(A)$ dans $\mathcal{G}(H)$. Montrons que $\mathcal{G}(f)^{-1}(V_{K,U}(\mathcal{G}(f)(A)))$ est un voisinage ouvert de $A$ dans $\mathcal{G}(G)$. Remarquons que $f(K)$ est un compact de $H$, et que $f(U)$ est un voisinage ouvert de $e$ dans $H$ : ainsi, $\mathcal{G}(f)^{-1}(V_{K,U}(\mathcal{G}(f)(A))) = V_{f(K),f(U)}(A)$ est un voisinage ouvert de $\mathcal{G}(f)(A)$ dans $\mathcal{G}(H)$. Donc l'application $\mathcal{G}(f)$ est continue en tout $A \in \mathcal{G}(H)$.

Enfin, puisque l'espace $\mathcal{G}(H)$ est compact et l'espace $\mathcal{G}(G)$ séparé, l'application continue, injective $\mathcal{G}(f)$ est un homéomorphisme sur son image. □

## 4.2 Le cadre métrique

Sauf mention explicite du contraire, les boules considérées seront ouvertes. Soit $G$ un groupe topologique localement compact muni d'une distance $d$ induisant la topologie de $G$. Dans ce cas, on peut alors décrire la convergence d'une suite de sous-groupes fermés.

**Proposition 4.5.** *Une suite de sous-groupes fermés $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un sous-groupe fermé $H$ dans $\mathcal{G}(G)$ si et seulement si $H$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire :*

1. *Pour tout $x \in H$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $x$ telle que, pour tout $n$, nous avons $x_n \in H_n$.*
2. *Pour toute suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, pour toute suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $x$ telle que $x_{n_k} \in H_{n_k}$ pour tout $k$, nous avons $x \in H$.*

**Preuve.** (voir [CEG, Lemma I.3.1.3, p. 60], [CDP, Proposition 1.8, p. 60])

Supposons que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $H$ dans $\mathcal{G}(G)$.

1. Soit $x \in H$, alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ il existe un rang $N$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, nous ayons $H_n \in O'_{B(x,\frac{1}{k+1})}$, où $B(x, \frac{1}{k+1})$ désigne la boule (ouverte) dans $G$ de centre $x$ et de rayon $\frac{1}{k+1}$ : il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en posant $x_n = e$ si $n < N$), et telle que $d(x_n, x) < \frac{1}{k+1}$ pourvu que $n$ soit assez grand : c'est dire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$ dans $G$.

2. Soit $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $x_{n_k} \in H_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et qui converge vers $x$. Supposons que $x$ n'appartienne pas à $H$, alors comme $G$ est localement compact, il existe un voisinage compact $F$ de $x$ disjoint de $H$ : ainsi $H \in O_F$, donc $H_{n_k} \in O_F$ à partir d'un certain rang : d'où $x_{n_k} \notin F$, ce qui contredit la convergence de la suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vers $x$. Donc $x \in H$.

Supposons que les deux propriétés soient vérifiées.

Soit $U$ un ouvert de $G$ tel que $H \in O'_U$ : montrons que $H_n \in O'_U$ à partir d'un certain rang. Soit $x \in H \cap U$, par hypothèse il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $x$ telle que $x_n \in H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $U$ est ouvert, $x_n$ appartient à $U$ à partir d'un certain rang, donc $H_n \in O'_U$.

Soit $F$ un compact de $G$ tel que $H \in O_F$ : montrons que $H_n \in O_F$ à partir d'un certain rang. Si ce n'était pas le cas, il existerait une suite d'entiers strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $H_{n_k} \notin O_F$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ : il existe donc $x_{n_k} \in H_{n_k} \cap F$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par compacité de $F$, on peut supposer que la suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in F$. On doit alors avoir $x \in H$, ce qui contredit $H \in O_F$.

En conclusion, la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $H$ dans $\mathcal{G}(G)$. □

**Proposition 4.6.** *Si de plus la distance $d$ sur $G$ est propre (i.e. les boules fermées sont compactes), alors l'espace $\mathcal{G}(G)$ est métrisable, pour la distance de Hausdorff pointée (voir [BH, Definition 5.43, p. 76]) : si $H$, $H'$ sont des sous-groupes fermés de $G$, on définit $d_{Hau}(H, H')$ comme la borne inférieure des $\varepsilon > 0$ tels que :*

$$\begin{aligned} H \cap B(e, \frac{1}{\varepsilon}) &\subset V_\varepsilon(H') \\ \textit{et } H' \cap B(e, \frac{1}{\varepsilon}) &\subset V_\varepsilon(H), \end{aligned}$$

*où $V_\varepsilon(H')$ désigne le $\varepsilon$-voisinage ouvert de $H'$ dans $G$.*

**Preuve.** Vérifions tout d'abord que $d_{\mathrm{Hau}}(H, H')$ est bien une distance. Vérifions l'inégalité triangulaire : soient $H, H', H''$ trois sous-groupes fermés de $G$. Soient $r > d_{\mathrm{Hau}}(H, H')$ et $r' > d_{\mathrm{Hau}}(H', H'')$, montrons que $d_{\mathrm{Hau}}(H, H'') \leqslant r + r'$. On sait que $H \cap B(e, \frac{1}{r}) \subset V_r(H')$ et que $H' \cap B(e, \frac{1}{r'}) \subset V_{r'}(H'')$, donc

$$\begin{aligned} H \cap B(e, \frac{1}{r+r'}) &\subset V_r(H') \cap B(e, \frac{1}{r+r'}) \\ &\subset V_r(H' \cap B(e, \frac{1}{r'})) \subset V_{r+r'}(H''). \end{aligned}$$

Par symétrie, on a également $H'' \cap B(e, \frac{1}{r+r'}) \subset V_{r+r'}(H)$. Ainsi, $d_{\mathrm{Hau}}(H, H'') \leqslant d_{\mathrm{Hau}}(H, H') + d_{\mathrm{Hau}}(H', H'')$.

Montrons enfin que, si $d_{\mathrm{Hau}}(H, H') = 0$, alors $H = H'$. Soit $x \in H$, pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons $x \in B(e, \frac{1}{\varepsilon})$, donc $x \in V_\varepsilon(H')$. Puisque le sous-groupe $H'$ est fermé, on en déduit que $H \subset H'$. Par symétrie, $H = H'$.

Soit $F$ un compact de $G$ et $H \in O_F$ : montrons qu'il existe $r > 0$ tel que $B_{d_{\text{Hau}}}(H, r) \subset O_F$. Comme $F$ est compact et disjoint de $H$, on peut trouver $r > 0$ tel que $F \cap V_{2r}(H) = \emptyset$ et tel que $F \subset B_d(e, \frac{1}{2r})$. Alors, si $H' \in B_{d_{\text{Hau}}}(H, r)$, nous avons $H' \cap F = (H' \cap B_d(e, \frac{1}{2r})) \cap F \subset V_{2r}(H) \cap F = \emptyset$, donc $H' \in O_F$.

Soit $U$ un ouvert de $G$ et $H \in O'_U$ : montrons qu'il existe $r > 0$ tel que $B_{d_{\text{Hau}}}(H, r) \subset O'_U$. Soient $x \in H \cap U$ et $r > 0$ tels que $B_d(x, 2r) \subset U$ et $d(e, x) < \frac{1}{2r}$. Si $H' \in B_{d_{\text{Hau}}}(H, r)$, alors $x \in H \cap B_d(e, \frac{1}{2r})$ implique $x \in V_{2r}(H')$, donc $H' \cap U \supset H' \cap B_d(x, 2r) \neq \emptyset$ : c'est dire que $H' \in O'_U$.

Soient $H_0 \in \mathcal{G}(G)$, $r > 0$ et $H \in B_{d_{\text{Hau}}}(H_0, r)$, montrons qu'il existe un voisinage ouvert de $H$ pour la topologie de Chabauty inclus dans $B_{d_{\text{Hau}}}(H_0, r)$. Soient $d \in ]d_{\text{Hau}}(H, H_0), r[$ et $\varepsilon > d$.

Pour tout $x \in H_0 \cap B_d(e, \frac{1}{d})$, choisissons $f(x) \in H$ tel que $d(x, f(x)) < \frac{1}{d}$, et soient $U_x$, $V_{f(x)}$ des voisinages ouverts de $x$, $f(x)$ tels que la distance maximale entre un point de $U_x$ et un point de $V_{f(x)}$ soit strictement majorée par $\frac{1}{d}$. Les ouverts $(U_x)_{x \in H_0}$ recouvrent $H_0 \cap B_d(e, \frac{1}{d})$. Ces ouverts recouvrent en particulier le compact $H_0 \cap \overline{B}_d(e, \frac{1}{\varepsilon})$ (car la distance est propre) : soit donc $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ un nombre fini d'entre eux suffisant à recouvrir $H_0 \cap B_d(e, \frac{1}{\varepsilon})$. Alors, pour tout $H' \in \cap_{i=1}^n O'_{V_{f(x_i)}}$, nous avons $H_0 \cap B_d(e, \frac{1}{\varepsilon}) \subset V_\varepsilon(H')$ : en effet, si $x \in H_0 \cap B_d(e, \frac{1}{\varepsilon})$, il existe $i \in [[1, m]]$ tel que $x \in U_{x_i}$, donc $x \in V_\varepsilon(H')$.

Pour tout $x \in H \cap B_d(e, \frac{1}{d})$, choisissons $f(x) \in H_0$ tel que $d(x, f(x)) < d$, et soient $U_x$, $V_{f(x)}$ des voisinages ouverts de $x$, $f(x)$ tels que la distance maximale entre un point de $U_x$ et un point de $V_{f(x)}$ soit strictement majorée par $\frac{1}{d}$. Les ouverts $(U_x)_{x \in H}$ recouvrent $H \cap B_d(e, \frac{1}{d})$. Ces ouverts recouvrent en particulier le compact $H \cap \overline{B}_d(e, \frac{1}{\varepsilon})$ : soit donc $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ un nombre fini d'entre eux suffisant à recouvrir $H \cap B_d(e, \frac{1}{\varepsilon})$. Notons $F = \overline{B}_d(e, \frac{1}{\varepsilon}) \setminus \cup_{i=1}^m U_{x_i}$, c'est un compact de $G$. Alors pour tout $H' \in O_F$, nous avons $H' \cap B_d(e, \frac{1}{\varepsilon}) \subset V_\varepsilon(H_0)$ : en effet, si $x' \in H' \cap B_d(e, \frac{1}{\varepsilon})$, alors il existe $i \in [[1, m]]$ tel que $x' \in U_{x_i}$, donc $x' \in V_\varepsilon(H_0)$.

Finalement, pour tout $H'$ appartenant à $\cap_{i=1}^n O'_{V_{f(x_i)}} \cap O_F$, voisinage ouvert de $H$ pour la topologie de Chabauty, nous avons $H' \in B_{d_{\text{Hau}}}(H_0, \varepsilon)$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > d$, on en déduit que pour tout $H' \in \cap_{i=1}^n O'_{V_{f(x_i)}} \cap O_F$, nous avons $d_{\text{Hau}}(H', H_0) \leqslant d < r$. Ainsi, $\cap_{i=1}^n O'_{V_{f(x_i)}} \cap O_F \subset B_{d_{\text{Hau}}}(H_0, r)$. $\square$

## 4.3 Exemples

Voici quelques rares exemples de groupes pour lesquels le calcul explicite de l'espace des sous-groupes fermés est possible.

Notons $X_\mathbb{Z}$ le sous-espace topologique compact de $\mathbb{R}$ défini par $X_\mathbb{Z} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

**Proposition 4.7.** *L'application $\phi_\mathbb{Z} : X_\mathbb{Z} \to \mathcal{G}(\mathbb{Z})$ définie par $\frac{1}{n} \mapsto n\mathbb{Z}$ et $0 \mapsto \{0\}$ est un homéomorphisme.*

**Preuve.** L'application $\phi_{\mathbb{Z}}$ est clairement bijective, et continue en tout point isolé dans $X_{\mathbb{Z}}$. Soient $K = [-M, M] \cap \mathbb{Z}$ un compact de $\mathbb{Z}$, $U = \{0\}$, qui est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{Z}$ et $\varepsilon > 0$.

Montrons que $\phi_{\mathbb{Z}}$ est continue en 0 : si $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$, alors $n > M$ pourvu que $\varepsilon$ soit assez petit, donc $n\mathbb{Z} \cap K = \{0\} = \{0\} + U$, et $\{0\} \cap K = \{0\} \subset n\mathbb{Z} + U = n\mathbb{Z}$. Ainsi $\phi_{\mathbb{Z}}(\frac{1}{n}) \in V_{K,U}(\{0\})$ : $\phi_{\mathbb{Z}}$ est continue en 0.

Finalement l'application $\phi_{\mathbb{Z}}$ est bijective et continue, or l'espace $X_{\mathbb{Z}}$ est compact et l'espace $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$ est séparé, donc $\phi_{\mathbb{Z}}$ est un homéomorphisme. □

Notons ici $\frac{1}{0}\mathbb{Z} = \{0\}$ et $\frac{1}{\infty}\mathbb{Z} = \mathbb{R}$.

