NORMA Research report

T3-D1: deliverable on improvement of IBM in RANS or LES boundary layers, and level-set techniques:

Turbulent boundary layer modeling based on analytical wall-functions and characteristic-based volume penalization method

O.V. Vasilyev and N.S. Zhdanova(*)

September 20th 2022

(*) Keldysh Institute of Applied Mathematics (KIAM),
Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

1 Abstract

The Norma project is a Russia-France cooperation for improving high-fidelity numerical models in order to better control the noise produced by new and less new aeronefs like drones and helicopters which should move around towns with the smallest sound pollution.Among Norma's goals is the improvement of numerical approximations based on unstructured meshes, for solving the Navier-Stokes equations on the moving meshes which take into account rotating geometries. One important approach is the Immersed Boundary method, and one difficulty is the numerical modeling of wall conditions on the immersed boundary.

A novel method for approximation of near-wall region of compressible turbulent boundary layer based on Reynolds-averaged Navier-Stokes equations is proposed. The method utilizes the soft differential condition for matching the external solution with the wall function, which makes it possible to use a generalization of the characteristic-based volume penalization method to impose shear stress boundary conditions on the obstacle surface. The matching conditions are specified implicitly through a localized source term in the exchange location, written as function of the wall distance, normalized in wall units. The wall stress boundary condition is defined by solving an auxiliary equation, which propagates the wall-function defined sheer velocity from the exchange location to the wall using the generalized characteristic-based volume penalization approach. The developed method noticeably reduces the near-wall mesh resolution requirements with minor modification of the turbulence model in the wall region and makes it possible to completely eliminate the need to explicitly determine the exchange location. The numerical implementation of the developed approach was carried out using the vertex-centered finite-volume method on structured computational mesh. The applicability of the proposed approach is demonstrated by solving two test problems, namely two-dimensional turbulent channel flow and turbulent boundary layer flow over flat plate.

Submitted to the Russian journal that has an English-translated version https://www.springer.com/journal/11470

Метод моделирования турбулентного пограничного слоя на основе аналитических законов стенки в формулировке метода характеристических штрафных функций

Олег В. Васильев*, **Наталья С. Жданова****

125047, Москва, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия

**e-mail: oleg.v.vasilyev@gmail.com*
***e-mail: nat.zhdanova@gmail.com*

Предложен метод расчета пристеночных областей турбулентных течений для численного моделирования вязкого сжимаемого газа с применением уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу. В основе метода — дифференциальное условие сшивки внешнего решения с пристеночной функцией, позволяющее использовать обобщение метода характеристических штрафных функций для переноса касательного напряжения из внешней области пограничного слоя на поверхность тела, при этом область сшивки задается неявно через локализованный источниковый член в уравнении пограничного слоя, записанного как функция расстояния от стенки, нормированного на масштаб вязкой длины. Касательное напряжение на стенке при этом определяется в процессе численного решения специального дифференциального уравнения, включающего в себя характеристические штрафные функций и аналитический закон стенки. Разработанный метод заметно снижает требования к пристеночному разрешению расчетной сетки без существенного усложнения вычислительного алгоритма и позволяет полностью устранить плохо-определенное условие точки сшивки решений. Численная реализация разработанного подхода проведена с применением вершинно-центрированного метода контрольных объемов и структурированных расчетных сеток. Его применимость продемонстрирована на примере решения двух тестовых задач: течение в двумерном канале и турбулентное обтекание бесконечно тонкой пластины.

Ключевые слова: характеристические штрафные функции, турбулентное течение, закон Рейхарда, метод пристеночных функций

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (Проект 20-41-09018).

Введение

В настоящее время в связи с большой вычислительной стоимостью прямого численного моделирования аэродинамических течений с большими числами Рейнольдса [1] активно развиваются вихреразрешающие методы на основе осреднённых уравнений Навье-Стокса (RANS) [2–5] и гибридные подходы, в которых течение в пристеночной области моделируется на основе моделей класса RANS, а течение в областях, удалённых от твёрдых поверхностей, — Методом Крупных Вихрей (LES) [6, 7]. К гибридному классу методов можно также отнести методы моделирования отсоединенных вихрей (DES) [8–10] с плавным переходом от RANS к LES решениям. Несмотря на сравнительно умеренные требования RANS, гибридных RANS-LES и DES подходов к пристеночному разрешению расчетных сеток, ограничения все равно остаются сущетвенными и накладывают жесткие требования к объему вычислительных ресурсов, увеличивают время счета задачи и усложняют построение расчетной сетки.

Ограничения на размер ячеек сетки вблизи поверхности тела могут быть заметно снижены при использовании методов на основе пристеночных функций [11–13], что достигается заменой граничных условий прилипания на поверхности тела условием сшивки пристеночной функции с внешней областью турбулентного пограничного слоя. Пристеночные функции также могут применяться и в слабой формулировке, через условие проскальзывания, допускающее перенос касательных напряжений из внешней области пограничного слоя на поверхность тела [14, 15]. Такая формулировка предпочтительнее с вычислительной точки зрения в силу её гибкости, но не гарантирует точного соответствия толщины вытеснения пограничного слоя, так как в пристеночной области вычисляется приближённое решение со скоростью проскальзывания и турбулентной вязкостью, экстраполированными из внешней области решения, что приводит к уменьшению толщины вытеснения пограничного слоя по сравнению с точным решением усредненных уравнений Навье-Стокса.

В традиционных подходах [16] граничные условия определяются путем решения нелинейных уравнений в точке сшивки, при этом сама точка сшивки заранее неизвестна, так как неявно задана расстоянием от стенки, нормированным на масштаб вязкой длины, который, в свою очередь, является функцией касательного напряжения на стенке. Для этой цели решение в точке сшивки интерполируются с ближайших узлов [17]. Следует отметить возможность использования метода пристеночных функций совместно с дискретным методом погруженных границ, в котором в точке сшивки также используются дополнительные ограничительные связи, обеспечивающие выполнение граничных условий на поверхности тела [18–20].

Основная идея разработанного метода заключается в замене алгебраического условия сшивки внешнего решения с пристеночной функцией на дифференциальную формулировку, позволяющую использовать обобщение метода характеристических штрафных функций [21, 22] для переноса касательного напряжения из внешней области пограничного слоя на поверхность тела, при этом область сшивки задается неявно через локализованный источниковый член в уравнении пограничного слоя, записанного, как функция расстояния от стенки, нормированного на масштаб вязкой длины. Такой подход, во-первых, позволяет полностью устранить плохо-определенное условие точки сшивки решений и, во-вторых, свести систему дифференциальных уравнений с нелинейными алгебраическими связями к системе уравнений с дифференциальными обратными связями, основанными на методе характеристических штрафных функций, обеспечивающих эту связь. Последнее обстоятельство определяет возможное развитие метода, связанное с применением дифференциальных стандартных [17, 23] и неравновесных [24, 25] динамических пристеночных функций (для задач с сильными отрывами). В целом, новый метод позволяет заметно снизить требования к пристеночному разрешению расчетной сетки без существенного усложнения вычислительного алгоритма. Следует отметить отличие разработанного метода от гибридных подходов с использованием методов погруженных границ для задания граничных условий на поверхности обтекаемых тел [18, 19], так как в предложенном подходе используются характеристические штрафные функции для сшивки пристеночных функций с внешним решением. Разработанный метод может быть также обобщен для течений со сложной геометрией, на основе уже разработанных методов штрафных функций [21, 22, 26, 27].

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. В первом разделе описан разработанный метод моделирования турбулентного пограничного слоя на основе аналитических законов стенки в формулировке метода характеристических штрафных функций. Во втором разделе кратко описана методика расчета, используемая для численной реализации разработанного подхода. Постановка и результаты численного моделирования тестовых задач приведены в третьем разделе. В заключении сделаны выводы и обозначены направления дальнейшего развития темы.

1 Постановка задачи и математическая модель

1.1 Осреднённые уравнения движения вязкого сжимаемого газа

В качестве базовой математической модели для описания течений вязкой сжимаемой среды использована система осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса, принимающая следующий вид:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} &= 0, && (1)\\
\frac{\partial\rho u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial\hat{\tau}_{ij}}{\partial x_j}, && (2)\\
\frac{\partial\rho e}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\rho e+p)\,u_j\right] &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[u_i\hat{\tau}_{ij}-q_j\right], && (3)
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
p &= \rho RT, && (4)\\
e &= \frac{1}{2}u_i u_i+\frac{p}{\rho(\gamma-1)}, && (5)\\
q_j &= -c_p\left(\frac{\mu}{Pr_L}+\frac{\mu_T}{Pr_T}\right)\frac{\partial T}{\partial x_j}, && (6)\\
\hat{\tau}_{ij} &= 2\mu\tilde{S}_{ij}+\tau_{ij}, &&\\
\tau_{ij} &= 2\mu_T\tilde{S}_{ij}, && (7)\\
\tilde{S}_{ij} &= \mathrm{dev}(S_{ij}) = S_{ij}-\frac{1}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}, &&\\
S_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). &&
\end{aligned}
$$

В приведенных выше уравнениях используются следующие обозначения: ρ — осредненная по Рейнольдсу плотность, p — осредненное по Рейнольдсу давление, ρu_j — массовый поток, u_j – осредненная по Фавру скорость, T – осредненная по Фавру температура, e – осредненная по Фавру полная энергия на единицу массы. Параметр R обозначает газовую постоянную, переменные c_v и c_p — соответственно удельные теплоемкости при постоянном объеме и давлении, значение коэффициента теплоемкости $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ без потери общности принято равным $\gamma = 1.4$, что соответствует двухатомному газу. Переменная q_j представляет собой сумму векторов ламинарного и моделируемого турбулентного теплового потока, где $Pr_L = 0.72$ и $Pr_T = 0.9$ — соответственно ламинарное и турбулентное числа Прандтля. Турбулентная вязкость, обозначенная как μ_T, неизвестна и для замыкания подразумевает использование модели турбулентности. Переменная $\hat{\tau}_{ij}$ представляет собой сумму тензоров вязкого (молекулярного) и турбулентного напряжений, τ_{ij} — тензор турбулентных напряжений, S_{ij} — тензор осредненных скоростей деформации, $\tilde{S}_{ij}$ — девиаторная часть тензора S_{ij}. Для простоты в работе рассмотрены течения с малыми числами Маха и постоянной динамической молекулярной вязкостью μ.

