FONCTION D'UNE VARIABLE REELLE.

I LIMITES.

1 Définition. $f : D \to R$ avec $D =$ intervalle de R.
a tel que f soit définie sur un « voisinage » de a (mais pas nécessairement en a) alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad (l \in R) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0, \left(0 < |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \forall A > 0 \quad \exists \eta > 0, \left(0 < |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > A\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 > 0, \left(x > x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)$$

2 **Propriétés.** **a)** f et g définies sur un même intervalle D, si $\lim_{x \to a} f(x) = l$, si $\lim_{x \to a} g(x) = l'$ et si $\forall x \in R$ $f(x) \le g(x)$ alors $l \le l'$

Attention ! ***Si $f(x) < g(x)$ alors $l \le l'$ (et non $l < l'$!).***

Ex. $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ et $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
$\forall x \in]0\,;+\infty[$ $f(x) < g(x)$ mais $l = l' = 1$.

b) Théorème du gendarme : Si $\forall x \in D$ $f(x) \le g(x) \le h(x)$ et si

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l$ *alors* $\lim_{x \to a} g(x)$ *existe et vaut* l.

c) Opérations : La limite resp. d'une somme , d'un produit , d'un quotient est égale, resp., à la somme, au produit, au quotient des limites

Retenir : $\frac{1}{0^+}$ *donne* $+\infty$, $\frac{1}{0^-}$ *donne* $-\infty$, $\frac{1}{\infty}$ *donne* 0 ensuite... on fait jouer la règle des signes .

Formes indéterminées : $\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$.

Equivalents . Au voisinage de a $f(x) \sim g(x)$ quand $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Théorème Si, dans un produit ou un quotient d'un nombre fini de facteurs, on remplace un ou plusieurs termes par un équivalent, la limite ne change pas.

APPLICATIONS : ☞ Tout polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré vers l' ∞ .

☞ Tout polynôme est équivalent à son monôme de plus bas degré vers 0 .

Attention ! Le théorème « parle » de produit ou de quotient **mais pas de somme**

En effet, ce serait inexact, comme le montre l'exemple suivant :

$f(x) = x^5$ $\quad f(x) \sim x^5$

$g(x) = x + x^2$ $\quad g(x) \sim x$ $\quad$ Mais $f(x) + g(x) + h(x) = x^5 + x^2$ qui n'est

$h(x) = -x$ $\quad h(x) \sim -x$ $\quad$ pas équivalent à x^5 en 0 .

II CONTINUITE.

Définition . f est continue en $a \in D$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ existe et est finie.

f est continue sur un intervalle I si $\forall x \in I$ f est continue en x .

Théorème ***(important !)*** Par une fonction continue , l'image d'un intervalle est un intervalle .
Si cet intervalle est fermé et borné , cette fonction est bornée et atteint ses bornes.

Opérations : La + , le $\otimes$, le / de fonctions continues sur I , est une fonction continue sur I (donc toute fonction polynôme ou rationnelle sur I est continue)
De même , la composée de fonctions continues est une fonction continue

III DERIVEE - DIFFERENTIELLE .

f fonction réelle définie sur un voisinage: $]a - \alpha ; a + \alpha[$ de a $\quad (\alpha > 0)$.

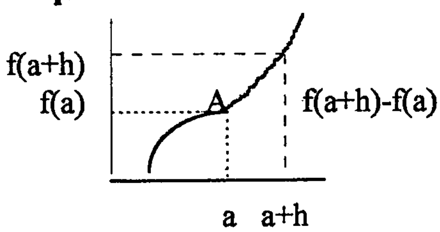
f est « **dérivable** » en a si $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a une limite finie quand x tend vers a .

Cette limite, notée f '(a) s'appelle « **nombre dérivé de f en a** ».

On peut aussi écrire (et c'est même une définition équivalente) que :

$$\mathbf{f(a + h) = f(a) + h\, f'(a) + h\, \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(h) = 0}$$

Interprétation géométrique:



f' (a) = coef. dir. de la tangente en A à C

Equation de la tangente : $y = f'(a)\,[x - a] + f(a)$.