**Proposition 4.8.** *L'application $\phi_{\mathbb{R}} : X_{\mathbb{R}} = [0, \infty] \to \mathcal{G}(\mathbb{R})$ définie par $\alpha \mapsto \frac{1}{\alpha}\mathbb{Z}$ est un homéomorphisme.*

**Preuve.** L'application $\phi_{\mathbb{R}}$ est bijective. Il est clair que $\phi_{\mathbb{R}}$ est continue en tout point de $]0, \infty[$. Soient $M > 0$, $K = [-M, M]$ qui est un compact de $\mathbb{R}$, $U = ]-\varepsilon, \varepsilon[$ qui est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$, et $\eta > 0$.

Montrons que $\phi_{\mathbb{R}}$ est continue en 0 : si $\alpha < \eta$, alors $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\eta} \geqslant M$ pourvu que $\eta$ soit assez petit, donc $\frac{1}{\alpha}\mathbb{Z} \cap K = \{0\} \subset \{0\} + U = U$, et $\{0\} \cap K = \{0\} \subset \frac{1}{\alpha}\mathbb{Z} + U$ : c'est dire que $\phi_{\mathbb{R}}(\alpha) \in V_{K,U}(\{0\})$.

Montrons que $\phi_{\mathbb{R}}$ est continue en $\infty$ : si $\frac{1}{\alpha} < \eta$, alors $\frac{1}{\alpha} < \varepsilon$ pourvu que $\eta$ soit assez petit, donc pour tout $x \in \mathbb{R} \cap K = K$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $|x - \frac{p}{\alpha}| < \varepsilon$ : c'est dire que $x \in \frac{1}{\alpha}\mathbb{Z} + U$. Par ailleurs, $\frac{1}{\alpha}\mathbb{Z} \cap K \subset \mathbb{R} + U = \mathbb{R}$. Donc $\phi_{\mathbb{R}}(\alpha) \in V_{K,U}(\mathbb{R})$.

Finalement l'application $\phi_{\mathbb{R}}$ est bijective et continue, or l'espace $X_{\mathbb{R}}$ est compact et l'espace $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ est séparé, donc $\phi_{\mathbb{R}}$ est un homéomorphisme. □

Les trois exemples qui suivent sont beaucoup plus difficiles à calculer.

Notons *Aff* le groupe affine de la droite réelle. Le groupe *Aff* est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}$, pour l'action de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par $y \cdot x = e^y x$, par l'application $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R} \to \mathit{Aff}$ définie par $(x, y) \mapsto \{z \mapsto e^y z + x\}$.

**Proposition 4.9.** *L'espace $\mathcal{G}(\mathit{Aff})$ des sous-groupes fermés du groupe affine est homéomorphe à un disque fermé auquel on a attaché un segment par l'une de ses extrémités à un point du bord du disque (voir [BHK, Proposition 1.1, p. 2]).*

**Théorème 4.10** (Hubbard - Pourezza)**.** *L'espace $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ des sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^2$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^4$ de dimension 4 (voir [PH]).*

M. R. Bridson, P. de la Harpe et V. Kleptsyn ont récemment déterminé (voir [BHK, Theorem 1.3, p. 4]) l'espace des sous-groupes fermés du groupe de Heisenberg de dimension 3, qui est le produit semi-direct $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ pour l'action unipotente de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ donnée par $t \cdot (x, y) = (x + ty, y)$.

# 5 La compactification de Chabauty

Voici tout d'abord deux résultats qui vont être utilisés dans cette partie.

**Proposition 5.1.** *Si $K$ est un groupe de Lie compact connexe, alors l'exponentielle* $\exp : \mathrm{Lie}(K) \to K$ *est surjective (voir [Hel, Proposition 6.10, p. 135]).*

**Proposition 5.2.** *L'exponentielle* $\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *est un difféomorphisme local en $M \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ si et seulement si* $\mathrm{ad}\, M$ *n'a aucune valeur propre de la forme $2i\pi m$, avec $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ (voir [MT, Théorème 3.8.3, p. 82]).*

## 5.1 La définition de la compactification

Soit $X$ un espace symétrique de type non compact, et soit $G$ un groupe de Lie connexe muni d'une action isométrique sur $X$. On suppose que $G$ se surjecte sur la composante neutre $\mathrm{Isom}_0(X)$ du groupe des isométries de $X$, avec noyau fini. Alors le groupe de Lie $G$ est bien semi-simple, de centre fini et sans facteur compact. Nous verrons en fin de paragraphe que la construction qui suit est indépendante du choix d'un tel groupe $G$, ce qui permet de travailler avec des groupes des Lie ayant un centre fini non trivial, comme par exemple $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ pour $n \geqslant 2$ pair.

On va définir une compactification de $X$ en plongeant $X$ dans l'espace $\mathcal{G}(G)$ des sous-groupes fermés de $G$, via l'application $\phi$ qui à un point de l'espace symétrique associe son stabilisateur dans $G$ (lequel est fermé car l'action de $G$ sur $X$ est continue).

$$\begin{array}{rcl} \phi : X & \to & \mathcal{G}(G) \\ x & \mapsto & G_x = \{g \in G, g \cdot x = x\}. \end{array}$$

Remarquons que l'image de $\phi$ est exactement l'ensemble des sous-groupes compacts maximaux de $G$, d'après le fait que tout sous-groupe compact de $G$ fixe un point de $x$.

**Proposition 5.3.** *L'application $\phi$ est un plongement.*

**Preuve.** (voir [GJT, Proposition 9.3, p. 133])

Choisissons un point base $x_0$ de l'espace symétrique, et notons $K = \phi(x_0) = G_{x_0}$ le stabilisateur de $x_0$ dans $G$ : c'est un sous-groupe compact maximal. Comme dans la partie 2, choisissons une décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie de $K$, une sous-algèbre de Lie abélienne maximale $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ ainsi qu'une chambre de Weyl positive $\mathfrak{a}^+$.

Montrons que $\phi$ est injective : soit $g \in G$ tel que $gKg^{-1} = K$. Écrivons $g = k_1 a k_2$ dans la décomposition de Cartan $K\overline{A^+}K$. Alors $aKa^{-1} = K$, donc si $k \in K$, alors $kak^{-1} \in aK$. Or l'application exponentielle du groupe de Lie compact connexe $K$ est surjective (voir la proposition 5.1), on peut donc choisir $X \in \mathfrak{k}$ tel que $\exp X = k$. L'exponentielle réalise de plus un homéomorphisme de $\mathfrak{a}$ sur $A$ : soit donc $H \in \mathfrak{a}$ tel que $\exp H = a$. Puisque $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, nous avons

$$kak^{-1} = k \exp H k^{-1} = \exp(\operatorname{Ad} k(H)) = \exp(e^{\operatorname{ad} X} H) \in \exp(\mathfrak{p}) = P.$$

Donc, comme la décomposition polaire $G = PK$ est unique, nous avons $kak^{-1} = a$, et ce pour tout $k \in K$. Ainsi $\operatorname{Ad} k(H) = H$ pour tout $k \in K$, donc pour tout $U \in \mathfrak{k}$ nous avons $\exp(-\operatorname{ad} H)U = U$. Or, si $\alpha \in \Sigma$ et $U = U_\alpha + \theta(U_\alpha) \in \mathfrak{k}_\alpha$, nous avons $\exp(-\operatorname{ad} H)U = \exp(-\alpha(H))U_\alpha - \exp(\alpha(H))\theta(U_\alpha)$. On ne peut donc avoir $\exp(-\operatorname{ad} H)U = U$ que si $\alpha(H) = 0$, et ce pour tout $\alpha \in \Sigma$ : ainsi, $H = 0$. Finalement, $a = e$ donc $g \in K$.

Ceci montre que $\phi$ est injective : supposons $\phi(x) = \phi(x')$. L'action de $G$ sur $X$ est transitive, soient donc $g, g' \in G$ tels que $x = g \cdot x_0$ et $x' = g' \cdot x_0$. Alors $\phi(x) = gKg^{-1} = g'Kg'^{-1} = \phi(x')$, donc $(g'^{-1}g)K(g'^{-1}g)^{-1} = K$, ainsi d'après ce qui précède $g'^{-1}g \in K$, ce qui signifie $x = x'$.

Montrons que $\phi$ est continue. Comme toute variété topologique, le groupe de Lie $G$ est métrisable : on peut utiliser le critère séquentiel (voir la proposition 4.6) pour montrer la continuité de $\phi$ : soit $gK \in G/K$, et soit $(g_nK)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $X$ convergeant vers $gK$. D'après la décomposition d'Iwasawa, on peut supposer que $g$ et les $g_n$ appartiennent à $S = AN$. Puisque $(g_nK)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $gK$, il existe une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $K$ telle que $(g_nk_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g$. D'après la continuité de la décomposition d'Iwasawa, on déduit que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $e$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g$. Ainsi, $(g_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g^{-1}$. On en déduit que $(\phi(g_nK))_{n\in\mathbb{N}} = (g_nKg_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\phi(gK) = gKg^{-1}$ : $\phi$ est continue.

Montrons que l'application $\phi$ est propre : soit $(g_nKg_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{G}(G)$ convergeant vers $gKg^{-1}$, montrons que la suite $(g_n \cdot x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ de $X$ converge à extraction près.

Remarquons que, si $d$ est une métrique $G$-invariante sur $G/K$, alors pour $h \in G$ et $k \in K$

$$d(hkh^{-1} \cdot x_0, h \cdot x_0) = d(kh^{-1} \cdot x_0, x_0) = d(h \cdot x_0, x_0).$$

Ainsi l'orbite $hKh^{-1} \cdot x_0$ de $x_0$ sous $hKh^{-1}$ est incluse dans la sphère de centre $h \cdot x_0$, de rayon $d(h \cdot x_0, x_0)$. Donc le diamètre de $hKh^{-1} \cdot x_0$ est inférieur ou égal à $2d(h \cdot x_0, x_0)$. Soit $g \in G$ la symétrie géodésique par rapport au point $h \cdot x_0$, alors $g \in hKh^{-1}$. Alors la distance de $x_0$ à $g \cdot x_0$ est égale à $2d(h \cdot x_0, x_0)$, et ces deux points sont dans l'orbite $hKh^{-1} \cdot x_0$. Par conséquent, pour tout $h \in G$, le diamètre de l'orbite $hKh^{-1} \cdot x_0$ de $x_0$ sous $hKh^{-1}$ est égal à $2d(h \cdot x_0, x_0)$.

Puisque la suite $(g_n K g_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $gKg^{-1}$ dans $\mathcal{G}(G)$ et que l'évaluation en $x_0$ est continue, la suite $(g_n K g_n^{-1} \cdot x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $gKg^{-1} \cdot x_0$ dans l'espace $\mathcal{F}(X)$ des fermés de $X$. Cette suite appartient à partir d'un certain rang à l'ouvert $O_F$, où $F$ est le compact de $X$ défini par $F = \overline{B}(h \cdot x_0, 3d(h \cdot x_0, x_0)) \backslash B(h \cdot x_0, 2d(h \cdot x_0, x_0))$. De plus, le complémentaire de $F$ dans $X$ a deux composantes connexes, $X \backslash \overline{B}(h \cdot x_0, 3d(h \cdot x_0, x_0))$ et $B(h \cdot x_0, 2d(h \cdot x_0, x_0))$. Or à partir d'un certain rang, l'ensemble $g_n K g_n^{-1} \cdot x_0$ intersecte $B(h \cdot x_0, 2d(h \cdot x_0, x_0))$, donc puisque $g_n K g_n^{-1} \cdot x_0$ est connexe (car $K$ l'est), l'orbite $g_n K g_n^{-1} \cdot x_0$ est incluse dans $B(h \cdot x_0, 2d(h \cdot x_0, x_0))$ à partir d'un certain rang. Ainsi le diamètre de $g_n K g_n^{-1} \cdot x_0$, qui est égal à $2d(g_n \cdot x_0, x_0)$, est borné. Donc la suite $(g_n K)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : elle converge, à extraction près.

L'application $\phi$, continue, injective et propre, est donc un homéomorphisme sur son image.

□

Notons $\overline{X}^{\mathcal{G}}$ l'adhérence de $\phi(X)$ dans $\mathcal{G}(G)$ : l'espace $\overline{X}^{\mathcal{G}}$ est compact. Le couple $(\overline{X}^{\mathcal{G}}, \phi)$ est appelée la *compactification de Chabauty* de l'espace symétrique $X$. Le groupe $G$ agit sur $\mathcal{G}(G)$ par conjugaison, et l'application $\phi$ est $G$-équivariante : si $g \in G$ et $x \in X$, le stabilisateur de $g \cdot x$ dans $X$ est $G_{g\cdot x} = gG_x g^{-1} = g \cdot G_x$. Ainsi, la compactification de Chabauty $\overline{X}^{\mathcal{G}}$ est une $G$-compactification de $X$.

Notons $G^0 = \mathrm{Isom}_0(X)$ la composante neutre du groupe des isométries de $X$. Nous allons montrer que la compactification de Chabauty ne dépend pas, à $G^0$-isomorphisme près, du choix du groupe $G$ extension finie de $G^0$.