1.2 Модель турбулентности

Для иллюстрации разработанного подхода в качестве модели турбулентности для замыкания уравнений (6) и (7) использована модель Спаларта-Аламараса [2], широко применяемая для моделирования течений газа [28], включая высокоскоростные течения с существенным влиянием сжимаемости. Стандартная модель Спаларта-Аллмараса для переменной $\rho\tilde{\nu}$ может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho\tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\tilde{\nu}u_j) &= c_{b1}(1-f_{t2})\tilde{S}\rho\tilde{\nu} - \left[c_{w1}f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2}f_{t2}\right]\rho\left(\frac{\tilde{\nu}}{\delta}\right)^2 \\ &+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu}{\sigma}+\frac{\rho\tilde{\nu}}{\sigma}\right)\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j}\right] - \left(\frac{\mu}{\sigma\rho}+\frac{\tilde{\nu}}{\sigma}\right)\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j} + c_{b2}\frac{\rho}{\sigma}\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j}\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j}, \end{aligned} \tag{8}$$

где турбулентная вязкость вычисляется согласно

$$\mu_T = \rho\tilde{\nu}f_{v1}, \tag{9}$$

а вспомогательные переменные определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} f_{v1} &= \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \\ \chi &= \tilde{\nu}/\nu, \\ \tilde{S} &= \max\left[0.3\sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2\delta^2}f_{v2}\right], \qquad (10) \\ \Omega_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \\ f_{v2} &= 1 - \frac{\chi}{1+\chi f_{v1}}, \\ f_w &= g\left[\frac{1+c_{w3}^6}{g^6+c_{w3}^6}\right]^{1/6}, \\ g &= r + c_{w2}(r^6 - r), \\ r &= \min\left[\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}\kappa^2\delta^2}, 10\right], \qquad (11) \\ f_{t2} &= c_{t3}\exp(-c_{t4}\chi^2), \end{aligned}$$

ν — кинематическая молекулярная вязкость, $\delta(\mathbf{x})$ — расстояние от точки поля $\mathbf{x}$ до ближайшей поверхности, а для улучшения устойчивости вычислений переменная $\tilde{S}$ ограниченна снизу величиной $0.3\sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$. Постоянные коэффициенты задаются как $c_{b1} = 0.1355$, $c_{b2} = 0.622$, $\sigma = 2/3$, $\kappa = 0.41$, $c_{w2} = 0.3$, $c_{w3} = 2$, $c_{v1} = 7.1$, $c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa} + \frac{1+c_{b2}}{\sigma}$. В расчетах используется «стандартная» версия модели Спаларта-Алмараса без дополнительного генерационного слагаемого f_{t1}, что подразумевает отсутствие необходимости использовать переменную f_{t2}, т. е. $c_{t3} = 0$.

В качестве граничного условия на поверхности стенки используется

$$\tilde{\nu} = 0. \tag{12}$$

При моделировании внешних течений в набегающем потоке используется константная турбулентная вязкость $\tilde{\nu} = 3\nu_\infty$.

1.3 Метод пристеночного моделирования

При моделировании турбулентных течений с большим числом Рейнольдса в рамках вихреразрешающих методов [2–5], несмотря на использование моделей турбулентности, прямое разрешение структур решения уравнений (1)-(3), (8) в пристеночной области требует значительных вычислительных затрат, связанных с существенным увеличением количества узлов сетки вблизи поверхности. Ограничения на размер расчетных ячеек вблизи поверхности тела могут быть заметно снижены при использовании методов на основе пристеночных функций [11–13], что достигается заменой граничных условий прилипания на поверхности тела условием сшивки пристеночной функции $f(\tilde{y}^+)$ с внешней областью турбулентного пограничного слоя:

$$u_\parallel(\mathbf{x})\Big|_{\delta(\mathbf{x})=\frac{\nu}{u_\tau}\delta^+_{\mathrm{EL}}} = u_\tau f\left(\delta^+_{\mathrm{EL}}\right), \tag{13}$$

где условие точки сшивки определено как

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\nu}{u_\tau}\delta^+_{\mathrm{EL}}, \tag{14}$$

$u_\parallel(\mathbf{x})$ — компонента скорости, параллельная поверхности в точке $\mathbf{x}$, $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ — обобщённые координаты вдоль и по нормали к поверхности, $\tilde{y}^+ = u_\tau\tilde{y}/\nu$ — нормированная координата, $u_\tau = \left(\tau_{\mathrm{w}}/\rho\right)^{1/2}$ — скорость трения, τ_{w} — напряжение трения на стенке, δ^+_{EL} — нормированное расстояние сшивки решения, а $f(\tilde{y}^+)$ определена, как функция нормированого расстояния от поверхности. Для простоты изложения рассмотрим формулировку метода для двухмерных течений, а обобщение метода для трехмерных течений будет приведено в конце раздела.

Для заданного внешнего поля скорости $u_\parallel(\mathbf{x})$ условие сшивки (13) является нелинейным уравнением для определения u_τ и точки сшивки для заданной точки $\tilde{x}$ на поверхности тела. Линейное приближение уравнения (13) для коррекции решения δu_τ может быть записано, как

$$u_\parallel(\mathbf{x})\Big|_{\delta(\mathbf{x})=\frac{\nu}{u_\tau}\delta^+_{\mathrm{EL}}} + \frac{\partial u_\parallel(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\delta(\mathbf{x})=\frac{\nu}{u_\tau}\delta^+_{\mathrm{EL}}} \left(-\frac{\nu\delta^+_{\mathrm{EL}}}{u_\tau^2}\delta u_\tau\right) \approx u_\tau f\left(\delta^+_{\mathrm{EL}}\right) + \delta u_\tau f\left(\delta^+_{\mathrm{EL}}\right), \tag{15}$$

где нормаль $\mathbf{n}$ определена через функцию расстояния $\delta(\mathbf{x})$: $\mathbf{n} = \nabla\delta(\mathbf{x})$. Отметим, что второй член левой части уравнения (15) возникает из-за изменения расстояния $\delta(\mathbf{x})$ точки сшивки решения при изменении u_τ для фиксированного δ^+_{EL}. Решение уравнения (15) для коррекции скорости трения δu_τ принимает следующий вид:

$$\delta u_\tau \approx u_\tau \frac{u_\parallel(\mathbf{x})\big|_{\delta(\mathbf{x})=\frac{\nu}{u_\tau}\delta^+_{\mathrm{EL}}} - u_\tau f\left(\delta^+_{\mathrm{EL}}\right)}{u_\tau f\left(\delta^+_{\mathrm{EL}}\right) + \frac{\partial u_\parallel(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\delta(\mathbf{x})=\frac{\nu}{u_\tau}\delta^+_{\mathrm{EL}}} \delta(\mathbf{x})}. \tag{16}$$

В случае сильной формулировки условия сшивки уравнение (16) может быть использовано для итерационной коррекции решения уравнения (13) методом Ньютона.