Formules : $(u + v)' = u' + v'$ $\qquad (u . v)' = u'v + u v'$ $\qquad (u^n)' = n\, u'\, u^{n-1}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $\qquad \left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$ $\qquad \left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$(\cos x)' = -\sin x$ $\qquad (\sin x)' = \cos x$ $\qquad [\cos(ax+b)]' = -a \sin(ax+b)$

$[\sin(ax+b)]' = a \cos(ax+b)$

Plus généralement :

$[\sin u]' = u' \cos u$ et $[\cos u]' = -u' \sin u$

...ce qui vient du 2°du théorème suivant :

Théorème : 1) f dérivable en a $\Rightarrow$ f continue en a

2) f et u dérivables alors $f_o u$ est dérivable avec :

$[f_o u]'(x) = u' \times f'[u(x)]$.

Réciproque du 1) ... fausse !

La différentielle de f : $x \to y = f(x)$ est notée $dy = df = f'(x)\, dx$.

Attention ! ☞C'est une application linéaire (pour x fixé !)

☞dx ne dépend pas de x

☞On peut donc écrire $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ *et la derivee* $n^{ième}$ *de* f : $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$

Théorème f différentielle en a $\Leftrightarrow$ f est dérivable en a

Opérations: $d(u+v) = du + dv$ $d(u \times v) = v\, du + u\, dv$ ...etc.

Fonction composée : $y = f_o u$ alors $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$ On « change » de variable .

__Ex:__ $y = \sin^4 x$ $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\, dx$ et $y = u^4$ d'où :
$dy = 4u^3\, du$ soit $dy = 4 \sin^3 x \cos x\, dx$

Règle de l'Hôpital f et g sont continues sur [a;b] et dérivables sur]a;b[alors :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

__Ex:__ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{\cos x} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0$

DOMAINE DE DÉFINITION D'UNE FONCTION

Notons D l'ensemble de départ d'une fonction f et A son ensemble d'arrivée, c'est-à-dire que l'on a : $\begin{aligned} &D \to A \\ f : &x \mapsto y = f(x)\end{aligned}$

Noté Df, c'est l'ensemble des x appartenant à l'ensemble de départ ., pour lesquels f(x) existe c'est-à-dire est calculable. $D_f = \{x \in D / f(x) \text{ existe}\}$.

Exemple :

$\begin{aligned} &\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f : &x \mapsto f(x) = \sqrt{x}\end{aligned}$ alors $D_f = [0;+\infty[$

$\begin{aligned} &\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f : &x \mapsto f(x) = \frac{1}{x+1}\end{aligned}$ alors $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

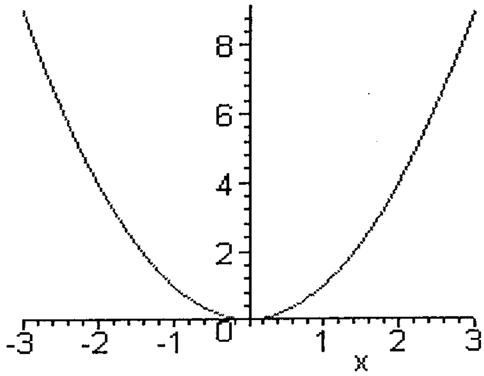
$\begin{aligned} &\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f : &x \mapsto f(x) = \ln(-|x|)\end{aligned}$ alors $D_f = \varnothing$!

PARITÉ-IMPARITÉ

On dit qu'une fonction f est paire et alors Cf admet une symétrie par rapport à l'axe Oy si et seulement si :

(i) $\forall x \in D_f, -x \in D_f$

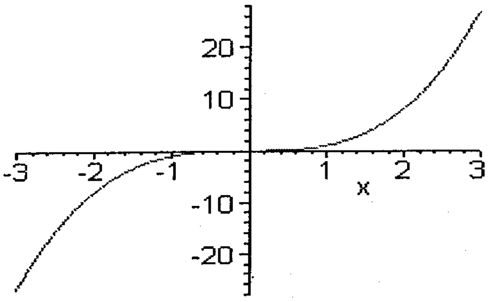
(ii) $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$