Soit $G^0$ un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini, sans facteur compact, et $G$ une extension finie de $G$ : notons $\pi : G \to G^0$ un morphisme surjectif de noyau fini. Soit $K^0$ un sous-groupe compact maximal de $G^0$, et $K$ le sous-groupe compact maximal $K = \pi^{-1}(K^0)$ de $G$. Choisissons une métrique riemannienne $G^0$-invariante à gauche, $K^0$-invariante à droite sur $G^0$. Alors la métrique riemannienne tirée en arrière sur $G$ par $\pi$ est $G$-invariante à gauche et $K$-invariante à droite.

**Proposition 5.4.** *L'application $\psi : G/K \to G^0/K^0$ qui à $gK$ associe $\pi(g)K^0$ est un homéomorphisme, qui se prolonge en un isomorphisme $\pi$-équivariant entre les compactifications de Chabauty de ces deux espaces symétriques.*

**Preuve.** L'application $\phi$ est continue, bijective et propre (car $\pi$ est de noyau fini), c'est donc un homéomorphisme. Le morphisme $\pi$ est surjectif, donc d'après la proposition 4.4, l'application $\mathcal{G}(\pi) : \mathcal{G}(G^0) \to \mathcal{G}(G)$ est un plongement. Or cette application est également surjective : si $H$ est un sous-groupe fermé de $G$, alors $\pi(H)$ est un sous-groupe fermé de $G^0$ (car $\pi$ est de noyau fini), tel que $\mathcal{G}(\pi(H)) = H$. Ainsi l'application $\mathcal{G}(\pi)$ est un homéomorphisme isométrique. Notons $\phi : G/K \to \mathcal{G}(G)$ et $\phi' : G^0/K^0 \to \mathcal{G}(G^0)$ les deux plongements des espaces symétriques $G/K$ et $G^0/K^0$. On constate que $\phi' = \mathcal{G}(\pi) \circ \phi \circ \psi$, donc l'homéomorphisme $\psi$ s'étend en un isomorphisme $\pi$-équivariant entre les compactifications de Chabauty $\overline{G/K}^{\mathcal{G}}$ et $\overline{G^0/K^0}^{\mathcal{G}}$. □

Ceci montre par exemple que, pour étudier la compactification de Chabauty de l'espace symétrique associé à $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, on peut travailler dans l'espace $\mathcal{G}(\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, plus maniable que $\mathcal{G}(\mathrm{PSL}(n,\mathbb{R}))$.

## 5.2 La distalité

Si $V$ est un espace vectoriel réel de dimension finie, on dit que l'action d'un groupe $H$ sur $V$ est *distale* si le spectre de tout élément $h \in H$ est inclus dans le cercle unité $\mathbb{S}^1$. Un sous-groupe $H$ d'un groupe de Lie $G$ est appelé un *sous-groupe distal* de $G$ si l'action adjointe de $H$ sur l'algèbre de Lie de $G$ est distale. Cette notion, introduite par Furstenberg, provient des systèmes dynamiques, comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 5.5.** *Un sous-groupe $H$ de $\mathrm{GL}(V)$ est distal si et seulement si pour tous $h \in H$ et $v \in V\backslash\{0\}$, nous avons $0 \notin \overline{\{h^n v, n \in \mathbb{Z}\}}$ (voir [GJT, Proposition 9.5, p. 135]).*

L'intérêt d'introduire ici la distalité réside dans la proposition suivante :

**Proposition 5.6.** *Soit $G$ un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$, où $V$ est un espace vectoriel réel de dimension finie. Le sous-espace $\mathcal{G}_{distal}(G)$ de $\mathcal{G}(G)$ constitué des sous-groupes distaux de $G$ est fermé.*

**Preuve.** Soit $H$ un sous-groupe fermé de $G$ adhérent à $\mathcal{G}_{\mathrm{distal}}(G)$, et soit $h \in H$. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $G$ ayant une action distale sur $V$, convergeant vers $h$. Or le spectre, vu comme application de $\mathrm{GL}(V)$ dans $\mathbb{C}^n/\Sigma_n$, est continu. Puisque le cercle unité $\mathbb{S}^1$ est fermé, le spectre de $h$ est lui aussi inclus dans $\mathbb{S}^1$. Ainsi, $H$ est un sous-groupe distal de $G$. □

**Proposition 5.7.** *Tout sous-groupe de Lie compact d'un groupe de Lie est distal.*

**Preuve.** Soit $H$ un sous-groupe de Lie compact d'un groupe de Lie $G$. Soit $g \in H$, alors la suite $(g^n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $h$ ; et si $\lambda$ est une valeur propre de $\mathrm{Ad}\, g$, alors $\lambda^n$ converge à extraction près vers une valeur propre de $\mathrm{Ad}\, h$. Or $\mathrm{Ad}\, h$ est inversible, ce qui implique que $|\lambda| = 1$. Donc, pour tout $g \in H$, le spectre de $\mathrm{Ad}\, g$ est inclus dans le cercle unité $\mathbb{S}^1$ : ainsi, $H$ est un sous-groupe distal de $G$.
□

**Proposition 5.8.** *La compactification de Chabauty $\overline{X}^{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G}(G)$ de $X$ est constituée de sous-groupes distaux de $G$.*

**Preuve.** Par définition de la compactification de Chabauty, $\overline{X}^{\mathcal{G}}$ est l'adhérence des sous-groupes compacts maximaux de $G$, donc d'après les propositions 5.7 et 5.6, l'espace $\overline{X}^{\mathcal{G}}$ est constitué de sous-groupes distaux de $G$. □

**Lemme 5.9.** *Soit $V$ un espace vectoriel réel de dimension finie $m$, et $X \in \mathfrak{gl}(V)$. Notons $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ le spectre de $X$. Alors le spectre de $\operatorname{ad} X$ est $\{\lambda_i - \lambda_j\}_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$.*

**Preuve.** Le lemme est clair si $X$ est diagonalisable. Par continuité du spectre et densité des matrices diagonalisables, ceci est vrai pour tout $X \in \mathfrak{gl}(V)$. □

**Lemme 5.10.** *Soit $V$ un espace vectoriel de dimension finie $m$, et $d \in \mathrm{GL}(V)$ un élément distal. Alors il existe un élément $Y \in \mathfrak{gl}(V)$, de spectre inclus dans $i[0, 2\pi[$, tel que $\exp(Y) = d \in \mathrm{GL}(V)$ et que $\exp : \mathfrak{gl}(V) \to \mathrm{GL}(V)$ soit un difféomorphisme local en $Y$.*

**Preuve.** D'après la décomposition de Jordan, écrivons $d = d_s d_u$, avec $d_s \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ semi-simple, $d_u \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ unipotent, et $d_s d_u = d_u d_s$. Identifions $\mathrm{GL}(V)$ avec $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ au moyen du choix d'une base de $V$.

Puisque le spectre de $d$ coïncide avec celui de sa partie semi-simple $d_s$, on déduit que $d_s$ est conjuguée dans $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ à une matrice diagonale avec des coefficients diagonaux de module 1. Ainsi l'orbite $(d_s^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $d_s$ est relativement compacte dans $G$ : l'élément $d_s$ appartient donc à un sous-groupe de Lie compact, ainsi d'après la proposition 5.1 l'application exponentielle de ce sous-groupe est surjective. Soit donc $Y_s \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ tel que $\exp(Y_s) = d_s$. Alors $Y_s$ est semi-simple de spectre imaginaire pur : notons $(i\theta_1, ..., i\theta_m)$ le spectre de $Y_s$ (avec les multiplicités), où pour tout $j \in [[1, m]]$, $\theta_j \in [0, 2\pi[$. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que pour tout $j \in [[1, m]]$, $Q(e^{i\theta_j}) = i\theta_j$ (par exemple, $Q$ est un polynôme interpolateur de Lagrange : si deux $\theta_j$ sont égaux, ils imposent la même condition). Alors $Q(d_s) = Y_s$.

Or l'exponentielle $\exp : \mathfrak{gl}(V) \to \mathrm{GL}(V)$ est un homéomorphisme du sous-espace des éléments nilpotents de $\mathfrak{gl}(V)$ sur le sous-espace des éléments unipotents de $\mathrm{GL}(V)$ : soit donc $Y_u = \log(g_u) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ l'unique nilpotent tel que $\exp(Y_u) = d_u$. Or $Y_u = \log(d_u)$ est un polynôme en $(d_u - I)$, donc est également un polynôme en $d_u$.

Posons $Y = Y_s + Y_u \in \mathfrak{g}$. Comme $Y_s$ et $Y_u$ sont des polynômes en $d_s$ et $d_u$, respectivement, et que $d_s$ et $d_u$ commutent, on en déduit que $Y_s$ et $Y_u$ commutent. Donc $\exp(Y) = \exp(Y_s)\exp(Y_u) = d_s d_u = d$. Par ailleurs, le spectre de $Y$ coïncide avec le spectre de $Y_s$, qui est inclus dans $i[0, 2\pi[$.

D'après le lemme 5.9, le spectre de $\operatorname{ad} Y$ ne rencontre pas $2i\pi\mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Donc, d'après la proposition 5.2, l'exponentielle $\exp : \mathfrak{gl}(V) \to \mathrm{GL}(V)$ est un difféomorphisme local en $Y$. □

**Lemme 5.11.** *Soit $G$ un groupe de Lie semi-simple. Soient $d \in G$ un élément distal et $Y \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ un vecteur fourni par le lemme 5.10, appliqué à $\operatorname{Ad} d \in GL(\mathfrak{g})$. Alors $Y \in \operatorname{ad} \mathfrak{g}$.*

**Preuve.** Écrivons la décomposition de Jordan de $Y$ : soit $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tel que

$$gYg^{-1} = Y' = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_r \end{pmatrix},$$

où, pour $j \in [[1, r]]$, $J_j$ est le bloc de Jordan

$$J_j = \begin{pmatrix} i\theta_j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i\theta_j \end{pmatrix}.$$

De plus, les $\theta_j$ appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi[$ d'après le lemme 5.10.

D'après le corollaire 6.5 p. 132 de [Hel], comme l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple, le groupe adjoint $\operatorname{Ad} G$ coïncide avec la composante neutre $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})_0$ du groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$. Or $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe algébrique réel de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ : soit donc $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}[\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})]$ un idéal de polynômes tel que $\mathrm{Aut}(G)$ soit l'ensemble des zéros de $\mathcal{I}$ dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$.

Soit $Q \in \mathcal{I}$. Montrons que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q(\exp(tY)) = 0$ : calculons tout d'abord

$$\exp(tY') = \begin{pmatrix} \exp(tJ_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \exp(tJ_r) \end{pmatrix},$$

où, pour $j \in [[1, r]]$, et tous $a, b \in [[1, d_j]]$,

$$\exp(tJ_j)_{a,b} = \begin{cases} e^{it\theta_j} \frac{t^{b-a}}{(b-a)!} \text{ si } b \geqslant a \\ 0 \text{ si } b < a. \end{cases}$$

On peut donc écrire, en posant $Q'(h) = Q(g^{-1}hg)$ :

$$Q(\exp(tY)) = Q'(\exp(tY')) = \sum_{j \in J} q_j e^{it\alpha_j} t^{c_j}$$

où $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $c_j \in \mathbb{N}$ et $q_j \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ et $J$ est un ensemble fini (éventuellement vide). On peut supposer que les couples $(c_j, \alpha_j)$ sont distincts, pour $j \in J$. Or, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\exp(kY) = (\exp Y)^k = (\operatorname{Ad} d)^k \in \mathrm{Aut}(G)$ car $\operatorname{Ad} d \in \mathrm{Aut}(G)$, donc

$$\sum_{j \in J} q_j e^{ik\alpha_j} k^{c_j} = 0.$$

Montrons que, pour réel $t \in \mathbb{R}$ :

$$\sum_{j\in J} q_j e^{it\alpha_j} t^{c_j} = 0.$$

Supposons que $J$ soit non vide : soit alors $J' \subset J$ non vide tel que pour tout $j' \in J'$, l'entier $c_{j'}$ est maximal parmi les $c_j$, pour $j \in J$ : notons $c_{j'} = c$ cette valeur maximale commune. Alors, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{j\in J} q_j e^{ik\alpha_j} k^{c_j - c} = 0.$$

En prenant la limite lorsque $k$ tend vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{j\in J'} q_j e^{ik\alpha_j} = 0.$$

Choisissons une base $(\beta_1, ..., \beta_r)$ du $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par les $\alpha_j$, pour $j \in J'$, de sorte que pour tout $j \in J'$, nous ayons $\alpha_j = \sum_l n_{j,l}\beta_l$, avec les $n_{j,l} \in \mathbb{Z}$ entiers (quitte à mutiplier les $\beta_l$ par un entier). On peut ainsi écrire, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{j\in J'} q_j e^{ik\alpha_j} = \sum_{j\in J'} q_j \prod_l (e^{ik\beta_l})^{n_{j,l}}.$$

Quitte à multiplier cette expression par des puissances de $e^{ik\beta_l}$ si certains $n_{j,l}$ sont négatifs, il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_r]$ tel que :

$$\lim_{k\to+\infty} R(e^{ik\beta_1}, ..., e^{ik\beta_r}) = 0.$$

D'après le théorème d'approximation diophantienne simultanée de Kronecker (voir [Des, Théorème 2.4.5, p. 61]), comme les $\beta_l$ sont $\mathbb{Q}$-libres, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tous $b_1, ..., b_r$ réels, il existe un entier $k$ tel que pour tout $l \in [[1, r]]$, nous ayons $|k\beta_l - b_l| < \varepsilon$ (modulo $2\pi$). Donc, pour tous $b_1, ..., b_r$ réels, il existe une suite d'entiers $k_m$ tendant vers $+\infty$ tel que, pour tout $l \in [[1, r]]$, nous avons $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{ik_m\beta_l} = e^{ib_l}$. On conclut que, pour tous nombres complexes $z_1, ..., z_r$ de module 1, $R(z_1, ..., z_r) = 0$. Donc le polynôme $R$, qui s'annule sur un produit d'ensembles infinis, est nul. En conséquence, pour tout réel $t$, $R(e^{it\beta_1}, ..., e^{it\beta_r}) = 0$, donc

$$\sum_{j\in J'} q_j e^{it\alpha_j} = 0.$$

Or les $\alpha_j$, pour $j \in J'$, sont distincts, donc les fonctions $t \mapsto e^{it\alpha_j}$ sont libres : ainsi, $q_j = 0$ pour tout $j \in J'$ : c'est une contradiction.