В слабой постановке задачи дискретная коррекция (16) может быть заменена на временную релаксацию решения $u_\tau(\tilde{x}, t)$ на масштабе времени η_f в каждой точке обобщенной координаты $\tilde{x}$, определенной вдоль поверхности тела:

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial t} = \frac{u_\tau}{\eta_f} \frac{u_\parallel(\mathbf{x})\big|_{\delta(\tilde{x})=\frac{\nu}{u_\tau}\delta^+_{\mathrm{EL}}} - u_\tau f\left(\delta^+_{\mathrm{EL}}\right)}{u_\tau f\left(\delta^+_{\mathrm{EL}}\right) + \frac{\partial u_\parallel(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\delta(\tilde{x})=\frac{\nu}{u_\tau}\delta^+_{\mathrm{EL}}} \delta(\tilde{x})}, \tag{17}$$

где толщина пограничного слоя, неявно определённая уравнением (14), для большей наглядности записана в явном виде как $\delta(\tilde{x})$, при этом граничное условие прилипания для скорости $\mathbf{u}$ на границе тела заменено на условие непротекания для нормальной компоненты скорости $u_\perp(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$:

$$u_\perp\big|_{\tilde{y}=0} = 0 \tag{18}$$

и условие переноса касательных напряжений на поверхность тела:

$$(\nu + \nu_T) \frac{\partial u_\parallel}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\tilde{y}=0} = u_\tau^2(\tilde{x}, t). \tag{19}$$

Для переноса турбулентной вязкости с внешней области течения на границу в модели Спаларта-Аламараса в уравнениях (8), (10) и (11) функция расстояния $\delta(\mathbf{x})$ до ближайшей поверхности заменена на

$$\delta(\mathbf{x}) = \max\left(\delta(\mathbf{x}), \frac{\nu}{u_\tau}\delta^+_{\mathrm{EL}}\right), \tag{20}$$

а граничное условие (12) для турбулентной вязкости заменено на

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\tilde{y}=0} = 0. \tag{21}$$

Уравнение (16) с неявным определением расстояния точки точки сшивки $\delta(\tilde{x})$ усложняет решение задачи, так как определение величины тангенциальной компоненты скорости $u_\parallel$ требует использования локального интерполянта с ближайших узлов, см. например [17]. Задачу можно сильно упростить и полностью исключить применение локального интерполянта и точного определения точки сшивки введением дополнительного поля скорости трения $u_\tau(\mathbf{x}, t)$ и заменой уравнения (17), определенного на поверхности тела, на следующее уравнение в частных производных во всей области решения:

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial t} - \mathcal{H}\left(\delta^+_{\mathrm{EL}} - \frac{u_\tau}{\nu}\delta(\mathbf{x})\right) \frac{L}{\eta_s} \frac{\partial u_\tau}{\partial \mathbf{n}} = \chi_\delta\left(\frac{\frac{u_\tau}{\nu}\delta(\mathbf{x}) - \delta^+_{\mathrm{EL}}}{\sigma^+}\right) \frac{u_\tau}{\eta_f} \frac{u_\parallel(\mathbf{x}) - u_\tau f\left(\delta^+_{\mathrm{EL}}\right)}{u_\tau f\left(\delta^+_{\mathrm{EL}}\right) + \frac{\partial u_\parallel(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \delta(\mathbf{x})} + \nu_{\mathrm{n}} \Delta u_\tau, \tag{22}$$

где L — характерный масштаб длины, η_s — характерный масштаб переноса решения с области сшивки на поверхность тела, $\mathcal{H}(\xi)$ — функция Хевисайда, $\chi_\delta(\xi)$ — локализованная функция сшивки решений, например функция Гаусса

$$\chi_\delta(\xi) = \exp(\xi^2/2), \tag{23}$$

σ^+ — нормированная толщина сшивки решений, $\nu_\mathrm{n}\Delta u_\tau$ — численная диффузия, используемая для сглаживания вспомогательного поля u_τ. Второй член в левой части уравнения (22) соответствует характеристической штрафной функции [21, 22, 29], обеспечивающей на масштабе времени η_s перенос скорости трения на поверхность тела, для последующего использования величины u_τ в граничном условии (19). Уравнение (22) является основой разработанного метода, в дальнейшем, для краткости, именуемого методом *пенализированных пристеночных функций*. Обратим внимание, что несмотря на то, что разработанный подход продемонстрирован только в контексте модели Спаларта-Аламараса, метод пенализированных пристеночных функций может быть использован совместно с любой моделью турбулентности, позволяющей перенос касательного напряжения из внешней области пограничного слоя на поверхность тела.

В случае трехмерного течения задача может быть рассмотрена в локальных двухмерных координатах, где координата $\tilde{x}$ вдоль поверхности тела соответсвует направлению тангенциальной компоненты скорости в точке сшивки. В этом случае уравнение (22) можно использовать без изменений, а переменная $u_\parallel(\mathbf{x}) = \left\|\mathbf{u}_\parallel(\mathbf{x})\right\|$ соответсвует величине параллельной компоненты скорости $\mathbf{u}_\parallel(\mathbf{x}) = \mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$. Граничные условия (18) и (19) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\big|_{\tilde{y}=0} = 0 \tag{24}$$

$$(\nu+\nu_T)\frac{\partial \mathbf{u}_\parallel}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\tilde{y}=0} = \left(\frac{\mathbf{u}_\parallel}{u_\parallel}\bigg|_{\tilde{y}=0}\right) u_\tau^2(\tilde{x}, t). \tag{25}$$

2 Метод численного расчета

Предложенный в работе метод реализован на базе программного комплекса NOISEtte, описанного в работе [30], детали вычислительной методики и некоторые особенности распараллеливания расчетов представлены в работе [31].

Пространственная дискретизация конвективной части системы уравнений (1)-(3), (8) основана на конечно-объёмном подходе с определением искомых переменных в узлах сетки, вокруг которых построены расчетные ячейки (дуальная сетка). Для повышения порядка точности используется схема на основе квазиодномерной реконструкции переменных вдоль ребра сетки (EBR-схемы) [32]. Для пространственной аппроксимации вязких членов применяется конечно-элементный метод Галеркина на основе линейных базисных функций.

Интегрирование по времени проводилось по неявной трехслойной схеме 2-го порядка аппроксимации с последующей линеаризацией по Ньютону разностной по пространству системы уравнений. На каждой ньютоновской итерации, для решения системы линейных уравнений, применяется стабилизированный метод бисопряженных градиентов (Bi-CGSTAB) [33].

Каждому шагу интегрирования по времени основной системы уравнений предшествует численное решение уравнения (22). При этом используется неявная схема первого порядка

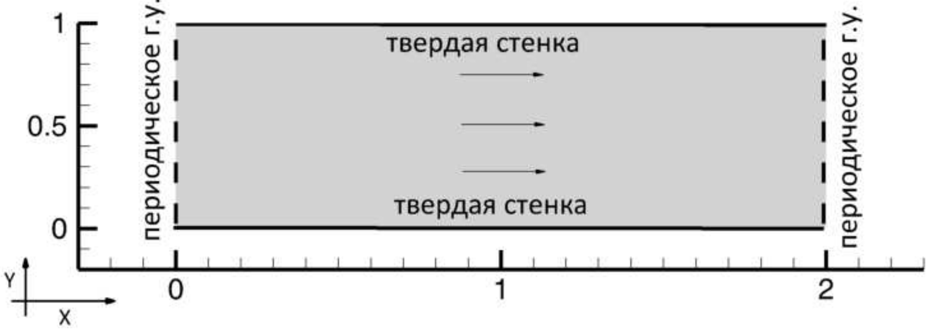

Рис. 1: Постановка задачи о течении в плоском канале.

для аппроксимации производной по времени и метод направленных разностей — для производной по пространству. Последний обладает численной диффузией пропорциональной шагу сетки, поэтому члены с искусственной вязкостью $\nu_{\mathrm{n}}\Delta u_\tau$ в уравнении (22) опускаются. Функция сшивки решения задается в виде функции Гаусса (23). Значения нормированной толщины сшивки решений σ^+, масштабы релаксации η_f и η_s и начальное поле функции u_τ определяются постановкой задачи и параметрами расчетной сетки. Для представленных в работе задач они указаны в соответствующих разделах с описанием численных результатов.

3 Результаты решения тестовых задач

Представленный метод пристеночного моделирования применен для численного решения двух тестовых задач — задачи о течении в канале и задачи об обтекании пластины.

Задачи решались в безразмерных переменных, при этом использовались следующие характерные масштабы: ρ_∞ — плотность невозмущенного потока, U_∞ — скорость набегающего потока, μ_∞ — молекулярная вязкость невозмущенного потока, L — характерный линейный масштаб задачи. Связь размерных и безразмерных переменных, обозначенных знаком $\widehat{(\cdot)}$, имеет вид:

$$\rho = \rho_\infty \widehat{\rho}, \quad u = U_\infty \widehat{u}, \quad x = L\widehat{x}, \quad \mu = \mu_\infty \widehat{\mu}, \quad t = \frac{L}{U_\infty}\widehat{t}, \quad p = \rho_\infty U_\infty^2 \widehat{p}, \quad T = \frac{U_\infty^2}{R}\widehat{T}. \tag{26}$$

Для удобства приведённые далее результаты вычислительных экспериментов представлены в безразмерном виде, при этом знак $\widehat{(\cdot)}$ опускается . Отметим так же, что задачи рассматривались при малых числах Маха набегающего потока, из-за чего влияние плотности и температуры на решение незначительно.

Все расчеты проводились до установления стационарного режима течения, при котором для значений относительной невязки продольной скорости и турбулентной вязкости справедливы следующие оценки: $\frac{\|\Delta u\|_2}{\|u\|_2} \leq 10^{-6}$ и $\frac{\|\Delta \nu_T\|_2}{\|\nu_T\|_2} \leq 10^{-8}$.