On dit que f est impaire et alors Cf admet une symétrie par rapport à l'origine O si et seulement si :

(i) $\forall x \in D_f, -x \in D_f$

(ii) $\forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$

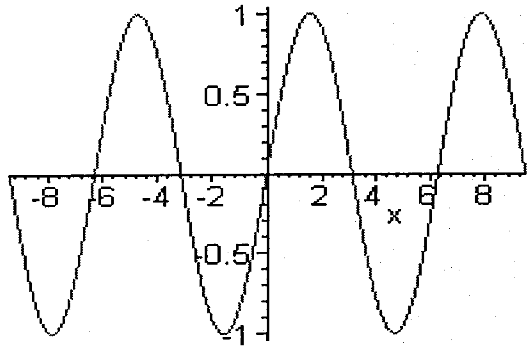


PÉRIODICITÉ

On dit qu'une fonction f est T-périodique si et seulement si :

(i) $\forall x \in D_f, \forall k \in \mathbb{Z}, x + kT \in D_f$

(ii) $\forall x \in D_f, f(x+kT) = f(x)$



AXE DE SYMÉTRIE - CENTRE DE SYMÉTRIE

On dit qu'une fonction f est symétrique par rapport à l'axe vertical x = a si et seulement si :

$\forall x \in D_f, f(a-x) = f(a+x)$

On dit qu'une fonction f est symétrique par rapport au point C(a ;f(a)) si et seulement si : $\forall x \in D_f, f(a+x) + f(a-x) = 2f(a)$

INTERVALLE D'ÉTUDE : I_E

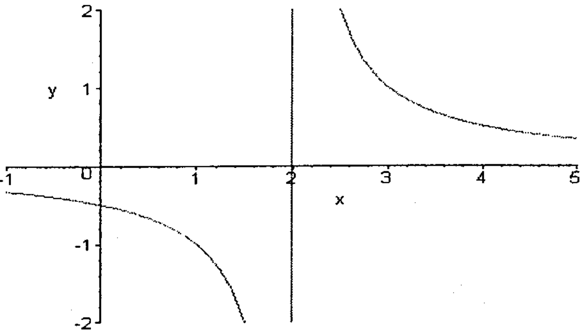
Si une fonction est paire ou impaire et/ou périodique et/ou possédant un axe ou un centre de symétrie, on peut grâce aux différents éléments de symétrie, réduire le domaine de définition Df à un intervalle plus petit.

Exemple : $\begin{aligned} &\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f : &x \mapsto f(x) = \sin(x)\end{aligned}$

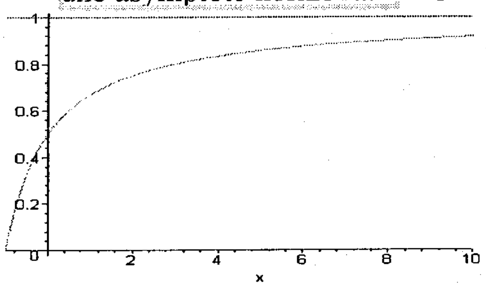
La fonction f est impaire est 2 -périodique et symétrique par rapport à l'axe $x = \frac{1}{2}$ donc $I_E = \left[0;\frac{1}{2}\right]$.

ASYMPTOTES ET BRANCHES PARABOLIQUES

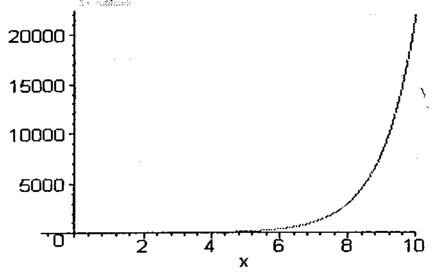
- Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ alors la droite verticale d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f, que l'on note Cf.