En conclusion, on a donc montré que pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$Q(\exp(tY)) = Q'(\exp(tY')) = \sum_{j\in J} q_j e^{it\alpha_j} t^{c_j} = 0.$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, et pour tout polynôme $Q$ de l'idéal $\mathcal{I}$, nous avons $Q(\exp(tY)) = 0$ : ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tY) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. En dérivant ce sous-groupe à un paramètre en $t = 0$, on en déduit que $Y \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$. $\square$

**Proposition 5.12.** *Soit $G$ un groupe de Lie semi-simple connexe de centre trivial, et $d \in G$ un élément distal. Alors il existe un élément $X \in \mathfrak{g}$ tel que* $\exp X = d$, *et tel que l'exponentielle* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *soit un difféomorphisme local en $X$.*

**Preuve.** D'après le lemme 5.10 appliqué à l'élément distal $\mathrm{Ad}\,d$, il existe $Y \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ tel que $\exp(Y) = \mathrm{Ad}\,d$ et tel que l'application exponentielle de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ soit un difféomorphisme local en $Y$. D'après le lemme 5.11, nous avons $Y \in \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ : soit $X \in \mathfrak{g}$ tel que $Y = \mathrm{ad}\,X$.

Puisque $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ et $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ sont des plongements qui commutent à l'exponentielle, et que l'application $\exp : \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est un difféomorphisme local en $Y = \mathrm{ad}\,X$, on en déduit que $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est un difféomorphisme local en $X$. De plus $\exp(\mathrm{ad}\,X) = \mathrm{Ad}(\exp X) = \mathrm{Ad}\,d$, donc comme $G$ est de centre trivial nous avons $\exp X = d$. $\square$

## 5.3 Détermination des groupes au bord

On appelle *groupes au bord* les éléments de $\overline{X}^{\mathcal{G}} \backslash \phi(X)$.

Fixons $I$ une partie propre de $\Delta$. L'ensemble $\overline{\mathfrak{a}_I^+} = \mathfrak{a}_I \cap \overline{\mathfrak{a}^+}$ est muni d'un structure de cône simplicial fermé (voir définition dans la section 6.1) :

$$\overline{\mathfrak{a}_I^+} = (\cap_{\alpha \in I} \mathrm{Ker}\,\alpha) \cap \left(\cap_{\alpha \in \Delta \backslash I} \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) \geqslant 0\}\right).$$

Les murs du cône $\overline{\mathfrak{a}_I^+}$ sont constitués des

$$(\cap_{\alpha \in J} \mathrm{Ker}\,\alpha) \cap \left(\cap_{\alpha \in \Delta \backslash J} \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) \geqslant 0\}\right),$$

où $J$ est une partie de $\Delta$ contenant strictement $I$.

Notons $\mathfrak{a}_I$ l'intérieur de $\overline{\mathfrak{a}_I^+}$ dans l'espace vectoriel $\mathfrak{a}_I$ : c'est un cône simplicial ouvert.

$$\mathfrak{a}_I^+ = (\cap_{\alpha \in I} \mathrm{Ker}\,\alpha) \cap \left(\cap_{\alpha \in \Delta \backslash I} \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) > 0\}\right).$$

On dit qu'une suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathfrak{a}_I^+$ *tend vers* $+\infty$ *dans* $\mathfrak{a}_I^+$ si, pour toute racine $\alpha \in \Delta \backslash I$, nous avons $\alpha(H_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, c'est-à-dire que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'éloigne de chacun des murs du cône $\mathfrak{a}_I^+$. L'exponentielle réalisant un difféomorphisme de $\mathfrak{a}_I^+$ sur $A_I^+ = A_I \cap A^+$, on dit qu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $A_I^+$ tend vers $+\infty$ dans $A_I^+$ si la suite $(\log a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ dans $\mathfrak{a}_I^+$.

Notons de plus $D^I = K^I M N_I$.

**Exemple.** Pour $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $K = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ et $I = \{\alpha_{i,i+1}, \alpha_{j,j+1}\}$, où $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ :

$$D^I = \left\{ \begin{pmatrix} U_i & * & * \\ 0 & U_{j-i} & * \\ 0 & 0 & U_{n-j} \end{pmatrix} \in G : U_k \in \mathrm{O}(k,\mathbb{R}) \right\}.$$

**Proposition 5.13.** *Le sous-groupe $M$ normalise $K^I$, donc $K^I M$ est un sous-groupe de Lie de $G$. Le sous-groupe $K^I M$ normalise $N_I$, donc $D^I = K^I M N_I$ est un sous-groupe de Lie de $G$, d'algèbre de Lie notée $\mathfrak{d}^I = (\mathfrak{k}^I + \mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{n}_I$.*

**Preuve.** Montrons que le sous-groupe $M$ normalise l'algèbre de Lie $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_I)$ : soient $m \in M$, $X \in \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_I)$ et $H \in \mathfrak{a}_I$. Puisque $M$ centralise $\mathfrak{a}$, nous avons

$$\mathrm{ad}(\mathrm{Ad}\, m(X))H = [\mathrm{Ad}\, m(X), H] = \mathrm{Ad}\, m([X, \mathrm{Ad}\, m^{-1}(H)]) = \mathrm{Ad}\, m([X,H]) = 0.$$

Ainsi, $\mathrm{Ad}\, m(X) \in \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_I)$ donc $M$ normalise $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_I)$. Donc $M$ normalise également son algèbre dérivée $D(\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_I)) = \mathfrak{g}^I$, puis $M$ normalise le sous-groupe de Lie connexe $G^I$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^I$. Or $M$ est un sous-groupe de $K$, donc $M$ normalise $G^I \cap K = K^I$. Ainsi, $K^I M$ est un groupe compact.

Le groupe $M$ normalise l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_I$ : soient $m \in M$, $\alpha \in \Sigma$, $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $H \in \mathfrak{a}$. Alors

$$\mathrm{ad}(\mathrm{Ad}\, m(X))H = \mathrm{Ad}\, m([X, \mathrm{Ad}\, m^{-1}(H)]) = \mathrm{Ad}\, m([X,H]) = \alpha(H)\, \mathrm{Ad}\, m(X).$$

Donc le groupe $M$ normalise tous les espaces de racines $\mathfrak{g}_\alpha$, donc en particulier $M$ normalise l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_I$.

Soit $X \in \mathfrak{k}_I$, écrivons la décomposition de $X$ en espaces de racines $X = X_0 + \Sigma_{\alpha \in \Sigma^I} X_\alpha$, où $X_0 \in \mathfrak{m}^I$ et $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ pour toute racine $\alpha \in \Sigma^I$. Soit $Y \in \mathfrak{n}_I$, écrivons sa décomposition en espaces de racines $Y = \Sigma_{\beta \in \Sigma_I^+} Y_\beta$, où $Y_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ pour toute racine $\beta \in \Sigma_I^+$. Soient $\alpha \in \Sigma^I$ et $\beta \in \Sigma_I^+$. Si $\alpha + \beta$ est une racine, celle-ci doit appartenir à $\Sigma_I^+$, car dans l'écriture de $\alpha + \beta$ sur la base $\Delta$, l'une des coordonnées des racines de $\Delta \backslash I$ est strictement positive. Donc $[X, Y] \in \mathfrak{n}_I$. Ainsi l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_I$ normalise $\mathfrak{n}_I$, puis le groupe connexe $K^I$ normalise $\mathfrak{n}_I$, donc le groupe $K^I M$ normalise l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_I$ et également le groupe de Lie $N_I$. Par conséquent, $D^I = K^I M N_I$ est un sous-groupe de Lie de $G$ (le groupe $D^I$ est fermé car $K^I M$ est compact et $N_I$ est fermé). □

**Proposition 5.14.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $A_I^+$ tendant vers $+\infty$ dans $A_I^+$. Alors la suite de sous-groupes fermés $(a_n K a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $D^I$ dans $\mathcal{G}(G)$.*

**Exemple.** Pour $G = \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$, $K = \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ et $I = \{\alpha_{1,2}\}$, soit

$$a_n = \begin{pmatrix} \lambda_n^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} \in A_I^+,$$

où $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors on peut vérifier dans ce cas particulier que la suite de sous-groupes fermés $a_n\,\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})a_n^{-1}$ converge vers le sous-groupe fermé

$$D^I = \begin{pmatrix} \mathrm{O}(2) & * \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \subset \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}).$$

Fixons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme dans cet énoncé. Puisque $\mathcal{G}(G)$ est compact, pour montrer cette proposition, il suffit de montrer que toute valeur d'adhérence de la suite $(a_nKa_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à $D^I$ : soit $D$ une valeur d'adhérence. Supposons, quitte à extraire une sous-suite, que la suite $(a_nKa_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $D$. La preuve de cette proposition, que nous donnerons plus loin, repose alors sur les lemmes suivants.

**Lemme 5.15.** *Nous avons l'inclusion $D^I \subset D$.*

**Preuve.** Montrons que $N_I \subset D$ : soit $y \in N_I$. Notons $H_n \in \mathfrak{a}_I$ et $Y \in \mathfrak{n}_I$ tels que $\exp H_n = a_n$ et $\exp Y = y$. Ecrivons de plus $Y = \Sigma_{\alpha\in\Sigma_I^+} Y_\alpha$, où $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Sigma_I^+$. Alors

$$a_n^{-1}ya_n = \exp(\mathrm{Ad}\, a_n^{-1}(Y)) = \exp(\Sigma_{\alpha\in\Sigma_I^+} \exp(-\,\mathrm{ad}\, H_n)Y_\alpha) = \exp(\Sigma_{\alpha\in\Sigma_I^+} e^{-\alpha(H_n)}Y_\alpha).$$

Or l'hypothèse que $a_n$ tend vers $+\infty$ dans $A_I^+$ signifie que $\alpha(H_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ pour tout $\alpha \in \Sigma_I^+$. Donc $a_n^{-1}ya_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$. Or, d'après la décomposition d'Iwasawa $G = KAN^-$, soient $k_n \in K$, $a'_n \in A$ et $y'_n \in N^-$ tels que $a_n^{-1}ya_n = k_na'_ny'_n$. Par continuité de la décomposition d'Iwasawa, $k_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$, $a'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$ et $y'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$. Ainsi $a_nk_na_n^{-1} = y(a_ny'_na_n^{-1})^{-1}a_n'^{-1}$. Puisque $N^-$ est égal au produit semi-direct $N^- = N_I^- \rtimes N^{I,-}$ (voir la proposition 2.12), écrivons $y'_n = y_n'^{I}y'_{n,I}$, où $y_n'^{I} \in N^{I,-}$ et $y'_{n,I} \in N_I^-$. Par continuité de cette décomposition, nous savons que $y_n'^{I} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$ et $y'_{n,I} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$.

Ainsi, puisque $N^{I,-}$ et $A_I$ commutent, nous avons $a_ny'_na_n^{-1} = y_n'^{I}a_ny'_{n,I}a_n^{-1}$. Soit $Y'_{n,I} \in \mathfrak{n}_I^-$ tel que $\exp Y'_{n,I} = y'_{n,I}$, alors on peut écrire $Y'_{n,I} = \Sigma_{\alpha\in\Sigma_I^-} Y'_{n,\alpha}$, où $Y'_{n,\alpha} \in \mathfrak{g}_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Sigma_I^-$. Ainsi, $a_ny'_{n,I}a_n^{-1} = \exp(\Sigma_{\alpha\in\Sigma_I^-} e^{\alpha(H_n)}Y'_{n,\alpha})$. Comme $\alpha \in \Sigma_I^-$ et $H_n \in \mathfrak{a}_I$, nous avons $\alpha(H_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, et $a_ny'_na_n^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$. Puisque $a'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$, on en déduit que $y = \lim\limits_{n\to+\infty} (a_nk_na_n^{-1})a'_n(a_ny'_na_n^{-1}) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_nk_na_n^{-1} \in D$.