3.1 Турбулентное течение в плоском канале

Рассматривается течение между двумя плоскими пластинами, находящимися на расстоянии $H = 2h$ друг от друга, величина H выбрана характерным линейным масштабом. Задача решается в двумерной постановке, пластины расположены параллельно друг другу вдоль оси OX, а поток движется слева направо параллельно этой оси со скоростью,

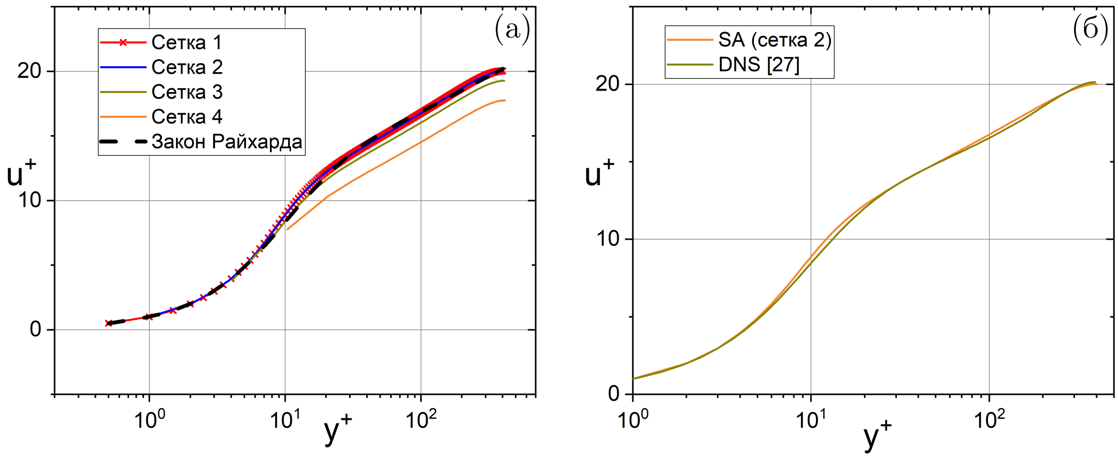

Рис. 2: Результаты расчетов с применением модели Спаларта-Аламараса (SA): а – сравнение с законом Рейхарда, б – сравнение с результатами прямого численное моделирования (DNS) [35].

соответствующей числу Маха $M = 0.1$. (Рисунок 1). Течение является квазиодномерным, поэтому на правой и левой границах расчетной области заданы периодические граничные условия для всех переменных. Верхняя и нижняя границы соответствуют адиабатическим твердым стенкам, на верхней границе задано условие прилипания — $\mathbf{u} = (0, 0)$, на нижней – либо такое же условие для модели Спаларта-Аламараса, либо условие непротекания для нормальной компоненты скорости (18) и условие переноса касательных напряжений на поверхность тела (19) для метода пенализированных пристеночных функций. Значение u_τ в (19) определялось из численного решения уравнения (22). Поле динамической скорости во всей расчетной области в начальный момент времени задавалось постоянным — $u_\tau = 7 \times 10^{-2}$, параметры релаксации — $\eta_f = \eta_s = 10^{-2}$, толщина сшивки решений — $(\sigma^+)^2 = 5 \times 10^{-4}$. В качестве пристеночной функции использовался закон Рейхарда [34]:

$$f_{\text{Rei}}\left(y^+\right) = \frac{1}{\kappa}\ln\left(1 + \kappa y^+\right) + 7.8\left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{11}\right) - \frac{y^+}{11}\exp\left(-\frac{y^+}{3}\right)\right], \tag{27}$$

где $\kappa = 0.41$ — постоянная фон Кармана.

Течение характеризуется среднерасходной скоростью $u_\text{b} = \frac{1}{H}\int\limits_0^H u(y)dy$, которая присутствует в математической модели в форме градиента давления, добавляемого в уравнение сохранения импульса, как источниковый член. Значения u_b, кинематической вязкости ν и полуширины канала h полностью определяют физические свойства течения. При этом число Рейнольдса может быть посчитано по значениям среднерасходной скорости и скорости трения:

$$Re_\text{b} = \frac{u_\text{b} H}{\nu}, \qquad Re_\tau = \frac{u_\tau h}{\nu}$$

соответственно. Для течений в канале имеет место следующее эмпирическое соотношение между Re_b и Re_τ [36], которое в выбранных единицах измерения принимает вид:

$$Re_\text{b} \approx 14.64 Re_\tau^{7/8}$$

Все расчеты проведены для значения $Re_\tau = 400$, что соответствует $Re_\text{b} \approx 14\,000$. Величина градиента давления, обеспечивающего течение, определяется заданным трением

Таблица 1: Параметры сеток для расчетов с применением модели Спаларта-Аламараса.

Сетка	Δy	q	N	Δy^+_{bw}
1	6.25×10^{-4}	1.0	14 409	0.5
2	1.25×10^{-3}	1.0	7 209	1.0
3	5.00×10^{-3}	1.0	1 809	4.0
4	1.25×10^{-2}	1.0	729	10.0
5	1.25×10^{-3}	1.1	765	1.0
6	1.25×10^{-3}	1.2	585	1.0
7	1.25×10^{-3}	1.25	549	1.0
8	1.25×10^{-3}	1.3	513	1.0

на стенке, т.е. $\int\limits_V |\nabla p|\, dV = \int\limits_S \tau_{\mathrm{w}} dS$. Это соотношение задает величину источникового члена для уравнения импульса, в безразмерных переменных соответствующих $\dfrac{dp}{dx} = -2u_\tau^2 = -6.53 \times 10^{-3}$ (при Re_τ=400).

Начальные условия соответствуют невозмущенному потоку со следующими безразмерными параметрами: $(u, v) = (0, 0)$, $\nu = Re_{\mathrm{b}}^{-1}$, $\rho = 1.0$, $\nu_T = Re_{\mathrm{b}}^{-1}$.

Во всех расчетах, представленных далее, использованы структурированные декартовые расчетные сетки, в которых N — число сеточных узлов, Δx и Δy — поперечный и продольный размеры ячеек соответственно, $q = \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j}$ — коэффициент разбега поперечного размера ячейки в направлении по нормали от стенки, Δy^+_{bw} — нормированный размер первой пристеночной ячейки на нижней границе канала, Δy^+_{tw} — нормированный размер первой пристеночной ячейки на верхней границе (если его значение не указано, то $\Delta y^+_{\mathrm{bw}} = \Delta y^+_{\mathrm{tw}}$).

Для оценки точности численного моделирования турбулентного пограничного слоя с применением модели Спаларта-Аламараса и определения оптимального сеточного разрешения проведена серия расчетов на сетках, отличающихся размером пристеночной ячейки и коэффициентом разбега. В Таблице 1 представлены параметры использованных сеток. Продольный размер расчетной ячейки не изменяется и равен $\Delta x = 0.05$. Значение Δy^+_{bw} здесь посчитано относительно теоретического значения скорости трения u_τ, соответствующего заданному числу Рейнольдса Re_τ.

Полученные численные результаты для всех сеток суммированы в Таблице 2, где u_τ — скорость трения, u_{c} — максимум продольной скорости, $|v_{\max}|$ — максимум абсолютного значения поперечной скорости. По значению Re_τ можно получить теоретическую оценку скорости трения на стенке, которая при $Re_\tau = 400$ равна — $u_\tau = 5.714 \times 10^{-2}$. Из Таблицы 2 следует, что наиболее близкими к этой оценке являются результаты, полученные на сетках 1 и 2. Это так же подтверждается сопоставлением нормированных профилей скорости и закона Рейхарда (27) (см. Рисунок 2-а). Результаты, полученные на сетках 3 и 4, показывают неудовлетворительную точность расчетов, что связано с недостаточным сеточным разрешением в пристеночной области.

Решение, полученное для сетки 2, хорошо согласуется с результатами численного моделирования методом DNS [35]. Это подтверждает Рисунок 2-б, на котором сопоставлены профили продольной скорости.

Результаты расчетов для сеток 5-8, приведенные в Таблице 2, показывают, что при-

Таблица 2: Результаты расчетов с применением модели Спаларта-Аламараса.

Сетка	u_τ	u_c	$\lvert v \rvert_{\max}$
1	5.718×10^{-2}	1.1454	2.68×10^{-9}
2	5.719×10^{-2}	1.1448	3.74×10^{-9}
3	5.846×10^{-2}	1.1267	7.69×10^{-7}
4	5.937×10^{-2}	1.0537	2.48×10^{-5}
5	5.720×10^{-2}	1.1438	3.43×10^{-8}
6	5.720×10^{-2}	1.1433	1.95×10^{-7}
7	5.720×10^{-2}	1.1428	4.52×10^{-7}
8	5.721×10^{-2}	1.1417	7.17×10^{-7}

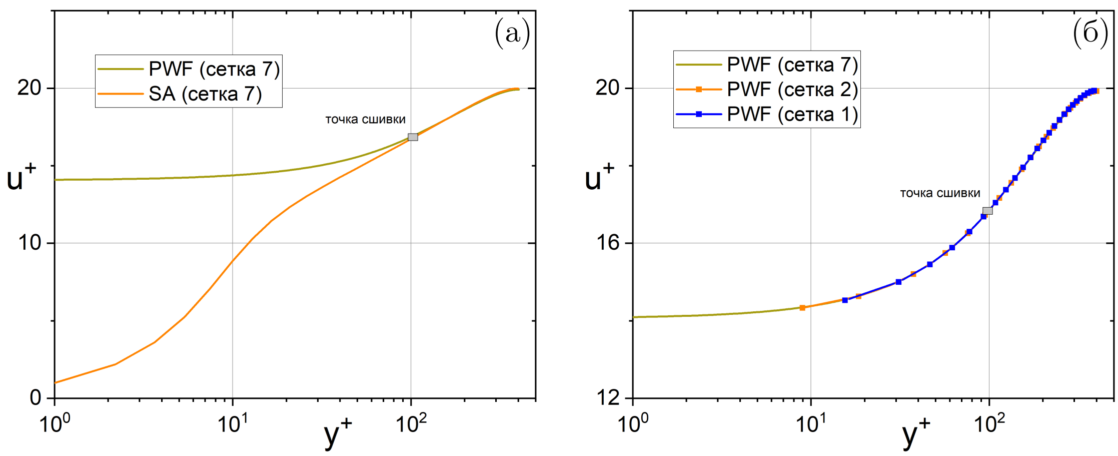

Рис. 3: Результаты расчетов с применением метода пенализированных пристеночных функций (PWF): а – сравнение с моделью Спаларта-Аламараса (SA) на разрешенной сетке, б – сравнение для сеток различного пристеночного разрешения.

