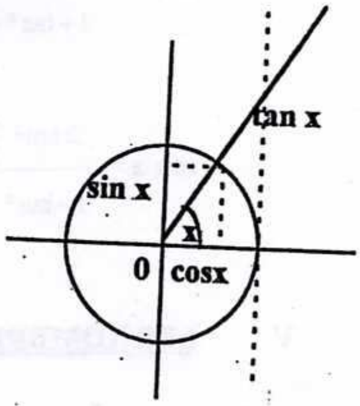
FORMULES TRIGONOMETRIQUES

I LES INCONTOURNABLES.



$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

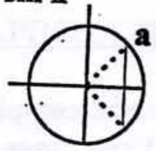
$\sin(x+\pi) = -\sin x$ $\qquad$ $\cos(x+\pi) = -\cos x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\qquad$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$

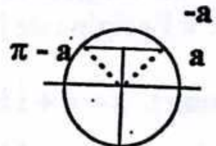
$\sin(x+\pi/2) = \cos x$ $\qquad$ $\cos(x+\pi/2) = -\sin x$

$\sin(\pi/2 - x) = \cos x$ $\qquad$ $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$

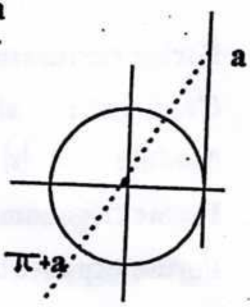
$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 2k\pi \\ b = -a + 2k\pi \end{cases} \quad k \in Z$



$\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 2k\pi \\ b = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$



$\tan a = \tan b \Leftrightarrow \quad b = a + k\pi \;\text{ ou }\; (k \in Z)$



Cas particuliers :

$\cos x = 0 \Leftrightarrow \quad x = \pi/2 + k\pi \quad (k \in Z)$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow \quad x = k\pi \quad (k \in Z)$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$ en $(\frac{\pi}{2})_-$ et $-\infty$ en $(\frac{\pi}{2})_+$

II ADDITION DES ARCS.

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ $\qquad$ $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ $\qquad$ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ $\qquad$ $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

$\sin p + \sin q = 2 \sin\dfrac{p+q}{2} \cos\dfrac{p-q}{2}$ $\qquad$ $\sin p - \sin q = 2 \sin\dfrac{p-q}{2} \cos\dfrac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos\dfrac{p+q}{2} \cos\dfrac{p-q}{2}$ $\qquad$ $\cos p - \cos q = -2 \sin\dfrac{p-q}{2} \sin\dfrac{p+q}{2}$

III MULTIPLICATION DES ARCS.

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \dfrac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a = \dfrac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$.

$\tan 2a = \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$.

IV DES FORMULES BIEN UTILES .

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \qquad \sin x = \frac{2\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\tan x = \frac{2\tan^2\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Ces formules} \\ \textit{servent} \\ \textit{beaucoup} \\ \textit{dans les} \\ \textit{calculs} \\ \textit{d'intégrales} \\ \textit{...entre autres!} \end{array} \right.$$

V LES NOMBRES COMPLEXES .

Les nombres complexes sont souvent utilisés pour la résolution de problèmes de trigonométrie .Leur usage n'est cependant pas limité à cet aspect, bien que ce soit un de ceux qui ont été à l'origine de l'étude des nombres complexes .

Forme cartésienne : $z = a + i\,b$ avec $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$

Conjugué : si $z = a + i\,b$ alors $\bar{z} = a - i\,b$.

Module $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad |z| \in R^+$

Forme trigonométrique : $z = \rho\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]$

Forme exponentielle : $z = \rho\, e^{i\theta}$

Forme polaire : $z = \left[\rho\,;\theta\right]$

L'équation $z^n = 1$ admet exactement n racines.

Ces racines sont : $z_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ $\qquad 0 \le k \le n-1$

VI FORMULE DE MOIVRE .

$(\cos a + i\sin a)^n = \cos na + i\sin na \qquad (n \in Z)$.

Avec la notation $\cos a + i\sin a = e^{ia}$**, cette formule s'écrit aussi :**
$(e^{ia})^n = e^{nia}$.

VI FORMULES D'EULER .