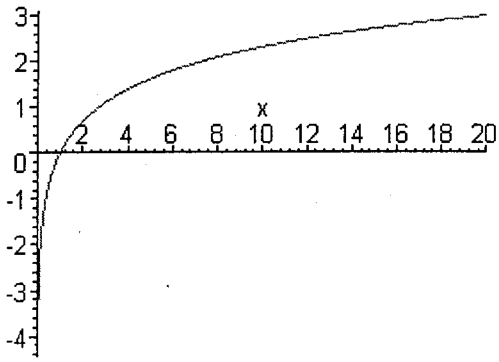
- Si $\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0$ alors la droite horizontale d'équation $y = y_0$ est une asymptote horizontale à Cf.



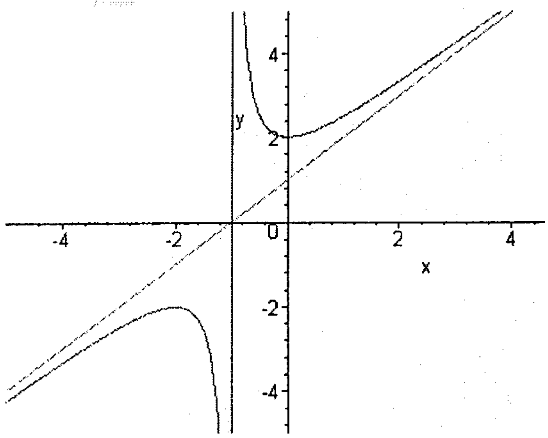
- Si $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ alors plusieurs cas se présentent :
    - Si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ alors Cf admet une branche parabolique de direction Oy.



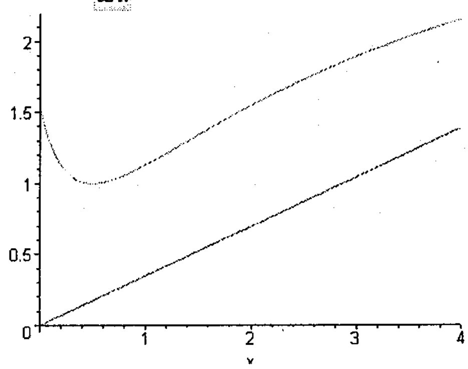
    - Si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors Cf admet une branche parabolique de direction Ox.



    - Si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0)$ et si $\lim_{x \to \infty} f(x) - ax = b$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à Cf.



    - Si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \ (a \neq 0)$ et si $\lim_{x \to \infty} f(x) - ax = \infty$ alors Cf admet une branche parabolique de direction $y = ax$.



CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION

1. **La continuité en x_0.**

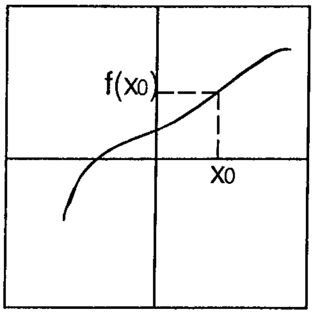
Soit f une fonction définie en x_0, et valant $f(x_0)$ sinon il n'y a pas lieu de parler de continuité.

Rappel : $x \to x_0^-$ signifie : $\begin{cases} x \to x_0 \\ x < x_0 \end{cases}$;

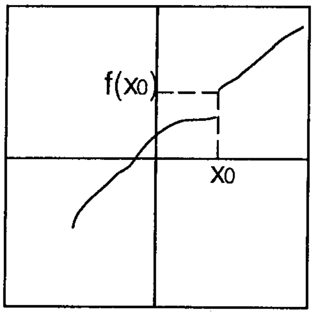
$x \to x_0^+$ signifie : $\begin{cases} x \to x_0 \\ x > x_0 \end{cases}$

f est continue en x_0 si et seulement si :

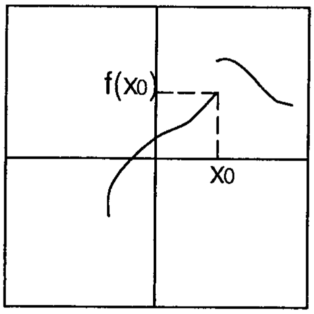
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$



f est continue à droite en x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