емлемое численные решение можно так же получить и на расчетных сетках меньшего размера, в которых размер пристеночной ячейки увеличивается в направлении от границы с коэффициентом q. Результаты в виде профилей скорости не приводятся, т.к. их отличие от результатов, полученных на сетке 2, пренебрежимо мало.

Далее будут рассмотрены результаты численного решения данной задачи с применением метода пенализированных пристеночных функций. Предполагается, что точность моделирования пограничного слоя вдоль верхней границы канала обеспечивается сеточным разрешением, а вдоль нижней границы – пристеночными функциями. Для проведения расчетов построены сетки, с параметрами, приведенными в Таблице 3. Сетки 5-7 — равномерные, с одинаковым пристеночным разрешением на верхней и нижней границах — $\Delta y^+_{\mathrm{bw}} = \Delta y^+_{\mathrm{tw}} \leq 1$, сетки 1-4 имеют достаточное разрешение пограничного слоя только на верхней границе ($\Delta y^+_{\mathrm{tw}} \leq 1$), на нижней — $\Delta y^+_{\mathrm{bw}} > 1$. В сетках 1-4 поперечный размер ячеек увеличивается в направлении нормали $(0, -1)$ от верхней границы канала с коэффициентом разбега $q = 1.2$ до достижения размера Δy_{bw}.

Рассмотрим численное решение, полученное на самой мелкой сетке – сетке 7. На рисунке 3-а приведен нормированный профиль скорости, полученный при расчетах на этой сетке, сопоставленный с результатами расчетов на той же сетке моделью Спаларта-Аламараса.

Таблица 3: Параметры сеток для расчетов с применением метода пенализированных пристеночных функций.

Сетка	$y < 0.5$		$y \geq 0.5$		
	Δy_{bw}	Δy^+_{bw}	Δy_{tw}	Δy^+_{tw}	q
1	1.94×10^{-2}	15.54	1.25×10^{-3}	1.0	1.2
2	1.12×10^{-2}	8.95			
3	4.49×10^{-3}	3.59			
4	2.47×10^{-3}	1.97			
5	1.25×10^{-3}	0.99	1.25×10^{-3}	1.0	1.0
6	0.63×10^{-3}	0.50	0.63×10^{-3}	0.5	
7	0.31×10^{-3}	0.25	0.31×10^{-3}	0.25	

Таблица 4: Зависимость результатов расчетов от сеточного разрешения.

Сетка	u_τ	$\|E\|_2$
1	5.713×10^{-2}	6.75×10^{-3}
2	5.727×10^{-2}	5.06×10^{-3}
3	5.737×10^{-2}	3.98×10^{-3}
4	5.743×10^{-2}	2.95×10^{-3}
5	5.751×10^{-2}	9.70×10^{-4}
6	5.754×10^{-2}	3.48×10^{-4}
7	5.755×10^{-2}	3.45×10^{-3}

В области $y^+ < \delta^+_{\mathrm{EL}} = 100$ можно видеть существенное отличие двух решений, что обусловлено принципиально разными граничными условиями на нижней границе канала. При $y^+ \geq \delta^+_{\mathrm{EL}}$ они хорошо согласуются друг с другом, при этом норма отклонения решения с помощью метода пенализированных пристеночных функций от решения Спаларта-Аламараса, посчитанная по полю продольной скорости равна — $\|E\|_2 = 3.45 \times 10^{-3}$ (см. Таблицу 4).

Для расчетов на сетках 1-6 в Таблице 4 приведено значение скорости трения u_τ на нижней стенке и норма отклонения от решения, полученного на сетке 7. Можно видеть, что в отсутствие сеточного разрешения пограничного слоя (сетки 1-3) ошибка численного решения остается приемлемой. Это подтверждается данными на Рисунке 3-б, где профили продольной скорости, полученные при расчетах на сетках 1 и 2, сопоставлены с результатами, полученными на сетке 7 ($\Delta y^+_{\mathrm{bw}} \sim 0.25$). Справа от точки сшивки решений ($y^+ \geq \delta^+_{\mathrm{EL}}$) наблюдается хорошее согласование результатов.

Результаты исследования влияния параметров метода пенализированных пристеночных функций на точность численного решения суммированы в Таблицах 5-7, где приведены значения скорости трения на нижней стенке u_τ и отклонения поля продольной скорости от решения для сетки 7. Все расчеты с различными значениями параметров релаксации, толщины сшивки решений и положения точки сшивки проведены для расчетной сетки 2.

Таким образом, из данных Таблицы 5 следует слабая чувствительность решения к значениям параметров η_f и η_s, что обуславливается нечувствительностью установивше-

Таблица 5: Зависимость результатов расчетов от масштаба релаксации (сетка 2, $\Delta y^+_{\mathrm{bw}} = 8.95$).

η_f/η_s	u_τ	$\|E\|_2$
$10^{-1}/10^{-1}$	5.692×10^{-2}	1.12×10^{-3}
$10^{-2}/10^{-2}$	5.727×10^{-2}	5.06×10^{-3}
$10^{-3}/10^{-3}$	5.727×10^{-2}	4.95×10^{-3}
$10^{-4}/10^{-4}$	5.727×10^{-2}	4.94×10^{-3}

Таблица 6: Зависимость результатов расчетов от толщины сшивки решений (сетка 2, $\Delta y^+_{\mathrm{bw}} = 8.95$).

$(\sigma^+)^2$	N_f	u_τ	$\|E\|_2$
5×10^{-4}	4	5.727×10^{-2}	5.06×10^{-3}
2.5×10^{-3}	11	5.727×10^{-2}	5.26×10^{-3}
5×10^{-3}	16	5.731×10^{-2}	6.12×10^{-3}

Таблица 7: Зависимость результатов расчетов от положения точки сшивки решений (сетка 2, $\Delta y^+_{\mathrm{bw}} = 8.95$).

δ^+_{EL}	u_τ	$\|E\|_2$
50	5.841×10^{-2}	2.12×10^{-2}
75	5.742×10^{-2}	7.73×10^{-3}
100	5.727×10^{-2}	4.95×10^{-3}
120	5.727×10^{-2}	8.44×10^{-3}

гося стационарного решения к фазовым ошибкам метода пенализированных пристеночных функций. При решении нестационарных задач характеристические времена η_f и η_s должны быть существенно меньше характерного времени течения, чтобы минимизировать влияние фазовых ошибок, вызванных временем задерживания переноса касательного напряжения в уравнении (22) и времени релаксации условия сшивки (14).

В Таблице 6 приведены результаты, полученные для различной толщины сшивки решений. Здесь N_f — количество точек расчетной сетки, находящихся внутри области сшивки. Можно видеть, что для обеспечения приемлемой точности численного решения достаточно нескольких расчетных точек, располагающихся внутри области сшивки, что демонстрирует существенное смягчение требований к пристеночному разрешению по сравнению с требованиями, накладываемыми моделями турбулентности, в частности моделью Спаларта-Аламараса.

В Таблице 7 приведены результаты, демонстрирующие влияние положения точки сшивки решений, определяемого нормированным расстоянием δ^+_{EL}. Так как точка сшивки является свободным параметром метода пенализированных пристеночных функций, то её расположение может быть выбрано в любой области пограничного слоя, при этом точность численного решения определяется соответствием профиля скорости пристеночной функции с решением задачи (1)-(3) с используемой моделью турбулентности для замыка-

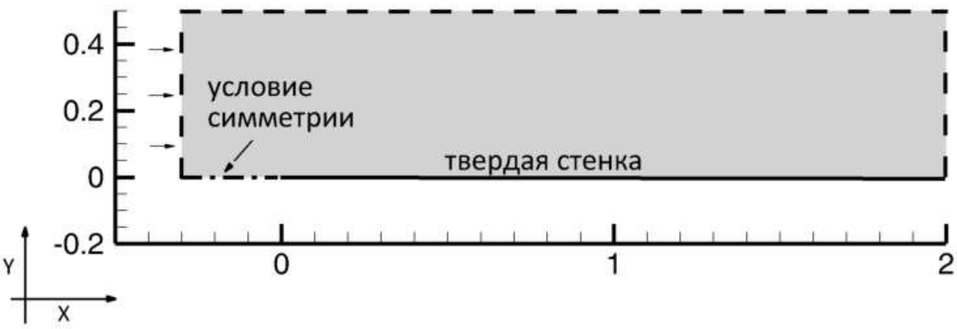

Рис. 4: Постановка задачи об обтекании пластины.