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

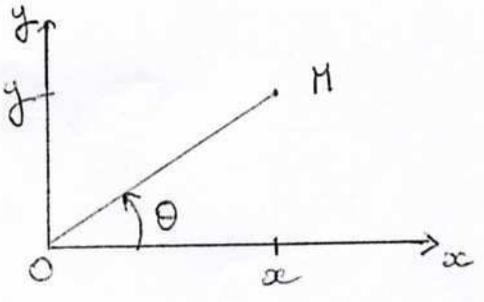
Ces formules servent à « linéariser »

Les nombres complexes

Introduction

Rappelons que l'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solution réelle. On a alors introduit de nouveaux nombres appelés nombres complexes pour que cette équation admette une solution notée i telle que $i^2=-1$.

I Rappels de résultats de Terminale

Forme algébrique	Forme trigonométrique
$z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$ Le réel x est la partie réelle de z : $x = Re(z)$ Le réel y est la partie imaginaire de z : $y = Im(z)$ On dit que $M(x,y)$ est l'image de z ou que z est l'affixe de M. 	$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ ρ est le module de z (évidemment positif) $\lvert z\rvert = \rho = \lvert\vec{OM}\rvert$ θ est appelé l'argument de z (défini à $2k\pi$ près) $\theta = (\widehat{Ox, \vec{OM}})$ On a immédiatement les formules $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ $\cos\theta = \dfrac{x}{\rho}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{\rho}$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

Conjugué d'un nombre complexe.

Soit $z = x+iy$. Le nb complexe conjugué de z est noté $\bar{z}$ et est tel que $\bar{z} = x - iy$

On obtient $z+\bar{z} = 2x$ et $z\bar{z} = x^2+y^2 = \rho^2$

Les images de ces nb sont symétriques par rapport à l'axe Ox

Propriétés $\quad \overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

II - Opérations sur les complexes

II.1 Soit $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ deux complexes.

<u>addition</u> : $z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

<u>soustraction</u> $z_1 - z_2 = x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

<u>multiplication</u> : $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

<u>division</u> :
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$
$$= \frac{x_1 x_2 - i x_1 y_2 + i y_1 x_2 - i^2 y_1 y_2}{x_2^2 - i \cancel{x_2 y_2} + i \cancel{x_2 y_2} - i^2 y_2^2}$$
$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

<u>Exemples</u> : $\frac{1}{2+i}$, $\frac{1-i}{1+i}$

$$\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{4 - \cancel{2i} + \cancel{2i} - i^2} = \frac{2-i}{4+1} = \frac{2}{5} - i\,\frac{1}{5}$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1 - i - i + i^2}{1 - \cancel{i} + \cancel{i} - i^2} = \frac{-2i}{1+1} = -i$$

II.2. forme trigonométrique produit et quotient

Soient deux nb complexes :

$z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ $\quad z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$

II.2 <u>Propriétés</u>.

$|z z'| = |z| \cdot |z'|$

$|\bar{z}| = |z|$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

III Notation Exponentielle. Formule de Moivre, d'Euler

On pose par définition $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Le nb complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ s'écrit en notation exponentielle

$z = re^{i\theta}$ (écriture possible ssi $r>0$)

Soient deux nb complexes $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, on a

$\bar{z} = re^{-i\theta}$ $\quad zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ $\quad \dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

Formule de Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Des relations $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

on en déduit les formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Exercices d'application : voir feuille après

IV "Racine" d'un nb complexe

Soit $z = a+ib$

Trouver z (ie a et b) tel que $z^2 = Z$ avec Z donné, est équivalent à résoudre le système d'éqt

$$\begin{cases} Re(z^2) = Re(Z) \\ |z^2| = |Z| \\ Im(z^2) \times Im(Z) > 0 \end{cases}$$

càd comme $z = a+ib$

$z^2 = a^2 - b^2 + 2iab$.

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = Re(Z) \\ a^2 + b^2 = |Z| \\ 2ab \times Im(Z) > 0 \end{cases}$$

Les complexes

Exercice 1
Ecrire les nombres complexes sous la forme $re^{i\theta}$.

$$z_1 = -3i,\ z_2 = -3+3i,\ z_3 = \sqrt{3}+3i,\ z_4 = -1+i\sqrt{3},\ z_5 = \frac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}}$$

Exercice 2
Ecrire les nombres complexes sous la forme $re^{i\theta}$.

$$\begin{aligned} z_1 &= 1+\cos(2\theta)+i\sin(2\theta) \quad \text{avec } \theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\\ z_2 &= \frac{1-e^{2i\theta}}{1+e^{2i\theta}} \quad \text{avec } \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{aligned}$$

Exercice 3
Déterminer les racines carrées des complexes suivants:

$$z_1 = 5+12i, z_2 = -3+4i$$

Exercice 4
1. Trouver les solutions z_1 et z_2 de l'équation

$$iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$$

On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est nulle.