Montrons que $K^IM \subset D$. Puisque $M = Z_K(\mathfrak{a})$, on en déduit que $M$ commute à $A_I$. Par ailleurs, puisque $K^I \subset G^I \subset Z_G(\mathfrak{a}_I)$, le groupe $K^I$ commute à $A_I$. Soit $k \in K^IM \subset K$, alors $k = a_nka_n^{-1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, donc $k \in D$.

Finalement, $D^I = K^IMN_I \subset D$. □

**Lemme 5.16.** *Soit $X \in \mathfrak{g}$ tel que $\exp X \in K$. Alors $X \in \mathfrak{k}$.*

**Preuve.** Remarquons que $\operatorname{Ad} \exp X = \exp \operatorname{ad} X \in \operatorname{Ad} K \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. Or $\operatorname{Ad} K$ est constitué d'endomorphismes orthogonaux pour le produit scalaire $B_\theta$. Dans l'espace vectoriel complexifié $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, l'endomorphisme $\exp \operatorname{ad} X$ est donc diagonalisable. Écrivons la décomposition de Dunford $\operatorname{ad} X = M_d + M_n$ de $\operatorname{ad} X$ dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, c'est-à-dire $M_d$ est diagonalisable, $M_n$ est nilpotent et $M_d$ et $M_n$ commutent. La décomposition de Dunford de $\exp \operatorname{ad} X$ est alors $\exp \operatorname{ad} X = \exp M_d + \exp M_d(\exp M_n - \mathrm{Id})$. Par unicité de la décomposition de Dunford, on en déduit que $\exp M_d(\exp M_n - \mathrm{Id}) = 0$, puis que $\exp M_n = \mathrm{Id}$. L'endomorphisme nilpotent $M_n$, annulé par les deux polynômes $X^n$ et $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{X^k}{k!}$ (où $n = \dim \mathfrak{g}$). Or ceux-ci ont pour pgcd $X$, ce qui signifie que $M_n = 0$. Ainsi $\operatorname{ad} X = M_d$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Si l'on choisit une base de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ telle que la matrice de $\exp \operatorname{ad} X$ soit $\operatorname{Diag}(e^{-i\theta_1}, e^{i\theta_1}, \dots, e^{-i\theta_r}, e^{i\theta_r})$ si $\dim \mathfrak{g}$ est paire (resp. $\operatorname{Diag}(e^{-i\theta_1}, e^{i\theta_1}, \dots, e^{-i\theta_r}, e^{i\theta_r}, 1)$ si $\dim \mathfrak{g}$ est impaire). Alors il existe des entiers $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z}$ tels que la matrice de $\operatorname{ad} X$ dans cette base soit égale à $\operatorname{Diag}(-i\theta_1 - 2im_1\pi, i\theta_1 + 2im_1\pi, \dots, -i\theta_r - 2im_r\pi, i\theta_r + 2im_r\pi)$ si $\dim \mathfrak{g}$ est paire (resp. $\operatorname{Diag}(-i\theta_1 - 2im_1\pi, i\theta_1 + 2im_1\pi, \dots, -i\theta_r - 2im_r\pi, i\theta_r + 2im_r\pi, 0)$ si $\dim \mathfrak{g}$ est impaire : en effet, le dernier coefficient est 0 car le c'est le spectre d'une matrice réelle). Ainsi, en tant qu'endomorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$, l'endomorphisme $\operatorname{ad} X$ est antisymétrique pour le produit scalaire $B_\theta$. Or l'adjoint pour $B_\theta$ de $\operatorname{ad} X$ est $-\operatorname{ad} \theta(X)$, ce qui signifie que $\operatorname{ad} \theta(X) = \operatorname{ad} X$. Or $\mathfrak{g}$ est semi-simple, donc l'application ad est injective : ainsi $\theta(X) = X$. Par définition, c'est dire que $X \in \mathfrak{k}$. □

**Lemme 5.17.** *Si $G$ est de centre trivial, nous avons l'inclusion $D \subset D^I$.*

**Preuve.** Soit $d \in D$, montrons que $d \in D^I$. D'après la proposition 5.12, il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que $\exp X = d$ et tel que l'exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \to G$ soit un difféomorphisme local en $X$.

Puisque $a_n K a_n^{-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} D$, soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $K$ telle que

$$a_n k_n a_n^{-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \exp X.$$

Notons $H_n \in \mathfrak{a}_I$ tel que $\exp H_n = a_n$. Comme, par hypothèse, exp réalise un difféomorphisme local en $X$, il existe une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathfrak{g}$ convergeant vers $X$ telle que $\exp X_n = a_n k_n a_n^{-1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Posons $U_n = \operatorname{Ad}(a_n^{-1})(X_n) \in \mathfrak{g}$, de sorte que $\exp U_n = k_n \in K$. D'après le lemme 5.16, nous avons $U_n \in \mathfrak{k}$.

Alors $\operatorname{Ad} a_n(U_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} X$. Écrivons les décompositions $X = X_0 + \sum_{\alpha\in\Sigma} X_\alpha$ et $U_n = U_{n,0} + \sum_{\alpha\in\Sigma} U_{n,\alpha}$ selon la décomposition en espaces de racines de $\mathfrak{g}$. Remarquons que, pour toute racine $\alpha \in \Sigma$, l'élément $U_{n,\alpha} + U_{n,-\alpha}$ appartient à $\mathfrak{k}$ : en effet, il est $\theta$-invariant car $U_n \in \mathfrak{k}$ implique que $U_{n,\alpha} = \theta(U_{n,-\alpha})$. Par conséquent, l'élément $U_{n,0}$ appartient lui aussi à $\mathfrak{k}$.

Pour toute racine $\alpha \in \Sigma$, nous avons $\operatorname{Ad} a_n(U_{n,\alpha}) \in \mathfrak{g}_\alpha$ car $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_0$ préserve la décomposition en espaces de racines. Ainsi pour toute racine $\alpha \in \Sigma$, la projection sur $\mathfrak{g}_\alpha$ parallèlement à $\mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\beta \in \Sigma \setminus \{\alpha\}} \mathfrak{g}_\beta$ étant continue, on en déduit que $\operatorname{Ad} a_n(U_{n,\alpha}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Y_\alpha$. Or $\operatorname{Ad} a_n(U_{n,\alpha}) = \exp(\operatorname{ad} H_n) U_{n,\alpha} = e^{\alpha(H_n)} U_{n,\alpha}$.

Pour toute racine $\alpha \in \Sigma^I$, nous avons $\alpha(H_n) = 0$ donc $X_\alpha + X_{-\alpha} = \lim_{n\to+\infty} U_{n,\alpha} + U_{n,-\alpha} \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}^I = \mathfrak{k}^I$.

Pour toute racine $\alpha \in \Sigma_I^+$, nous avons $\alpha(H_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, or $e^{\alpha(H_n)} U_{n,\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X_\alpha$, donc $U_{n,\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus $U_n \in \mathfrak{k}$, donc $U_{n,\alpha} = \theta(U_{n,-\alpha})$. Ainsi, $U_{n,-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $X_{-\alpha} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\alpha(H_n)} U_{n,-\alpha} = 0$.

Par ailleurs, la projection sur $\mathfrak{g}_0$ parallèlement à $\bigoplus_{\alpha\in\Sigma} \mathfrak{g}_\alpha$ étant continue, on en déduit que $\operatorname{Ad} a_n(U_{n,0}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X_0$. Or $U_{n,0} \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$, donc $\operatorname{Ad} a_n(U_{n,0}) = U_{n,0}$ et $X_0 = \lim_{n\to+\infty} U_{n,0} \in \mathfrak{m}$.

En résumé $X \in \mathfrak{k}^I + \mathfrak{m} + \mathfrak{n}_I$. Or c'est l'algèbre de Lie du sous-groupe de Lie $D^I = K^I M N_I$, donc $d = \exp X \in D^I$. □

**Preuve de la proposition 5.14.** L'inclusion $D^I \subset D$ est montrée dans le lemme 5.15, et dans le cas où $G$ est de centre trivial l'inclusion $D \subset D^I$ est montrée dans le lemme 5.17. Finalement la suite $(a_n K a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $D^I$ dans $\mathcal{G}(G)$.

Si maintenant $G$ a un centre non trivial $Z(G)$ (fini), alors considérons le quotient $G/Z(G)$ et notons $\pi : G \to G/Z(G)$ la projection canonique. Le groupe de Lie $G/Z(G)$ a un centre trivial, donc d'après la première partie de la preuve on en déduit que la suite $(\pi(a_n K a_n^{-1}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\pi(D^I)$ dans $\mathcal{G}(G/Z(G))$. Or, d'après la proposition 4.4, la suite $(\pi^{-1}(\pi(a_n K a_n^{-1}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\pi^{-1}(\pi(D^I))$ dans $\mathcal{G}(G)$. Or $Z(G) \subset M \subset a_n K a_n^{-1}$, donc $\pi^{-1}(\pi(a_n K a_n^{-1})) = a_n K a_n^{-1}$, et de même $Z(G) \subset M \subset D^I$, donc $\pi^{-1}(\pi(D^I)) = D^I$. Finalement, la suite $(a_n K a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $D^I$ dans $\mathcal{G}(G)$. □

Nous pouvons maintenant démontrer la première partie du théorème annoncé dans l'introduction.

**Théorème 5.18.** *Soit $D \in \overline{X}^{\mathcal{G}} \setminus X$ un groupe au bord. Alors il existe $I$ une partie propre de $\Delta$, $a \in \overline{A^{I,+}}$ et $k \in K$ tels que*

$$D = k a D^I a^{-1} k^{-1}.$$

**Preuve.** Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $G$ telle que $D = \lim_{n\to+\infty} g_n K g_n^{-1}$. Soit $g_n = k_n a_n k'_n$ l'écriture de $g_n$ dans la décomposition $K\overline{A^+}K$ de $G$ : ainsi, $k_n, k'_n \in K$ et $a_n \in \overline{A^+}$. Soit $I \subset \Delta$ l'ensemble des $\alpha \in \Delta$ tels que la suite $(\alpha(\log a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. On ne peut avoir $I = \Delta$ car sinon la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait bornée, donc convergerait à extraction près vers un élément $g \in G$, or $D = gKg^{-1}$ n'est pas un groupe au bord.

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $k \in K$ et que :

$$\begin{array}{rll} & \forall i \in I, & \text{la suite } (\alpha_i(\log a_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \\ \text{et} & \forall i \in I\backslash\Delta, & \text{la suite } (\alpha_i(\log a_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } +\infty. \end{array}$$

Alors, si l'on écrit la décomposition $a_n = a_n^I a_{n,I}$, où $a_n^I \in A^I$ et $a_{n,I} \in A_I$, ceci revient à dire que $(a_n^I)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \in A^I \cap \overline{A^+} = \overline{A^{I,+}}$ et que $(a_{n,I})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ dans $A_I$. D'après la proposition 5.14, la suite $a_{n,I}Ka_{n,I}^{-1}$ converge dans $\mathcal{G}(G)$ vers $D^I$. Donc

$$D = \lim_{n\to+\infty} g_nKg_n^{-1} = \lim_{n\to+\infty} k_na_n^I(a_{n,I}K(a_{n,I})^{-1})a_n^{I\,-1}k_n^{-1} = kaD^Ia^{-1}k^{-1}.$$

□

Nous démontrons ensuite la fin du théorème annoncé dans l'introduction.

**Théorème 5.19.** *Cette écriture est unique au sens suivant : soient $I_1, I_2$ deux parties propres de $\Delta$, $a_1 \in \overline{A^{I_1,+}}$, $a_2 \in \overline{A^{I_2,+}}$ et $k_1, k_2 \in K$ tels que*

$$k_1a_1D^{I_1}a_1{}^{-1}k_1^{-1} = k_2a_2D^{I_2}a_2{}^{-1}k_2^{-1},$$

*alors cela implique que*

$$I_1 = I_2 = I, a_1 = a_2 = a \text{ et } k_2^{-1}k_1 \in (K^I \cap aK^Ia^{-1})M.$$

*De plus, la réciproque est vraie.*

**Lemme 5.20.** *La sous-algèbre de Lie $\mathfrak{n}_I$ est le radical unipotent de $\mathfrak{d}^I$, c'est-à-dire le plus grand idéal nilpotent.*

**Preuve.** La sous-algèbre de Lie $\mathfrak{n}_I$ est un idéal de $\mathfrak{d}^I$, car $N^I$ est distingué dans $D^I$ d'après la proposition 5.13. De plus, l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_I$ est nilpotente car contenue dans l'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$. Ainsi le radical unipotent $R_u(\mathfrak{d}^I)$ de $\mathfrak{d}^I$ contient $\mathfrak{n}_I$.

Supposons qu'il existe $X \in R_u(\mathfrak{d}^I)\backslash\mathfrak{n}_I$, alors on peut supposer que $X \in \mathfrak{k}^I + \mathfrak{m}$. Alors $\mathrm{ad}_{\mathfrak{d}^I} X$ est un endomorphisme antisymétrique et nilpotent de $\mathfrak{d}^I$, donc $\mathrm{ad}_{\mathfrak{d}^I} X = 0$. Ainsi $X$ appartient au centre de $\mathfrak{d}^I$, donc en particulier $X$ appartient au centre de $\mathfrak{k}^I + \mathfrak{m}$. Or la forme de Killing sur $\mathfrak{k}^I + \mathfrak{m}$ est la restriction de la forme de Killing $B$ de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{k}^I + \mathfrak{m}$ : elle est donc définie négative. En particulier, elle est non dégénérée, donc l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}^I + \mathfrak{m}$ est semi-simple, et son centre est trivial : ainsi, $X = 0$.