ния. Кроме того, для ослабления требований к пристеночному разрешению точка сшивки должна быть достаточно удалена от вязкого подслоя. Так из Таблицы 7 видно, что для данного числа Рейнольдса оптимальным положением является точка сшивки, соответствующая $\delta^+_{\mathrm{EL}} \approx 100$.

3.2 Обтекание пластины

Для верификации метода пенализированных пристеночных фукнций в двумерной постановке решена задача численного моделирования турбулентного обтекания пластины. Параметры задачи соответствуют тесту NASA, представленному в [37]. При анализе результатов использовано численное решение из [37], полученное с помощью кода CFL3D, основанного на применении структурированных расчетных сеток, элементно-центрированного численного алгоритма и модели Спаларта-Аламараса.

В качестве пристеночной функции использовался модифицированный закон Рейхарда [38], который более точно воспроизводит логарифмическую подобласть пограничного слоя:

$$\tilde{f}_{\mathrm{Rei}}\left(y^+\right) = (1-\phi) f_{\mathrm{Rei}}\left(y^+\right) + \phi f_{\log}\left(y^+\right), \phi = \tanh((y^+/27)^4), f_{\log}\left(y^+\right) = \ln(y^+)/k + 21. \quad (28)$$

Параметры математической модели, определяющие течение, — число Рейнольдса и число Маха равны: $Re = 5 \times 10^6$ и $M = 0.2$. Задача решается в прямоугольной расчетной области в плоскости XOY — $[-0.3, 2] \times [0, 0.5]$ (Рисунок 4). Поток движется слева направо, параллельно оси OX и набегает на бесконечно тонкую пластину с началом в точке (0,0). При этом на левой границе расчетной области скорость потока постоянна и в безразмерном виде равна $(u)_{x=-0.3} = U_\infty = 1$. Здесь так же, как и для предыдущей задачи, на твердой стенке задается нулевой поток температуры и граничное условие прилипания (модель Спаларта-Аламараса) или условие (18) для поперечной и условие (19) для продольной составляющих вектора скорости (метод пенализированных пристеночных функций). Значение u_τ в (19) определяются из численного решения уравнения (22).

Численный расчет задачи проведен на последовательности структурированных декартовых сеток с различным пристеночным разрешением (см. Таблицу 8, где Δy^+_{w} — нормированный поперечный размер пристеночной ячейки, остальные обозначения соответствуют использованным ранее, при описании предыдущей задачи). Значение Δy^+_{w} в таблице рассчитано по значению $u_\tau = 0.03688$, полученному из референсного решения (CFL3D) при $x = 0.97$. Размер ячеек в продольном направлении фиксирован — $\Delta x = 10^{-2}$, коэффициент разбега в поперечном направлении — $q = 1.2$, при этом размер ячеек в этом направлении ограничен величиной $\Delta y_{\max} = 10^{-2}$.

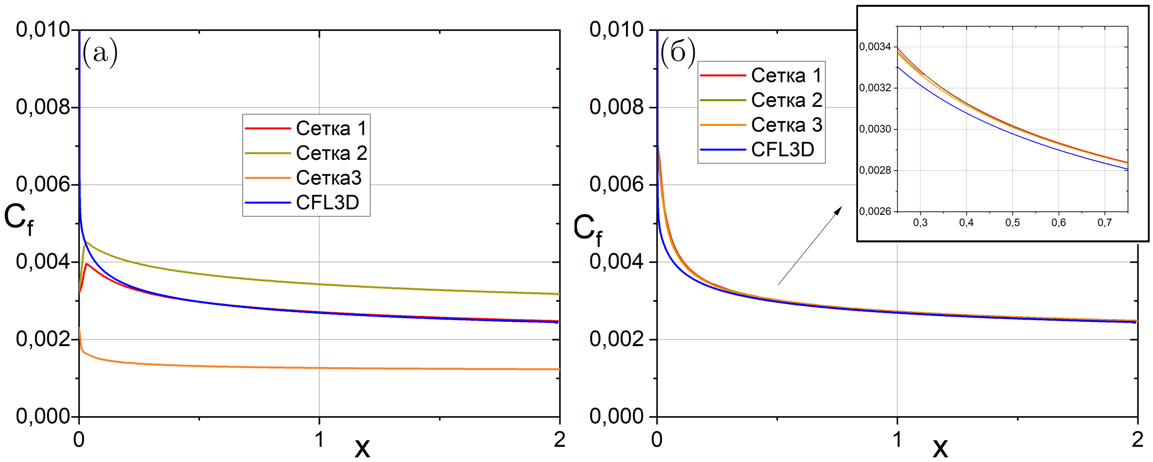

Рис. 5: Коэффициент поверхностного трения на плоской пластине: а – модель Спаларта-Аламараса, б – метод пенализированных пристеночных функций.

Для всех сеток задача решена в двух постановках: первая – пограничный слой на поверхности пластины моделируется уравнением Спаларта-Аламараса, вторая – применяется метод пенализированных пристеночных функций. Во втором случае, параметры уравнения для вычисления скорости трения на пластине для всех сеток одинаковы: коэффициенты пенализации — $\eta_f = \eta_s = 10^{-2}$, толщина сшивки — $(\sigma^+)^2 = 5 \times 10^{-4}$; начальное приближение — $u_\tau|_{t=0} = 4 \times 10^{-2}$.

На Рисунке 5 – а представлены распределения коэффициента трения $C_f = \frac{\tau_w}{1/2\rho U_\infty^2}$, полученные при численном решении с применением модели Спаларта-Аламараса. Можно видеть, что результаты для сетки 1 хорошо согласуются с эталонным решением CFL3D, за исключением небольшой области в начале пластины, вызванной сильным влиянием геометрической сингулярности на поведение регуляризированого решения в области передней кромке для разных граничных условий (условие переноса касательного напряжения (19) вместо условия прилипания). Расчеты с применением сеток более грубого пристеночного разрешения (сетки 2 и 3) показали неудовлетворительный результат, коэффициент трения существенно отличается от эталонного решения. На Рисунке 5-б те же зависимости приведены для решений, полученных с применением метода пенализированных пристеночных функций. Здесь уменьшение пристеночного сеточного разрешения не оказало заметного влияния на результаты расчетов, для всех сеток они хорошо согласуются с результатами CFL3D (за исключением окрестности точки $x = 0$).

Те же закономерности наблюдаются на графиках линий уровня относительной турбулентной вязкости $\nu_T^+ = \nu_T/\nu$ в пристеночной области, приведенных на Рисунке 6. Расчеты с применением модели Спаларта-Аламараса (Рисунок. 6-б) на сетке с разрешенным по-

Таблица 8: Параметры сеток для расчетов задачи об обтекании пластины

Сетка	N	Δy_w	$\Delta y_w^+(x = 0.97)$
1	19 173	1.0×10^{-5}	1.84
2	17 094	5.0×10^{-5}	9.22
3	16 401	1.0×10^{-4}	18.44