2. Soit A le point d'affixe z_1, B le point d'affixe z_2 et C le point d'affixe $2+i$. Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

Exercice 5
m étant un paramètre réel, on considère le complexe suivant:

$$z_m = \frac{-\frac{1}{2}+m+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}-m+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

1. Calculer la partie réelle et imaginaire de z_m.
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la partie réelle de z_m est

nulle. Calculer le module et l'argument de z_m pour chacune des valeurs de m obtenues.

3. Résoudre

$$(z+i)^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_{-1}$$

avec $z_{-1} = z_m$ où $m = -1$.

Exercice 6

$$z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$$

$$(1+i)z^2 + 2(2+i)z + 4 = 0$$

$$z^2 + z(-3-i) + 4 + 3i = 0$$

Feuille de travaux dirigés
Complexes - Vecteurs

Exercice 1

1. Soit $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points du plan complexe. Déterminer une relation entre les parties imaginaires et réelles de z_1 et z_2 pour que l'on ait

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$$

2. En déduire que si le nombre $z_2 \neq 0$ alors

$$\frac{z_1}{z_2} \quad \text{est imaginaire pur}$$

3. Que peut-on dire du triangle OM_1M_2?

Exercice 2

1. Soit $z = x + iy$ avec x et y réels. Calculer en fonction de x et y les parties réelles et imaginaires de Z avec

$$Z = \frac{z-4}{z+6}$$

2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z pour lesquelles Z est imaginaire pur.

Exercice 3

Soit z un nombre complexe tel que

$$|(1+i)\bar{z} - 2i| = 2$$

Montrer que son image appartient au cercle de centre $C(1, -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 4

1. Soit $z = x + iy$ avec x et y réels. Calculer en fonction de x et y les parties réelles et imaginaires de Z avec

$$Z = \frac{z-2i}{z-1}$$

2. En déduire l'ensemble des points M d'affixe z pour lesquelles Z est réel.

Exercice 5

1. Soit $z = x + iy$ avec x et y réels. Calculer en fonction de x et y les parties réelles et imaginaires de Z avec

$$Z = (z-1)(\bar{z} - i)$$

2. En déduire l'ensemble des points M d'affixe z pour lesquelles Z est réel.
3. En déduire l'ensemble des points M d'affixe z pour lesquelles Z est imaginaire.

feuille 2

Ex 1 $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$

$$|z_1 + z_2| = |x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$$

$$|z_1 - z_2| = |x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \iff (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\cancel{x_1^2} + \cancel{x_2^2} + 2x_1x_2 + \cancel{y_1^2} + \cancel{y_2^2} + 2y_1y_2 = \cancel{x_1^2} + \cancel{x_2^2} - 2x_1x_2 + \cancel{y_1^2} + \cancel{y_2^2} - 2y_1y_2$$

$$4(x_1x_2 + y_1y_2) = 0$$

$$\boxed{x_1x_2 + y_1y_2 = 0}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{\cancel{x_1x_2} - ix_1y_2 + iy_1x_2 + \cancel{y_1y_2}}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$ imaginaire pur.

$$\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \qquad \overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}.$$

Exercice 1

$z = x + iy \qquad |(1+i)\bar{z} - 2i| = 2$

$|(1+i)(x-iy) - 2i| = 2$

$|x - iy + ix + y - 2i| = 2$

$|(x+y) + i(x-y-2)| = 2$

$\sqrt{(x+y)^2 + (x-y-2)^2} = 2 \qquad (x-y-2)(x-y-2) =$

$x^2 + y^2 + \cancel{2xy} + x^2 + y^2 - \cancel{2xy} - 4x + 4y + 4 = 4 \qquad x^2 - xy - 2x - xy + y^2 + 2y - 2x + 2y + 4$

$2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 4 = 4$

$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 2 \qquad 2 = 1 + 1$

$\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} + \underbrace{y^2 + 2y + 1}_{(y+1)^2} = 2$