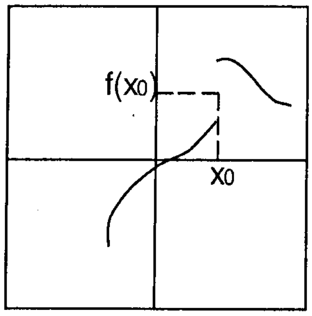


f est continue à gauche en x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$



f n'est ni continue à droite ni à gauche en x_0 si : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$

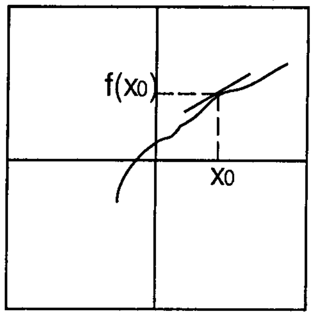


2. **La dérivabilité en x_0**

Soit f une fonction définie et **continue en x_0**.

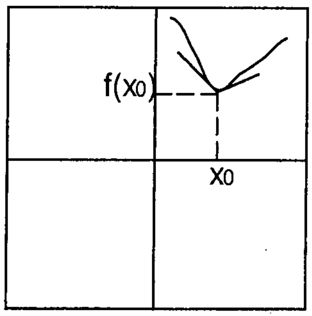
On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ et si cette limite est un nombre réel, non infini.



On dit que f est dérivable à droite en x_0, à gauche en x_0 mais pas en x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

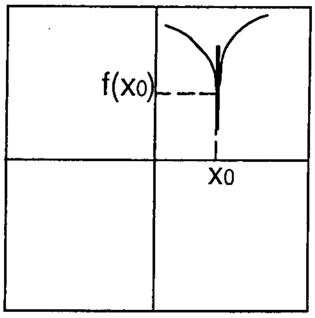
et si ces limites sont finies.



On dit alors que le point (x_0 ; $f(x_0)$) est un point anguleux.

On dit que f n'est ni dérivable à droite, ni dérivable à gauche en x_0 si et seulement si :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ \lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\end{array}\right\}\text{ sont infinies .}$$



On dit alors que le point (x_0 ; $f(x_0)$) est un point de rebroussement.

Exemple : soit la fonction f définie par $f(x)=|x|$.

f est continue en 0 mais pas dérivable en 0. En effet :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}|x|=0=f(0)$$

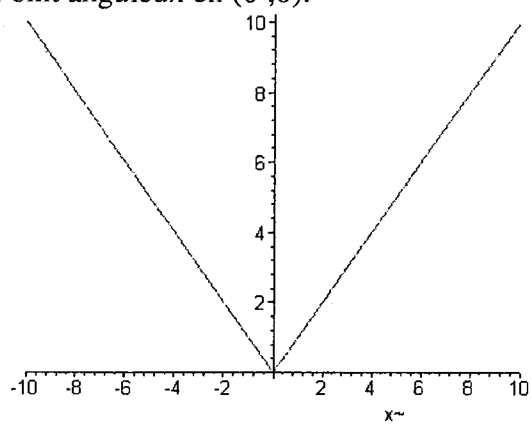
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}|x|=0=f(0)$$

et

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$$

Point anguleux en (0 ;0).



3. <u>Continuité et dérivabilté sur un intervalle.</u>

On dit que f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout point de l'intervalle I. De même on dit que f est dérivable sur l'intervalle I si f est dérivable en tout point de I.

Bien entendu il est impossible de vérifier tous les points de I car il y en a une infinité. Il faut retenir que les fonctions que nous étudions à part quelques cas particuliers, sont des fonctions continues et dérivables sur leur domaine de définition.

Exemple : sinus, cosinus, exponentielle sont continues et dérivables sur IR....