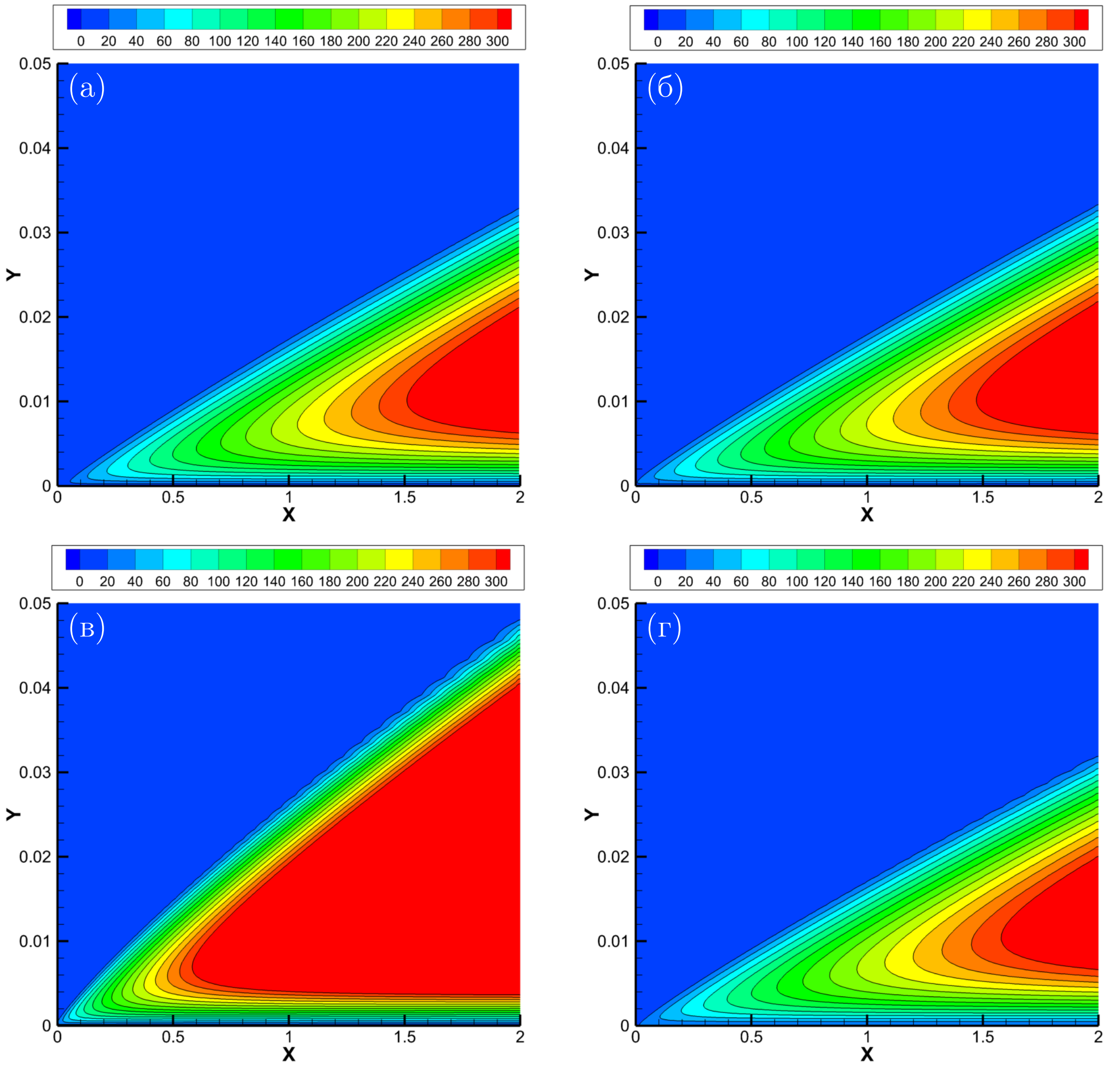

Рис. 6: Линии уровня относительной турбулентной вязкости (ν_T/ν): а – код CFL3D, б – модель Спаларта-Аламараса (сетка 1), в – модель Спаларта-Аламараса (сетка 3), г – метод пенализированных пристеночных функций (сетка 3).

граничным слоем (сетка 7) позволили получить распределение, согласующееся с результатами CFL3D (Рисунок. 6-а), в отличии от результатов для сетки 3 (Рисунок. 6-в). В то же время, применение метода пенализированных пристеночных функций для расчетов на сетке 3 обеспечило хорошую точность результатов (Рисунок. 6-г). Отметим лишь небольшой сдвиг линий уровня вправо, относительно распределений а) и б), который объясняется объясняется фазовым сдвигом в распределении коэффициента трения на поверхности пластины при расчетах двумя методами с разными механизмами регуляризации решения в окрестности передней кромки пластины (см. Рисунок 5).

На Рисунке 7-а приведены профили нормированной продольной скорости u^+ в сечениях $x = 0.97$ и $x = 1.9$ для расчета с применением модели Спаларта-Аламараса на сетке с разрешенным пограничным слоем (сетка 1), на Рисунке 7-б – те же закономерности, но полученные уже методом пенализированных пристеночных функций на «грубой» сетке 3 для сечений $x = 1.03$ и $x = 2.01$. Справа от точки сшивки ($y^+ > \delta^+_{\mathrm{EL}} = 100$) профили в сечениях $x = 0.97$ и $x = 1.9$ хорошо согласуются с профилями в сечениии $x = 1.03$ и $x = 2.01$, соответственно. Сравнение проводится в сечениях, соответствующих значениям C_f: 0.00271 и 0.00247. Отметим, что отличие пространственного положения сравниваемых

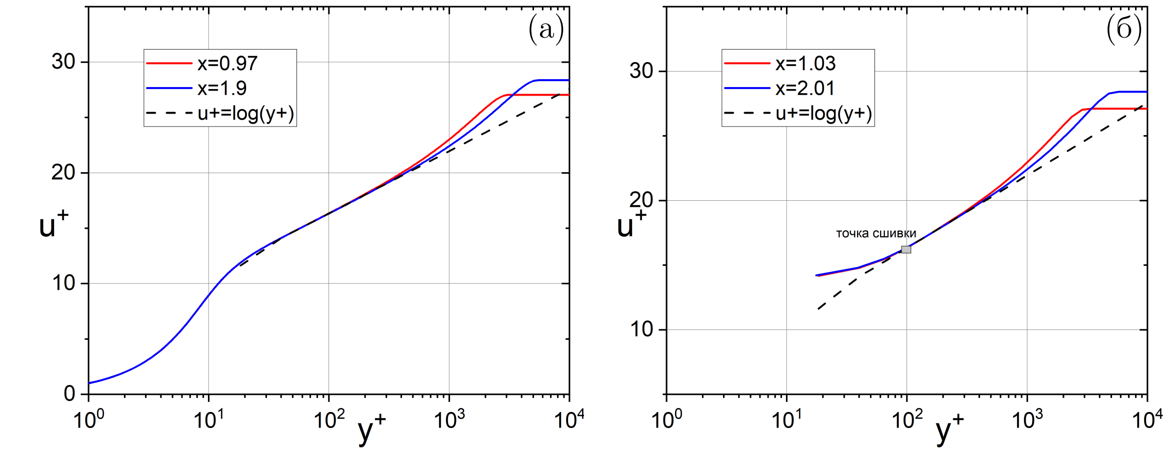

Рис. 7: Профиль продольной скорости: а – модель Спаларта-Аламараса (сетка 1), б – метод пенализированных пристеночных функций (сетка 3).

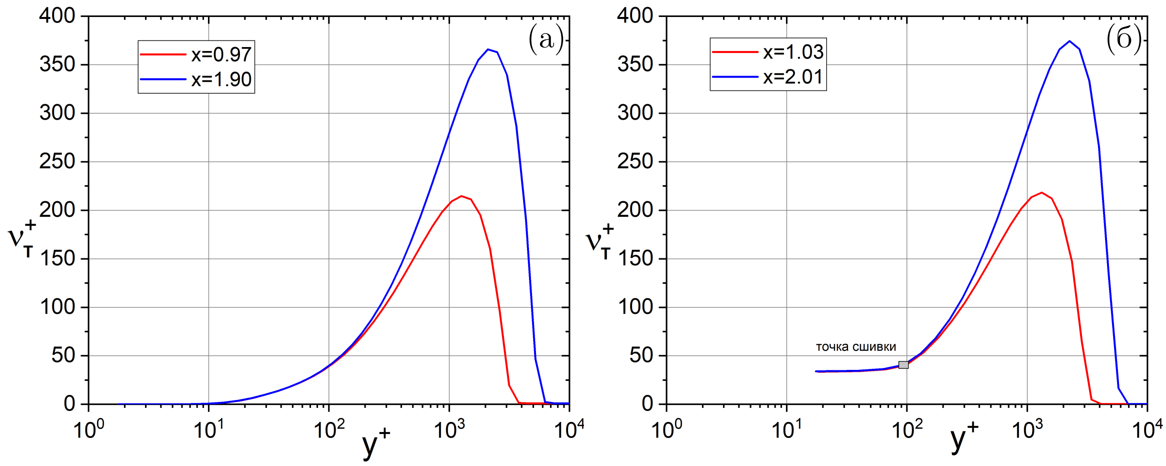

Рис. 8: Профиль относительной турбулентной вязкости ν_T^+: а – модель Спаларта-Аламараса (сетка 1), б – метод пенализированных пристеночных функций (сетка 3).

сечений обусловлено наличием относительного сдвига решений, вызванного различием в механизме регуляризации решений в области передней кромки пластины.

На рисунках 8-а и 8-б, в тех же сечениях расчетной области, сопоставлены профили относительной турбулентной вязкости ν_T^+. Слева от точки сшивки ($y^+ < \delta_{\mathrm{EL}}^+$), при использовании метода пенализированных пристеночных функций, значение турбулентной вязкости практически постоянно. Это связано с завышенными, относительно решения с помощью модели Спаларта-Аламараса, значениями продольной скорости в этом случае. Отметим, что несмотря на то, что решение в этой области «экстраполировано» из внешнего решения переносом касательных напряжений из области сшивки на поверхность пластины, профили скорости и вязкости в численном решении справа от точки сшивки, хорошо согласуются с решением задачи на основе модели Спаларта-Аламараса.

Заключение

В работе представлен новый метод моделирования турбулентного пограничного слоя, применяемый при численном решении задач аэродинамики. С одной стороны в нем, так же, как и в классических подходах, используется идея сшивки внешнего решения с аналитическими пристеночными функциями, с другой — предлагается дифференциальная формулировка условия сшивки, которая позволяет избежать локальной интерполяции решения в точку сшивки и необходимости точного определения положения этой точки. Для переноса значений скорости трения на стенку используется характеристический метод штрафных функций. Метод сформулирован применительно к математической модели на основе усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса с замыканием уравнением Спаларта-Аллмараса.

Численная реализация метода не предполагает существенного усложнения вычислительного алгоритма. Дополнительное дифференциальное уравнение для расчета скорости трения на поверхности тела аппроксимировалось методом направленных разностей первого порядка, при этом сходимость по времени численного решения достигалась за несколько итераций.