$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 = (\sqrt{2})^2$ éqt du cercle de centre $(1;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$

de la forme $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$

Exercice 2

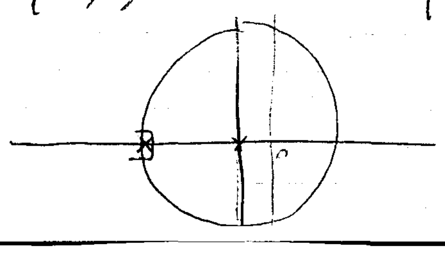
$Z = \dfrac{z-4}{z+6} = \dfrac{x+iy-4}{x+iy+6} = \dfrac{x-4+iy}{x+6+iy} = \dfrac{(x-4)+iy}{(x+6)+iy} \times \dfrac{(x+6)-iy}{(x+6)-iy}$

$= \dfrac{x^2 + 6x - i\cancel{xy} - 4x - 24 + 4iy + i\cancel{xy} + 6iy + y^2}{(x+6)^2 + y^2}$

$= \underbrace{\dfrac{x^2 + y^2 + 2x - 24}{(x+6)^2 + y^2}}_{Re(Z)} + i\underbrace{\dfrac{10y}{(x+6)^2 + y^2}}_{Im(Z)}$ avec $z \neq -6$ pour que Z existe - ie $(x,y) \neq (-6,0)$

Z imaginaire pur si $Re(Z) = 0$ ie

$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0 \\ (x,y) \neq (-6,0) \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 25 \\ (x,y) \neq (-6,0) \end{cases}$ cercle de centre $(-1,0)$ et de rayon 5 - privé du point $(-6,0)$



$(-6,0)$ vérifie l'éqt du cercle

Exercice 5

$$Z = \frac{z-2i}{z-1} = \frac{x+iy-2i}{x+iy-1} = \frac{x+i(y-2)}{(x-1)+iy} \times \frac{(x-1)-iy}{(x-1)-iy} =$$

$$= \frac{x^2 - x - ixy + i(y-2)(x-1) + y^2 - 2y}{(x-1)^2 + y^2}$$

avec $z \neq +1$

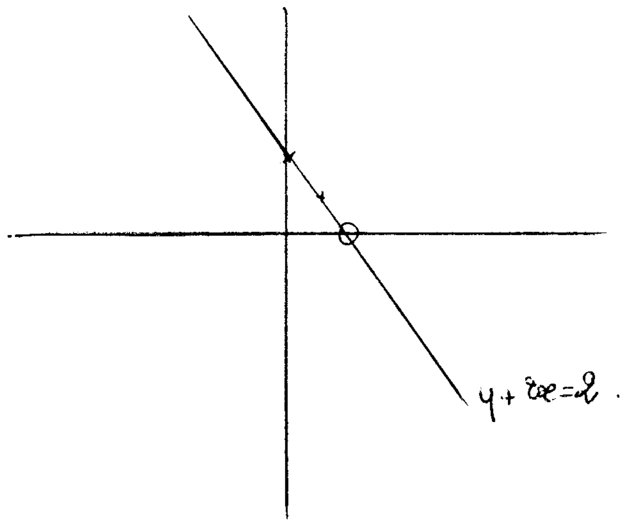
$z = x+iy \neq (1+i$

$$= \frac{x^2 - x + y^2 - 2y}{(x-1)^2+y^2} + i\,\frac{(-\cancel{xy} + \cancel{xy} - y - 2x + 2)}{(x-1)^2+y^2}$$

Z réel si $\mathrm{Im}(Z) = 0 \Rightarrow -y - 2x + 2 = 0$

$y + 2x = 2$ éqt d'une droite

sans le point $(1,0)$.



Ex déterminer l'ensemble des nb complexes tels que

Supp) $Z = (z-1)(\bar{z}-i)$ soit réel puis imaginaire

$$(x+iy-1)(x-iy-i) = x^2 - \cancel{ixy} - xi + \cancel{iyx} + y^2 + y - x + iy + i$$

$$= x^2 + y^2 + y - x + i(y - x + 1) \quad \text{réel}$$

$$\Rightarrow y - x + 1 = 0$$

droite d'eq^t $\underline{y = x - 1}$

imag $\quad x^2 + y^2 + y - x = 0$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$