FONCTION ARCSINUS

$D_{\text{arcsin}} = [-1;1]$

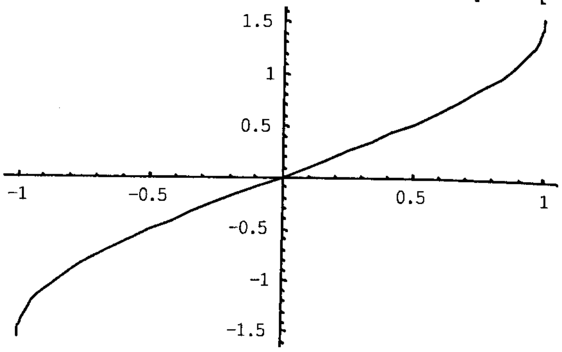
arcsin est impaire càd

$\arcsin(-x) = -\arcsin(x) \quad \forall x \in [-1;1]$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arcsin u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

arcsin est strictement croissante sur $[-1;1]$, continue sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1;1[$.



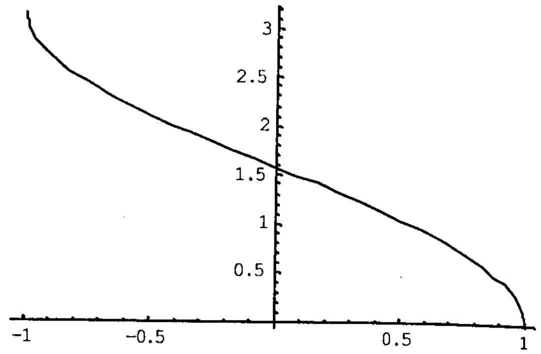
FONCTION ARCCOSINUS

$D_{\text{arccos}} = [-1;1]$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos u(x))' = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

arccos est strictement décroissante sur $[-1;1]$, continue sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1;1[$.



FONCTION ARCTANGENTE

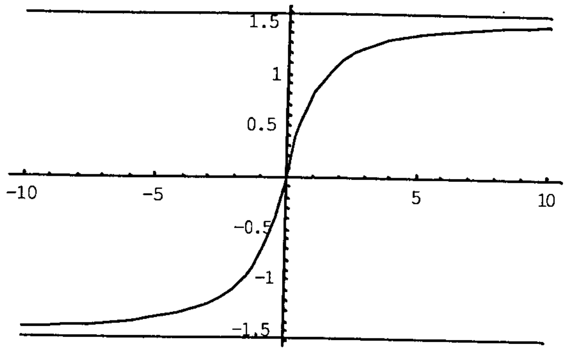
$D_{\text{arctan}} = \mathbb{R}$

La fonction arctan est impaire càd : $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan(-x) = -\arctan(x)$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arctan u(x))' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$$

arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa courbe admet deux asymptotes horizontales : $y = \frac{\pi}{2}$ et $y = -\frac{\pi}{2}$.



ATTENTION

$$\arctan x \neq \frac{\arcsin x}{\arccos x}$$

$$\arccos x \neq \frac{1}{\cos x}$$

$$\arcsin x \neq \frac{1}{\sin x}$$

$\forall x \in [-1;1], \sin(\arcsin(x)) = x$

$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(x)) = x$

$\forall x \in [-1;1], \cos(\arccos(x)) = x$

$\forall x \in [0;\pi], \arccos(\cos(x)) = x$

$$\forall x \in [-1;1], \cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$\forall x \in [-1;1], \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(x)) = x$

FONCTION SINUS HYPERBOLIQUE

$$\text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

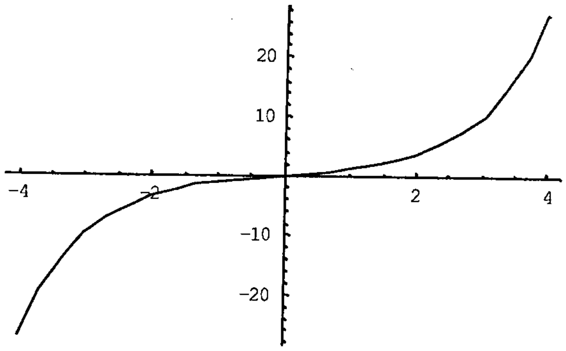
$D_{\text{sh}} = \mathbb{R}$

La fonction sh est impaire càd $\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}(-x) = -\text{sh}(x)$

$(\text{sh}\, x)' = \text{ch}\, x$

$(\text{sh}\, u(x))' = u'(x)\text{ch}(u(x))$

La fonction sh est strictement croissante, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.