Работоспособность метода продемонстрирована на примере решения двух задач — турбулентного течения в канале и обтекания плоской пластины. Результаты расчетов показали, что применение нового метода обеспечивает достаточную точность численного решения на сетках, в которых размер пристеночного шага более чем в 10 раз превышает ограничения, установленные для расчетов с применением модели Спаларта-Аламараса (в которых точность моделирования погранслоя обеспечивается сеточным разрешением).

Дальнейшее развитие работы связано с несколькими направлениями. Во-первых, слабая формулировка условия сшивки делает его привлекательным для использования в методиках с применением погруженных граничных условий, позволяющих решать задачи аэродинамики подвижных тел сложной геометрической формы. Во-вторых, особенности формулировки метода допускают его обобщение для применения в задачах с сильными отрывами, при этом предполагается использовать дифференциальные стандартные и неравновесные пристеночные функции.

Список литературы

[1] *Moin P, Mahesh K.* Direct numerical simulation: A tool in turbulence research // *Annual Rev. Fluid Mech.* — 1998. — Vol. 30. — Pp. 539–578.

[2] *Spalart P R, Allmaras S R.* A one equation turbulence model for aerodinamic flows // *AIAA journal.* — 1992. — Vol. 94.

[3] *Gatski T. B., Hussaini M. Y., Lumley J. L.* Simulation and Modeling of Turbulent Flows. — Oxford, 1996.

[4] *Durbin P. A., Reif B. A. Pettersson.* Statistical Theory and Modeling for Turbulent Flows. — Wiley, 2001.

[5] *Wilcox D. C.* Formulation of the $k-\omega$ Turbulence Model Revisited // *AIAA Journal.* — 2008. — Vol. 46, no. 11. — Pp. 2823–2838.

[6] *Froehlich J, von Terzi D.* Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows // *Progress in Aerospace Sciences.* — 2008. — JUL. — Vol. 44, no. 5. — Pp. 349–377.

[7] *Xiao H, Jenny P.* A consistent dual-mesh framework for hybrid LES/RANS modeling // *J. Comp. Phys.* — 2012. — FEB 20. — Vol. 231, no. 4. — Pp. 1848–1865.

[8] Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach / P R Spalart, W H Jou, M Strelets et al. // First AFOSR international conference on DNS/LES, Ruston, Louisiana. — Vol. 1. — Greyden Press, Columbus, OH, 1997. — Pp. 4–8.

[9] A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities / P. R. Spalart, S. Deck, M. L. Shur et al. // *Theoretical and computational fluid dynamics.* — 2006. — Vol. 20, no. 3. — Pp. 181–195.

[10] A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities / M. L. Shur, P. R. Spalart, M. K. Strelets, A. K. Travin // *International Journal of Heat and Fluid Flow.* — 2008. — Vol. 29, no. 6. — Pp. 1638–1649.

[11] *Patankar S. V, Spalding D. B.* Heat and Mass Transfer in Boundary Layers. — Morgan-Grampia, 1968.

[12] *Зайчик Л. И.* Пристеночные функции для моделирования турбулентного течения и теплообмена // *Теплофизика Высоких Температур.* — 1997. — Т. 35, № 3. — С. 391–396.

[13] Development and application of wall-function treatments for turbulent forced and mixed convection flows / T.J. Craft, S.E. Gant, A.V. Gerasimov et al. // *Fluid Dynamics Research.* — 2006. — Vol. 38, no. 2. — Pp. 127–144. — Seiken Symposium. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169598305000778.

[14] *Beaugendre H., Morency F.* Penalization of the Spalart–Allmaras turbulence model without and with a wall function: Methodology for a vortex in cell scheme // *Computers and Fluids.* — 2018. — Jul. — Vol. 170. — Pp. 313–323. — URL: https://hal.inria.fr/hal-01963687.

[15] *Дубень А. П., Абалакин И. В., Цветкова В. О.* О граничных условиях на твердых стенках в задачах вязкого обтекания // *Матем. моделирование.* — 2021. — Vol. 32, no. 1. — Pp. 79–98.

[16] *Nichols R. H., Nelson C. C.* Wall Function Boundary Conditions Including Heat Transfer and Compressibility // *AIAA Journal.* — 2004. — Vol. 42, no. 6. — Pp. 1107–1114.

[17] *Bodart J, Larsson J.* Wall-modeled large eddy simulation in complex geometries with application to high-lift devices // *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, Stanford University.* — 2011. — Pp. 37–48.

[18] *Beaugendre H., Morency F.* Penalization of the Spalart-Allmaras turbulence model without and with a wall function: Methodology for a vortex in cell scheme // *COMPUTERS & FLUIDS.* — 2018. — JUL 15. — Vol. 170. — Pp. 313–323.

[19] Coupling of turbulence wall models and immersed boundaries on Cartesian grids / S.-G. Cai, J. Degrigny, Boussuge. J.-F., P. Sagaut // *Journal of Computational Physics.* — 2021. — Vol. 429. — P. 109995. — URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999120307695.

[20] *Dhamankar N., Blaisdell G., Lyrintzis A.* Implementation of a Wall-Modeled Sharp Immersed Boundary Method in a High-Order Large Eddy Simulation Tool for Jet Aeroacoustics // 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting. — 2016. — 01.

[21] *Brown-Dymkoski E., Kasimov N., Vasilyev O. V.* A Characteristic Based Volume Penalization Method for General Evolution Problems Applied to Compressible Viscous Flows // *J. Comp. Phys.* — 2014. — Vol. 262. — Pp. 344—357.

[22] Galilean-Invariant Characteristic-Based Volume Penalization Method for Supersonic Flows with Moving Boundaries / N. Kasimov, E. Dymkoski, G. De Stefano, O. V. Vasilyev // *Fluids.* — 2021. — Vol. 6, no. 8. — URL: https://www.mdpi.com/2311-5521/6/8/293.

[23] *Kawai S., Larsson J.* Wall-modeling in large eddy simulation: length scales, grid resolution, and accuracy // *Physics of Fluids.* — 2012. — Vol. 24, no. 1. — P. 015105.

[24] *Kawai S., Larsson J.* Dynamic non-equilibrium wall-modeling for large eddy simulation at high Reynolds numbers // *Physics of Fluids.* — 2013. — Vol. 25, no. 1. — P. 015105.

[25] *Park G. I., Moin P.* An improved dynamic non-equilibrium wall-model for large eddy simulation // *Physics of Fluids.* — 2014. — Vol. 26, no. 1. — Pp. 37–48.

[26] Метод характеристических штрафных функций для численного моделирования сжимаемых течений на неструктурированных сетках / И. В. Абалакин, О. В. Васильев, Н. С. Жданова, Т. К. Козубская // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* — 2021. — Vol. 61, no. 8. — Pp. 1336–1352.

[27] *Жданова Н. С., Абалакин И. В., Васильев О. В.* Расширение метода штрафных функций Бринкмана для сжимаемых течений вокруг подвижных твердых тел // *Математическое моделирование.* — 2022. — Vol. 34, no. 2. — Pp. 41–57.

[28] Turbulence modeling validation / J Bardina, P Huang, T Coakley et al. // 28th Fluid dynamics conference. — 1997. — P. 2121.

[29] *Brown-Dymkoski E., Kasimov N., Vasilyev O. V.* Characteristic-Based Volume Penalization Method for Arbitrary Mach Flows Around Solid Obstacles // Direct and Large-Eddy Simulation IX, Proceedings of the Ninth International ERCOFTAC Workshop on Direct and Large-Eddy Simulations. — Edts. J. Frohlich, H. Kuerten, B.J. Geurts, and V. Armenio, Springer, 2015. — Pp. 109–115.

[30] *Gorobets A., Bakhvalov P.* Heterogeneous CPU+GPU parallelization for high-accuracy scale-resolving simulations of compressible turbulent flows on hybrid supercomputers // *Computer Physics Communications.* — 2022. — Vol. 271. — P. 108231. — URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001046552100343X.

[31] *A.Gorobets, A.Duben.* Technology for Supercomputer Simulation of Turbulent Flows in the Good New Days of Exascale Computing // *Supercomputing Frontiers and Innovations.* — 2021. — Feb. — Vol. 8, no. 4. — Pp. 4–10. — URL: https://superfri.susu.ru/index.php/superfri/article/view/400.

[32] *Bakhvalov P., Abalakin I., Kozubskaya T.* Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* — 2016. — Vol. 81, no. 6. — Pp. 331–356.

[33] *van der Vorst H. A.* BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* — 1992. — Vol. 13, no. 2. — Pp. 631–644.

[34] *Reichardt H.* Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungend // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* — 1951. — Vol. 31, no. 7. — Pp. 208–219.

[35] *Moser R. D., Kim J., Mansour N. N.* Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$ // *Phys. Fluids A.* — 1999. — Vol. 11. — Pp. 943–945.

[36] *Zanoun E. S. M.* Answers to Some Open Questions in Wall Bounded Laminar and Turbulent Shear Flows. — Technische Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg., 2003. — URL: https://books.google.ru/books?id=IPVcxwEACAAJ.

[37] NASA Langley Research Center Turbulence Modeling Resource. — URL: https://turbmodels.larc.nasa.gov.

[38] *Knopp T.* On grid-independence of RANS predictions for aerodynamic flows using model-consistent universal wall-functions // Proceedings of the European Conference on Computational Fluid Dynamics. — 2006.