En conclusion, la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{n}_I$ est le radical unipotent de $\mathfrak{d}^I$. □

**Lemme 5.21.** *Le normalisateur de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{n}_I$ *dans* $G$ *est* $P^I = K^I MAN$.

**Preuve.** L'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_I$ est normalisée par le sous-groupe $AN$.

Soit $k \in K$, et soit $U \in \mathfrak{k}$ tel que $\exp U = k$. Écrivons la décomposition $U = U_0 + \Sigma_{\alpha\in\Sigma} U_\alpha$ de $U$ en espaces de racines.

Si $k \in K^I M$, alors pour toutes racines $\alpha \in \Sigma^I$ et $\beta \in \Sigma_I^+$, si $\alpha + \beta$ est une racine, alors $\alpha + \beta \in \sigma_I^+$, donc $[U_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{n}_I$. Par ailleurs $[U_0, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{n}_I$. Par conséquent, nous avons $[U, \mathfrak{n}_I] \subset \mathfrak{n}_I$. Donc $k$ normalise l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_I$.

Si $k \notin K^I M$, il existe une racine $\alpha \in \Sigma_I^+$ telle que $U_\alpha \neq 0$. Alors $U_\alpha \in \mathfrak{n}_I$, et la composante sur $\mathfrak{g}_0$ de $[U, U_\alpha]$ dans la décomposition en espaces de racines est $[U_{-\alpha}, U_\alpha] = [\theta(U_\alpha), U_\alpha]$ car $U \in \mathfrak{k}$. Soit $H \in \mathfrak{a}$ tel que $\alpha(H) \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} B([\theta(U_\alpha), U_\alpha], H) &= B([U_\alpha, H], \theta(U_\alpha)) \\ &= B(-\alpha(H) U_\alpha, \theta(U_\alpha)) \\ &= \alpha(H) B_\theta(U_\alpha, U_\alpha) \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $[\theta(U_\alpha), U_\alpha] \neq 0$ : par conséquent, le vecteur $[U, U_\alpha]$ n'appartient pas à $\mathfrak{n}_I$, donc $U$ n'appartient pas au normalisateur de $\mathfrak{n}_I$, et par conséquent $k$ ne normalise pas l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_I$.

En résumé, le normalisateur de l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_I$ dans $G$ est $K^I MAN$. □

**Lemme 5.22.** *Le normalisateur du sous-groupe* $D^I$ *dans* $G$ *est* $K^I M A_I N_I$.

**Preuve.** Notons $L$ le normalisateur du sous-groupe $D^I$ dans $G$. Alors $L$ normalise également le radical unipotent $\mathfrak{n}_I$ de son algèbre de Lie $\mathfrak{d}^I$. Ainsi $L$ est inclus dans le normalisateur $P^I = K^I MAN$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_I$. Soit $x \in A^I N^I \cap L$, alors pour tout $k \in K^I$, nous avons $xkx^{-1} \in D^I \cap G^I$. Or $D^I \cap G^I = K^I$, donc $xkx^{-1} \in K^I$. Ceci étant vrai pour tout $k \in K^I$, on en déduit que $xK^I x^{-1} = K^I$. D'après la proposition 5.3 appliquée au groupe $G^I$, on en déduit que $x \in K^I$. Par conséquent, le normalisateur du sous-groupe $D^I$ dans $G$ est $K^I M A_I N_I$. □

**Preuve du théorème 5.19.** (voir [GJT, Proposition 9.116, p. 139])

Puisque les groupes $k_1 a_1 D^{I_1} {a_1}^{-1} k_1^{-1}$ et $k_2 a_2 D^{I_2} {a_2}^{-1} k_2^{-1}$ sont égaux, on en déduit que les radicaux unipotents de leurs algèbres de Lie sont égaux, donc d'après le lemme 5.20, nous avons $\mathrm{Ad}(k_1 a_1)\mathfrak{n}_{I_1} = \mathrm{Ad}(k_2 a_2)\mathfrak{n}_{I_2}$. Or $A$ normalise $\mathfrak{n}_{I_1}$ et $\mathfrak{n}_{I_2}$, donc si l'on pose $k = k_1^{-1} k_2$ nous avons $\mathfrak{n}_{I_1} = \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{n}_{I_2}$. Par conséquent, nous avons également $N_{I_1} = k N_{I_2} k^{-1}$, donc d'après le lemme 5.21 leurs normalisateurs $P^{I_1} = k P^{I_2} k^{-1}$ sont égaux.

Or, d'après le paragraphe [War, 1.2.3, pp. 55-70], la paire $(G, MAN)$ forme un système de Tits, donc d'après le théorème [War, Theorem 1.2.1.1, p. 46], les sous-groupes $(P^I)_{I\subset\Delta}$ sont deux à deux non conjugués, et chacun est égal à son propre normalisateur. Ainsi, $I_1 = I_2 = I$ et $k \in P^I$. Or $k \in K$, donc $k \in P^I \cap K = K^I M$.

Enfin $D^I = (a_1^{-1} k a_2) D^I (a_1^{-1} k a_2)^{-1}$, donc d'après le lemme 5.22, nous avons $a_1^{-1} k a_2 \in K^I M A_I N_I$. Or $a_1^{-1} k a_2 \in A^I K^I M A^I \subset G^I M = K^I M A^I N^I$, donc

$a_1^{-1}ka_2 \in K^I M$. Par unicité du facteur $\overline{A^+}$ dans la décomposition de Cartan $G = K\overline{A^+}K$, on en déduit que $a_1 = a_2 = a$. Et l'élément $k$ appartient à $K^I M \cap aK^I M a^{-1} = (K^I \cap aK^I a^{-1})M$.

Pour montrer la réciproque, soient $I \subsetneq \Delta$ une partie propre de $\Delta$, $a \in \overline{A^{I,+}}$ et $k_1, k_2 \in K$ tels que $k_1^{-1}k_2 \in (K^I \cap aK^I a^{-1})M$. Alors $a^{-1}k_1^{-1}k_2 a \in K^I M \subset D^I$, donc

$$k_1 a D^I a^{-1} k_1^{-1} = k_2 a D^I a^{-1} k_2^{-1}.$$

□

# 6 Application à la compactification polyédrale

## 6.1 Compactification polyédrale d'un espace vectoriel

Deux références pour la compactification polyédrale sont [Lan, § I.2, p. 21] et [Rém].

Soit $V$ un espace vectoriel réel de dimension finie $r$. Un cône fermé $C$ de $V$ est appelé *cône simplicial fermé* s'il est engendré en tant que cône par des vecteurs linéairement indépendants de $V$. Si $C \subset V$ est un cône simplicial fermé, et si $W \subset V$ désigne le sous-espace vectoriel de $V$ engendré par $C$, l'intérieur de $C$ dans $W$ est appelé *cône simplicial ouvert*.

Soit $\Sigma$ un ensemble fini non vide de formes linéaires non nulles sur $V$, stable par $\alpha \mapsto -\alpha$, tel qu'on obtienne une partition de $V \backslash \{0\}$ indexée par les partitions $\Sigma = \Sigma_0 \sqcup \Sigma_+ \sqcup \Sigma_-$ de $\Sigma$ en trois parties de $\Sigma$, en cônes simpliciaux ouverts du type

$$F = \{x \in V \backslash \{0\} : \forall \alpha \in \Sigma_0, \alpha(x) = 0,\ \forall \alpha \in \Sigma_+, \alpha(x) > 0 \text{ et } \forall \alpha \in \Sigma_-, \alpha(x) < 0\}.$$

On appelle *facettes* l'ensemble de ces cônes, ainsi que $\{0\}$, et on note $\mathcal{F}$ l'ensemble des facettes. On appelle *chambre* une facette de dimension maximale $r$ : une chambre est une composante connexe du complémentaire de $\cup_{\alpha \in \Sigma} \operatorname{Ker} \alpha$ dans $V$, car elle correspond à une partition $\Sigma = \Sigma_0 \sqcup \Sigma_+ \sqcup \Sigma_-$ de $\Sigma$ telle que $\Sigma_0$ soit vide. On note l'ensemble des chambres $\mathcal{F}_0$. Si $F$ est une chambre, on note $\langle F \rangle$ le sous-espace vectoriel de $V$ engendré par $F$ : si la face $\langle F \rangle$ correspond à la partition $\Sigma = \Sigma_0 \sqcup \Sigma_+ \sqcup \Sigma_-$ de $\Sigma$, alors $\langle F \rangle = \cap_{\alpha \in \Sigma_0} \operatorname{Ker} \alpha$.

En choisissant un produit scalaire sur $V$, on identifie $V / \langle F \rangle$ et $\langle F \rangle^\perp$ grâce à la projection orthogonale sur $\langle F \rangle^\perp$. On définit la *compactification polyédrale* de $V$ comme

$$\overline{V}^p = \bigsqcup_{F \in \mathcal{F}} V / \langle F \rangle.$$

Définissons une topologie sur $\overline{V}^p$.

Si $F_0 \in \mathcal{F}_0$ est une chambre, on appelle *coin* associé à $F_0$ le sous-ensemble de $\overline{V}^p$ :

$$C_{F_0} = \bigsqcup_{F \in \mathcal{F},\ F \subset \overline{F_0}} V / \langle F \rangle$$

où $\overline{F_0}$ désigne l'adhérence de $F_0$ dans $V$. Remarquons que le coin $C_{F_0}$ contient une copie de $V$, pour la facette $\{0\}$. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \Sigma$ tels que $F_0 = \{x \in V : \forall i \in [[1, r]], \alpha_i(x) > 0\}$ (il y a exactement $r$ formes linéaires, car les chambres sont des cônes simpliciaux ouverts de dimension $r$). Ceci permet de considérer l'application :

$$\beta : C_{F_0} \;\to\; ]-\infty,+\infty]^r \qquad (3)$$
$$x \in V/\langle F\rangle \;\mapsto\; (\beta(x)_i)_{i\in[[1,r]]} \qquad (4)$$

$$\text{où } \beta(x)_i = \begin{cases} \alpha_i(x) & \text{si } \alpha_i|_F = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha_i|_F > 0 \end{cases} .$$

L'application $\beta$ est une bijection : si $F \in \mathcal{F}$ est une facette telle que $F \subset \overline{F_0}$, alors $\beta$ est une bijection de $V/\langle F\rangle$ sur $E_1 \times \ldots \times E_r$, où $E_i = ]-\infty,+\infty[$ si $\alpha_i|_F = 0$ et $E_i = \{+\infty\}$ si $\alpha_i|_F > 0$. En effet, $\{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$ forme une base du dual de $V$, donc $\{\alpha_i : \alpha_i|_F = 0\}$ forme une base du dual de $V/\langle F\rangle$.

Posons sur $C_{F_0} \subset \overline{V}^p$ la topologie qui fait de la bijection $\beta$ un homéomorphisme de $C_{F_0}$ sur $]-\infty,+\infty]^r$, muni de la topologie usuelle. Une base d'ouverts de la topologie sur $]-\infty,+\infty]^r$ est fournie par les produits d'intervalles du type $]a,b[$ ou $]a,+\infty]$. Si $J$ est une partie de $[[1,r]]$, définissons $E_J = E_1 \times \ldots \times E_r$, où $E_i = [0,+\infty]$ si $i \in J$ et $E_i = \{0\}$ si $i \notin J$. Alors une autre base d'ouverts de la topologie sur $]-\infty,+\infty]^r$ est fournie par les ouverts

$$O_{J,U} = U + E_J$$

où $J$ est une partie de $[[1,r]]$ et $U$ est un ouvert de $]-\infty,+\infty[\,^r$.

On en déduit une base d'ouverts de la topologie du coin $C_{F_0}$ :

$$O_{F,U} = \bigcup_{F'\in\mathcal{F},\, F'\subset\overline{F}} \pi_{F'}(U + \overline{F})$$

où $F$ est une facette de $F_0$ d'adhérence $\overline{F}$ dans $V$, $U$ est un ouvert de $V$ et $\pi_{F'}$ désigne la projection $\pi_{F'} : V \to V/\langle F'\rangle$ : voir la figure 2.

$V/\langle F\rangle$

$+\infty$

$V/\langle F'\rangle$

$0$

$0$

$+\infty$

Fig. 2 – Des ouverts dans la compactification polyédrale d'un coin

On pose sur $\overline{V}^p$ la topologie faible définie par la famille $(C_{F_0})_{F \in \mathcal{F}_0}$. Elle se définit ainsi : une partie $U \subset \overline{V}^p$ est ouverte si et seulement si, pour toute chambre $F_0 \in \mathcal{F}_0$, la partie $U \cap C_{F_0}$ est ouverte dans $C_{F_0}$.