FONCTION COSINUS HYPERBOLIQUE

$$\text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

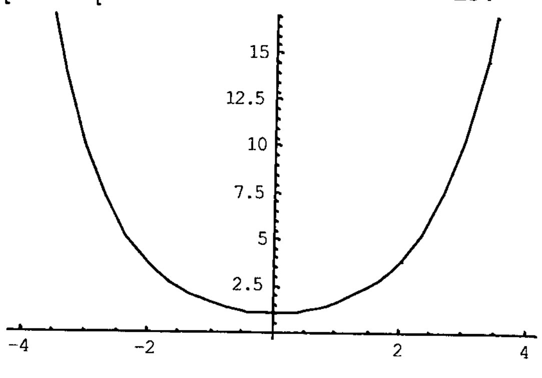
$D_{\text{ch}} = \mathbb{R}$

La fonction ch est paire càd $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(-x) = \text{ch}(x)$

$(\text{ch}\, x)' = \text{sh}\, x$

$(\text{ch}\, u(x))' = u'(x)\text{sh}(u(x))$

La fonction ch est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.



FONCTION TANGENTE HYPERBOLIQUE

$$\text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

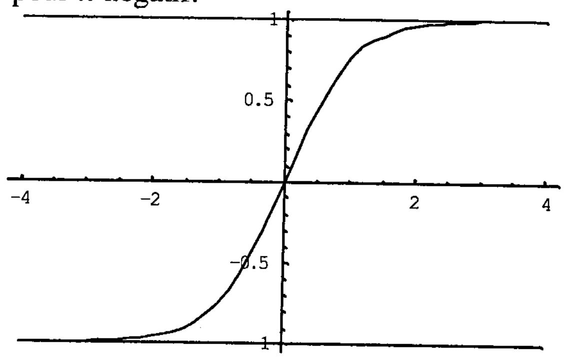
$D_{\text{th}} = \mathbb{R}$

La fonction th est impaire càd $\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}(-x) = -\text{th}\, x$

$(\text{th}\, x)' = 1 - \text{th}^2 x$

$(\text{th}\, u(x))' = u'(x)\left(1 - \text{th}^2 u(x)\right)$

La fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative admet une asymptote horizontale y =1 pour x positif et une asymptote horizontale d'équation y = -1 pour x négatif.



RELATION REMARQUABLE

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\text{sh}^{-1} x = \text{argsh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

$\forall x \in [1; +\infty[$,

$$\text{ch}^{-1}(x) = \text{argch}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$\forall x \in]-1; 1[$,

$$\text{th}^{-1}(x) = \text{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Fonctions réciproques

Exercice 1

Soit la fonction sinus hyperbolique $x \longrightarrow sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et la fonction cosinus hyperbolique $x \longrightarrow ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

1. Démontrer que $\forall x \in I\!R,\ ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.
2. Etudier $ch(x)$, (parité, domaine de définition, dérivée)
3. Démontrer que $ch(x)$ réalise une bijection de $I\!R^+$ dans $[1, +\infty[$.
4. Soit $Argch(x)$ sa fonction réciproque. Calculer $(Argch(x))'$
5. Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[, Argch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

Exercice 2

Etudier $f(x) = arcsin(2x + 1)$

Exercice 3

Etudier $f(x) = \ln(arcsin(5x))$

Exercice 4

Etudier $f(x) = arccos(1 - 2x)$

Exercice 5

Etudier $f(x) = 2arctan(e^x) - arctan(sh(x))$

Exercice 6

Etudier $f(x) = \ln(ch(x))$

Exercice 7

Etudier $f(x) = arcsin(\ln(x))$

Exercice 8

1. Etudier
$$u(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

2. Etudier
$$f(x) = ch(\frac{2x-1}{x+1})$$

Exercice 9

Trouver x tel que $ch(x) + 2sh(x) = 3$.