Voici comment se faire une idée de la convergence de suites dans la compactification polyédrale :

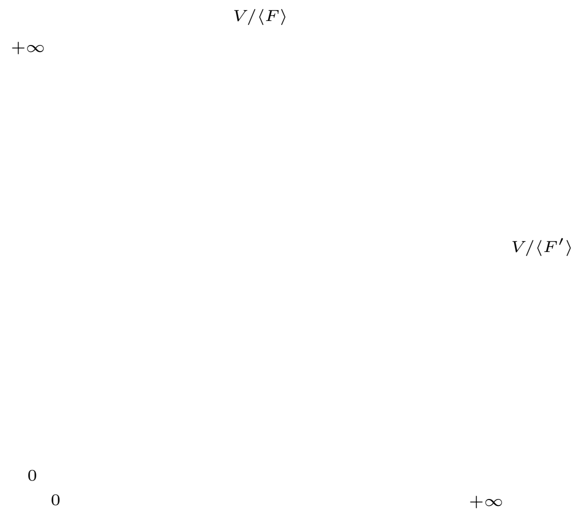


Fig. 3 – La convergence des suites dans la compactification polyédrale

**Proposition 6.1.** *Soit $F_0 \in \mathcal{F}_0$ une chambre. Alors :*

1. *Le coin $C_{F_0}$ est un ouvert de $\overline{V}^p$.*
2. *Les adhérences de $F_0$ dans $C_{F_0}$ et dans $\overline{V}^p$ coïncident.*

**Preuve.** 1. Soient $F_1 \in \mathcal{F}_0$ une chambre de $V$, $F$ une facette de $F_1$ et $U$ un ouvert de $V$. Alors

$$O_{F,U} \cap C_{F_0} = O_{F,U+\overline{F}} \cap C_{F_0} = (\bigcup_{F' \subset \overline{F}} O_{F',U+\overline{F}}) \cap C_{F_0}.$$

Or

$$\bigcup_{F' \subset \overline{F} \cap \overline{F_0}} O_{F',U+\overline{F}} \subset (\bigcup_{F' \subset \overline{F}} O_{F',U+\overline{F}}) \cap C_{F_0}.$$

Et l'inclusion réciproque est vraie : si $x \in (\bigcup_{F' \subset \overline{F}} O_{F',U+\overline{F}}) \cap C_{F_0}$, alors $x \in C_{F_0}$, donc il existe une facette $F' \in \mathcal{F}$ telle que $x \in V/\langle F \rangle$ et $F' \subset \overline{F_0}$.

Or $x$ appartient également à l'un des ouverts $O_{F'',U+\overline{F}}$, pour $F'' \subset \overline{F}$ : les ensembles $V/\langle F''\rangle$, pour $F'' \in \mathcal{F}$ une facette quelconque, étant disjoints dans $\overline{V}^p$, on en déduit que $F' \subset \overline{F}$, donc $F \subset \overline{F} \cap \overline{F_0}$. Finalement

$$O_{F,U} \cap C_{F_0} = \bigcup_{F' \subset \overline{F} \cap \overline{F_0}} O_{F',U+\overline{F}}.$$

Donc $O_{F,U} \cap C_{F_0}$ est un ouvert de $C_{F_0}$ : ainsi, $C_{F_0}$ est un ouvert de $\overline{V}^p$.

2. Il suffit de montrer que l'adhérence $F_0'$ de $F_0$ dans $\overline{V}^p$ est fermée : $F_0' = \beta_0^{-1}([0,+\infty]^r) = \bigcup_{F \subset \overline{F_0}} (\overline{F_0} + \langle F\rangle)$ (où $\beta_0 : C_{F_0} \to ]-\infty,+\infty]^r$ est l'application définie en (3) associée à $F_0$). Montrons que si $F_1 \in \mathcal{F}_0$ une chambre de $V$, alors $F_0' \cap C_{F_1}$ est un fermé de $C_{F_1}$, ce qui revient à montrer que $\beta_1(F_0' \cap C_{F_1})$ est un fermé de $]-\infty,+\infty]^r$ (où $\beta_1 : C_{F_1} \to ]-\infty,+\infty]^r$ est l'application associée à $F_1$). Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_r \in \Sigma$ les racines définissant $F_1$. Si $\alpha_i$ est telle que $\alpha_i|_{F_0} > 0$, alors $\beta_1(F_0' \cap C_{F_1})_i = [0,+\infty]$ ; et si $\alpha_i$ est telle que $\alpha_i|_{F_0} < 0$, alors $\beta_1(F_0' \cap C_{F_1})_i = ]-\infty,0]$. Dans les deux cas on obtient un fermé de $]-\infty,+\infty]$, donc $F_0' \cap C_{F_1}$ est un fermé de $C_{F_1}$. Ainsi les adhérences de $F_0$ dans $C_{F_0}$ et dans $\overline{V}^p$ coïncident.

$\square$

Voici quelques exemples de compactifications polyédrales pour de petits systèmes de racines.

FIG. 4 – La compactification polyédrale pour le système de racines $A_1 \times A_1$

FIG. 5 – La compactification polyédrale pour le système de racines $A_2$

Soit $G$ le groupe des automorphismes linéaires de $V$ qui préservent l'ensemble $\mathcal{F}$ des facettes.

**Proposition 6.2.** *L'espace $\overline{V}^p$ est une $G$-compactification de $V$.*

**Preuve.** L'adhérence d'une chambre $F_0$ dans $\overline{V}^p$ est homéomorphe (par $\beta_0$) à $[0, +\infty]^r$, donc est compacte. Or il n'y a qu'un nombre fini de chambres dans $V$, toute chambre est dense dans son coin associé, et les coins recouvrent $\overline{V}^p$ : l'espace $\overline{V}^p$ est recouvert par un nombre fini de compacts, et sa topologie est la topologie faible définie par cette famille, ainsi l'espace $\overline{V}^p$ est séparé donc compact. Comme $V$ est ouvert dans $\overline{V}^p$, il s'agit d'une compactification.

L'action de $G$ sur $V$ s'étend à $\overline{V}^p$ en posant, pour $x + \langle F \rangle \in V/\langle F \rangle$, l'image de cet élément par un élément $g \in G$ est $g(x) + \langle g(F) \rangle \in V/\langle g(F) \rangle$, ce qui a bien un sens car $g(F)$ est une facette par hypothèse. Cette action étant continue, la compactification $\overline{V}^p$ est une $G$-compactification. □

Si $F_0$ est une chambre de $V$, on note $\overline{F_0}^p$ l'adhérence de $F_0$ dans $\overline{V}^p$ : c'est la compactification polyédrale de $F_0$. De plus, $\overline{V}^p$ et $\overline{F_0}^p$ sont métrisables.

## 6.2 Compactification polyédrale d'un espace symétrique

Soit $X$ un espace symétrique de type non compact, et $x_0 \in X$ un point base. Soit $G$ un groupe de Lie connexe, extension finie de la composante neutre $\mathrm{Isom}_0(X)$ du groupe des isométries de $X$, tel que l'action de $\mathrm{Isom}_0(X)$ sur $X$ se prolonge en une action isométrique de $G$. Soit $K = G_{x_0}$ le stabilisateur du point $x_0$. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ une décomposition d'Iwasawa de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $g$. Le système de racines $\Sigma$ associé à la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$

abélienne maximale donne une décomposition de $\mathfrak{a}\setminus\{0\}$ en cônes simpliciaux. D'après ce qui précède, on peut définir la compactification polyédrale $\overline{\mathfrak{a}}^p$ de $\mathfrak{a}$. Si on choisit une chambre de Weyl (ouverte) positive $\mathfrak{a}^+$, notons alors $\overline{\mathfrak{a}^+}^p$ l'adhérence de $\mathfrak{a}^+$ dans $\overline{\mathfrak{a}}^p$. Notons $\Delta$ la base du système de racines $\Sigma$ associée à la chambre de Weyl positive $\mathfrak{a}^+$. Les facettes de la chambre de Weyl $\mathfrak{a}^+$ sont alors exactement les $\mathfrak{a}_I$, où $I \subset \Delta$ parcourt les parties propres de $\Sigma$. Ainsi les faces rajoutées pour obtenir la compactification polyédrique de $\overline{\mathfrak{a}^+}$ sont les $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_I$ (qui s'identifie à l'orthogonal $\mathfrak{a}^I$ de $\mathfrak{a}_I$), où $I \subset \Delta$ parcourt les parties propres de $\Sigma$.

Remarquons que l'application :

$$\begin{array}{rcl} K \times \overline{\mathfrak{a}^+} & \to & X \\ (k,H) & \mapsto & ke^H \cdot x_0 \end{array}$$

est continue et surjective. Elle est également propre, par compacité de $K$ et par unicité du facteur $\overline{A^+}$ dans la décomposition de Cartna $K\overline{A^+}K$. Ainsi cette application, par passage au quotient, qui fournit un homéomorphisme :

$$\psi : X \to (K \times \mathfrak{a}^+)/\sim$$

où $(k,H) \sim (k',H')$ si $ke^H \cdot x_0 = k'e^{H'} \cdot x_0$.

Ceci suggère d'étendre la relation d'équivalence à $G \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p$, en posant, si $H \in \mathfrak{a}^+$ et $H' \in \mathfrak{a}^+$ :

$$(g,H) \sim (g',H') \Longleftrightarrow ge^H K e^{-H} g^{-1} = g'e^{H'} K e^{-H'} g'^{-1}.$$

Et, si $I$ et $I'$ sont des parties propres de $\Delta$, et si $H + \mathfrak{a}_I \in \mathfrak{a}/\mathfrak{a}_I$ et $H' + \mathfrak{a}_{I'} \in \mathfrak{a}/\mathfrak{a}_{I'}$ :

$$(g, H + \mathfrak{a}_I) \sim (g', H' + \mathfrak{a}_{I'}) \Longleftrightarrow ge^H D^I e^{-H} g^{-1} = g'e^{H'} D^{I'} e^{-H'} g'^{-1}.$$

Cette définition a bien un sens car, pour toute partie propre $I$ de $\Delta$, le groupe $A_I$ normalise $D^I$. En effet, le groupe $A$ normalise le groupe $N_I$ (voir la proposition **??**) et centralise le groupe $M$ (par définition de $M$). De plus, le groupe $A_I$ centralise le groupe $G^I$ (par définition de $G^I$), donc en particulier centralise le groupe $K^I$.

Si $I = \Delta$, alors $\mathfrak{a}_\Delta = \{0\}$ donc on peut identifier $H + \mathfrak{a}_\Delta$ et $H \in \mathfrak{a}^+$. De plus, si l'on note $D^\Delta = K$, cela permet d'écrire la relation d'équivalence sous la même forme pour tous les éléments de $G \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p$ :

$$(g, H + \mathfrak{a}_I) \sim (g', H' + \mathfrak{a}_{I'}) \Longleftrightarrow ge^H D^I e^{-H} g^{-1} = g'e^{H'} D^{I'} e^{-H'} g'^{-1}$$

où $I$ et $I'$ sont des parties quelconques de $\Delta$.

**Proposition 6.3.** *L'application* $f : \overline{\mathfrak{a}^+}^p \to \mathcal{G}(G)$ *définie par* $H + \mathfrak{a}_I \mapsto e^H D^I e^{-H}$ *est continue.*

**Preuve.** Les espaces $\overline{\mathfrak{a}^+}^p$ et $\mathcal{G}(G)$ étant métrisables, nous allons montrer que $f$ est séquentiellement continue : soit $(H_n + \mathfrak{a}_{I_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\overline{\mathfrak{a}^+}^p$ convergeant vers $H_\infty + \mathfrak{a}_J^+$, où $H_n \in \mathfrak{a}^{I_n}$ et $H_\infty \in \mathfrak{a}^J$. Le nombre de facettes étant fini, on peut supposer quitte à extraire que la partie $I_n \subset \Delta$ est constante, égale à $I$. D'après la topologie sur $\overline{\mathfrak{a}^+}^p$, nous avons nécessairement $I \subset J$. Or, par continuité de l'exponentielle et de l'action de $G$ par conjugaison sur $\mathcal{G}(G)$, l'application $f$, restreinte à la facette $\mathfrak{a}^J$, est continue : ainsi, on peut supposer que $I$ est strictement inclus dans $J$.

Soit $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers $+\infty$ dans $A_I^+$ : d'après la proposition 5.14, la suite $(b_m K b_m^{-1})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $D^I$ dans $\mathcal{G}(G)$. Alors on a l'égalité :

$$e^{H_n} D^I e^{-H_n} = \lim_{m\to+\infty} e^{H_n} b_m K b_m^{-1} e^{-H_n}.$$

Montrons que la suite $(e^{H_n} D^I e^{-H_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $e^{H_\infty} D^J e^{-H_\infty}$. Or on sait que

$$\lim_{m\to+\infty} (\lim_{n\to+\infty} e^{H_n} b_m K b_m^{-1} e^{-H_n}) = \lim_{m\to+\infty} e^{H_\infty} b_m K b_m^{-1} e^{-H_\infty}) = e^{H_\infty} D^J e^{-H_\infty}.$$

Il suffit donc d'échanger les limites en $n$ et en $m$. L'interversion de limites va être possible grâce à la convergence uniforme. Soit $U$ un voisinage de $e^{H_\infty} D^J e^{-H_\infty}$ dans $\mathcal{G}(G)$ : montrons que $e^{H_n} D^I e^{-H_n}$ appartient à $U$ à partir d'un certain rang.

Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$ et tout $b \in A_I^+$, nous ayons $e^{H_n} b K b^{-1} e^{-H_n} \in U$. Si ce n'était pas le cas, il existerait une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n$, $c_n K c_n^{-1} \notin U$, et qui de plus se décomposerait $c_n = c_{n,J} + c_n^J$, où $(c_{n,J})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ dans $A_J^+$, et où $(c_n^J)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $e^{H_\infty}$. Or, d'après la proposition 5.14, la suite $c_n K c_n^{-1}$ converge donc vers $e^{H_\infty} D^J e^{-H_\infty}$ dans $\mathcal{G}(G)$, ce qui contredit le fait que $U$ soit un voisinage de $e^{H_\infty} D^J e^{-H_\infty}$.

Ceci permet de dire que pour tout $n \geqslant N$ et tout $m \in \mathbb{N}$, le sous-groupe $e^{H_n} b_m K b_m^{-1} e^{-H_n}$ appartient à $U$. Ainsi, si l'on prend la limite lorsque $m$ tend vers $+\infty$, on en déduit que le sous-groupe $e^{H_n} D^I e^{-H_n}$ appartient à $\overline{U}$. On a donc montré que, pour tout voisinage $U$ de $e^{H_\infty} D^J e^{-H_\infty}$, la suite $e^{H_n} D^I e^{-H_n}$ appartient à $\overline{U}$ à partir d'un certain rang : c'est dire que la suite $(e^{H_n} D^I e^{-H_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $e^{H_\infty} D^J e^{-H_\infty}$. On a donc montré que l'application $f$ est continue. □

Définissons la *compactification polyédrale* de $X$ par

$$\overline{X}^p = (G \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p)/\sim,$$

où l'espace $\overline{X}^p$ est muni de la topologie quotient, et où l'inclusion $X \to \overline{X}^p$ est la composition de l'homéomorphisme $\psi : X \to (K \times \overline{\mathfrak{a}^+})/\sim$ et de l'inclusion $(K \times \overline{\mathfrak{a}^+})/\sim \to (G \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p)/\sim$.

L'espace $\overline{X}^p$ est naturellement muni d'une $G$-action à gauche : l'action de $G$ à gauche sur le premier facteur de $G \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p$ passe au quotient en une action de $G$ sur $\overline{X}^p$.

Si $G^0$ désigne la composante neutre $\mathrm{Isom}_0(X)$ du groupe des isométries de $X$, et si on se donne un morphisme $\pi : G \to G^0$ surjectif de noyau fini, alors les compactifications polyédrales de $X$ obtenues pour $G$ et $G^0$ sont naturellement $\pi$-isomorphes.

**Proposition 6.4.** *L'espace $\overline{X}^p$ est une $G$-compactification de $X$.*

**Preuve.** Puisque l'application $f$ est continue, l'application $G \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p \to \mathcal{G}(G)$ qui à $(g, H + \mathfrak{a}_I)$ associe $ge^H D^I e^{-H} g^{-1}$ est continue et passe au quotient. Ainsi, l'espace quotient $\overline{X}^p$ est séparé. La projection $K \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p \to \overline{X}^p$ est surjective (tout élément de $G \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p$ est équivalent à un élément de $K \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p$) et continue (par passage au quotient de l'inclusion $K \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p \to G \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p$), or l'espace $\overline{X}^p$ est séparé et l'espace $K \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p$ est compact, on conclut donc que $\overline{X}^p$ est compact.

Montrons que l'espace $X$, identifié par l'homéomorphisme $\psi : X \to (K \times \overline{\mathfrak{a}^+})/\sim$ à un sous-espace de $\overline{X}^p$, est dense dans $\overline{X}^p$. Soit $(g, H + \mathfrak{a}_I)$ un point de $G \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p$ tel que son image $x$ dans $\overline{X}^p$ n'appartienne pas à $\psi(X)$, c'est-à-dire que $I$ soit une partie propre de $\Delta$. Tout voisinage de $(g, H + \mathfrak{a}_I)$ dans $G \times \overline{\mathfrak{a}^+}^p$ intersecte $G \times \mathfrak{a}^+$, car par définition $\overline{\mathfrak{a}^+}^p$ est l'adhérence de $\mathfrak{a}^+$ dans $\overline{\mathfrak{a}}^p$. Ainsi, tout voisinage de $x$ dans $\overline{X}^p$ intersecte $\psi(X)$. Par conséquent, l'espace $\overline{X}^p$ est bien une compactification de l'espace symétrique $X$.

L'homéomorphisme $G \times \overline{\mathfrak{a}^+}/\sim \to X$ est $G$-équivariant, donc l'espace $\overline{X}^p$ est une $G$-compactification de $X$. $\square$

**Proposition 6.5.** *Les $G$-compactifications de Chabauty $\overline{X}^{\mathcal{G}}$ et polyédrale $\overline{X}^p$ de l'espace symétrique de type non compact $X$ sont $G$-isomorphes, via le $G$-homéomorphisme $\varphi : \overline{X}^p \to \overline{X}^{\mathcal{G}}$ qui à la classe de $(g, H + \mathfrak{a}_I)$ associe $ge^H D^I e^{-H} g^{-1}$.*

**Preuve.** D'après la définition de la relation d'équivalence $\sim$, l'application $\varphi$ est bien définie et injective. D'après le début de la preuve de la proposition 6.4, l'application $\varphi$ est continue. D'après le théorème 5.18, l'application $\varphi$ est surjective. D'après la définition de la relation d'équivalence $\simeq$, l'application $\varphi$ est injective. Or l'espace $\overline{X}^p$ est compact et $\overline{X}^{\mathcal{G}}$ est compact donc séparé : ainsi $\varphi$ est un homéomorphisme, $G$-équivariant. $\square$

**Proposition 6.6.** *La compactification polyédrale $\overline{X}^p$ est $K$-isomorphe à la compactification cellulaire duale $X \cup \Delta^*(X)$, telle qu'elle est définie dans [GJT, Definition 3.40, p. 45].*

**Preuve.** Nous allons vérifier que la compactification polyédrale $\overline{X}^p$ satisfait les hypothèses du théorème [GJT, Theorem 3.38, p. 43], qui caractérise la compactification cellulaire duale.

Soit $(k_n, H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite fondamentale au sens de [GJT, Definition 3.35, p. 41], c'est-à-dire qu'il existe une partie $I \subsetneq \Delta$ telle que la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $K$ converge vers $k$, et si $H_n = H_{n,I} + H_n^I$ est la décomposition de $H_n \in \mathfrak{a}$ selon $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_I \oplus \mathfrak{a}^I$, alors la suite $(H_{n,I})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ dans $\mathfrak{a}_I^+$ et la suite $(H_n^I)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $H \in \overline{\mathfrak{a}^{I,+}}$. Alors, d'après les propositions 5.14 et 6.5, la suite $(k_n \exp H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, dans la compactification polyédrale, vers la classe d'équivalence de $(k, H + \mathfrak{a}_I)$.

Soient $(k_n, H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(k'_n, H'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites fondamentales. Leurs limites formelles au sens de [GJT, Definition 3.35, p. 41] sont $(\operatorname{Ad} k(\mathfrak{a}_I^+), k \exp H \cdot x_0)$ et $(\operatorname{Ad} k'(\mathfrak{a}_{I'}^+), k' \exp H' \cdot x_0)$ respectivement. Leurs limites dans la compactification polyédrale sont les classes d'équivalence de $(k, H + \mathfrak{a}_I)$ et $(k', H' + \mathfrak{a}_{I'})$ respectivement. Notons $a = \exp H$ et $a' = \exp H'$.

Supposons que les limites formelles soient égales. Alors, d'après la proposition [GJT, Proposition 3.4, p. 25], nous avons $I = I'$ et $k^{-1}k$ appartient au normalisateur $Z_K(\mathfrak{a}_I) = K^I M$ de $\mathfrak{a}_I$ dans $K$. De plus, $ka \cdot x_0 = k'a' \cdot x_0 \in X$, donc $a^{-1}k^{-1}k'a' \in K$. Or $a$ et $a'$ appartiennent à $\overline{A^+}$, donc par unicité de la décomposition de Cartan $G = K\overline{A^+}K$, nous avons $a = a'$. Par ailleurs $a^{-1}k^{-1}k'a \in A^I K^I M A^I \cap K \subset G^I M \cap K = K^I M$. Par conséquent $k^{-1}k' \in aK^I M a^{-1} \cap K^I M$. Donc, d'après la réciproque du théorème 5.19, on en déduit que

$$kaD^I a^{-1} k^{-1} = k'a'D^{I'} a'^{-1} k'^{-1}.$$

Donc les limites, dans la compactification polyédrale, des classes d'équivalence de $(k, H + \mathfrak{a}_I)$ et $(k', H + \mathfrak{a}_I)$ sont égales.

Réciproquement, supposons que les limites dans la compactification polyédrale soient égales. Alors, d'après le théorème 5.19, on en déduit que $I = I'$, $a = a'$ et $k^{-1}k' \in (K^I \cap aK^I a^{-1})M$. Alors $k^{-1}k'$ appartient au stabilisateur $aKa^{-1}$ du point $a \cdot x_0$, donc

$$k' \exp H' \cdot x_0 = k'a \cdot x_0 = ka \cdot x_0 = k \exp H \cdot x_0.$$

De plus $k^{-1}k' \in K^I M = Z_K(\mathfrak{a}_I)$, donc d'après la proposition [GJT, Proposition 3.4, p. 25], nous avons $\operatorname{Ad} k(\mathfrak{a}_I^+) = \operatorname{Ad} k'(\mathfrak{a}_I^+)$. Ainsi, les limites formelles sont égales.

Ainsi, la compactification polyédrale $\overline{X}^p$ satisfait les hypothèses du théorème [GJT, Theorem 3.38, p. 43], donc est isomorphe à la compactification cellulaire duale. Ces compactifications étant des $G$-compactifications de $X$ (voir [GJT, Theorem 3.43, p. 46]), ce sont des compactifications $G$-isomorphes de $X$. □

**Théorème 6.7.** *Les compactifications de Chabauty, polyédrale, cellulaire duale ([GJT, Definition 3.40, p. 45]), de Satake-Furstenberg maximale ([GJT, Proposition 4.53, p. 73]) et de Martin ([GJT, Chapter VII, pp.103–115]) sont $G$-isomorphes.*

**Preuve.** D'après les résultats [GJT, Theorem 4.43, p.66], [GJT, Proposition 4.53, p. 73] et [GJT, Theorem 7.33, p. 115], les compactifications cellulaire duale, de Satake-Furstenberg maximale et de Martin sont $G$-isomorphes. D'après les propositions 6.5 et 6.6, celles-ci sont également $G$-isomorphes aux compactifications de Chabauty et polyédrale. □


Thomas Haettel
ENS Paris
45 rue d'Ulm
75005 Paris
thomas.haettel@ens.fr

## Références

[BH] M. R. Bridson et A. Haefliger, *Metric Spaces of non-positive Curvature*, Springer, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **319** (1999).

[BHK] M. R. Bridson, P. de la Harpe et V. Kleptsyn, *The Chabauty space of closed subgroups of the three-dimensional Heisenberg group*, arXiv :0711.3736v1 (2007).

[Bou] N. Bourbaki, *Eléments de mathématiques*, Livre VI (Intégration), Chap. VIII, §5.

[Cha] C. Chabauty, *Limite d'ensembles et géométrie des nombres*, dans Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 143–151.

[CDP] G. Courtois, F. Dal'Bo et F. Paulin, *Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques*, Journées mathématiques X-UPS 2007, Les Éditions de l'Ecole Polytechnique (2007).

[CEG] R.D. Canary, D.B.A. Epstein et P.L. Green, *Notes on notes of Thurston*, dans *Fundamentals of Hyperbolic Manifolds : Selected Expositions*, Cambridge University Press, London Mathematical Society Lecture Note Series **328** (2006).

[Des] R. Descombes, *Eléments de théorie des nombres*, PUF (1986).

[Ebe] P.B. Eberlein, *Geometry of Nonpositively Curved Manifolds*, Chicago Univ. Press (1996).

[GJT] Y. Guivarc'h, L. Ji et J.C. Taylor, *Compactifications of Symmetric Spaces*, Progress in Math. **156**, Birkhaüser (1998).

[Hel] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Grad. Stud. in Math. **34**, Amer. Math. Soc. (1978).

[GHL] S. Gallot, D. Hulin et J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer, 3ème Edition (2004).

[Lan] E. Landvogt, *A Compactification of the Bruhat-Tits Building*, Lecture Notes in Mathematics **1619**, Springer (1995).

[MT] R. Mneimné et F. Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Hermann (1986).

[OV] A.L. Onishchik et E.B. Vinberg, *Lie Groups and Algebraic Groups*, Springer-Verlag (1988).

[PH] I. Pourezza et J. Hubbard, *The space of closed subgroups of* $\mathbb{R}^2$, Topology **18** (1979), 143–146.

[Rat] J. G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Graduate Texts in Math. **149**, Springer-Verlag, New York (1994).

[Rém] B. Rémy, *Immeuble à l'infini et combinatoire des groupes, Compactification polyédrique des plats*, http ://math.univ-lyon1.fr/~remy/CpctPol.pdf (1999).

[War] G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I*, Springer-Verlag, New York (1972).