SGM 2$^{\text{ème}}$ année, 2008-2009

Graphique - Zéros de fonction - Equations différentielles - Erreurs d'arrondi - Instabilité numérique

Contents

1 Graphiques 2D

Pour effectuer des graphiques en deux dimensions, on utilise la commande plot2d. Cette fonction a de nombreux arguments optionnels permettant de spécifier des attributs d'un graphique: couleur, style et épaisseur des traits, échelle, dimensions du cadre, etc. Pour découvrir ces arguments,

taper help plot2d.

Exemples:

$--> x = [1, 3, 4, 9];$
$--> y = [2, 7, -6, -3];$
$--> plot2d(x, y)$
//relie les points de coordonées $(x(1), y(1)), (x(2), y(2))$, etc.

1.1 tracé d'une unique courbe

$--> x = 0.1 : 0.1 : 10;$
$--> y = sin(x)./x;$
$--> xbasc()$;//efface le contenu de la fenètre graphique
$--> plot2d(x, y)$

1.2 tracé de deux courbes par superposition

$--> x = 0.1 : 0.1 : 10;$
$--> y = sin(x)./x;$
$--> z = cos(x)./x,$
$--> xset($"window"$, 1)$;//ouvre une nouvelle fenêtre 1
//la fenêtre par défaut est 0
$--> plot2d(x, y); plot2d(x, z)$//les deux graphiques sont superposés

2 Zéros de fonction scalaire avec fsolve

−− >help fsolve

On se propose de programmer la fonction polynomiale $y = 2 * x^3 - 30 * x^2 - 3 * x + 200$ et de calculer ses zéros avec la fonction $fsolve$.

2.1 zéro de polynôme

−− >function$[y] = fct(x)$,
$-- > y = 2 * x^3 - 30 * x^2 - 3 * x + 200$,
$-- > endfunction$
$-- > x = [-3 : 0.1 : 15];$
$-- > xbasc();$
$-- > plot2d(x, fct(x));$
$-- > x1 = fsolve(-1, fct)$
$-- > fct(x1)$
$-- > x2 = fsolve(1, fct)$
$-- > fct(x2)$
$-- > x3 = fsolve(11, fct)$
$-- > fct(x3)$

3 Equations différentielles avec ode *On peut passer un peu vite sur ce paragraphe*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$$

−− >help ode

3.1 Equations différentielles scalaires autonomes

$$\frac{dy}{dt} = f(y),\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$$

3.1.1 $\frac{dy}{dt} = sin(y)$

$-->$function$[ydot] = f(t, y)$,
$--> ydot = sin(y)$,
$--> endfunction$

//attention, on écrit f(t,y) même si f ne dépend pas de t
$--> y0 = 0.2; t0 = 0; t = 0 : 0.1 : 15$
$--> y = ode(y0, t0, t, f)$
$--> xbasc(); plot2d(t, y)$

3.1.2 $\frac{dy}{dt} = -y^2$

$-->$function $[ydot] = f(t, y)$,
$--> ydot = -y^2$,
$--> endfunction$
//attention, on écrit f(t,y) même si f ne dépend pas de t
$--> y0 = 0.2; t0 = 0; t = 0 : 0.1 : 30$
$--> y = ode(y0, t0, t, f)$
$--> xbasc(); plot2d(t, y)$

3.1.3 $\frac{dy}{dt} = y^2$

$-->$function $[ydot] = f(t, y)$,
$--> ydot = y^2$,
$--> endfunction$
//attention, on écrit f(t,y) même si f ne dépend pas de t
$--> y0 = 0.2; t0 = 0; t = 0 : 0.1 : 30$
$--> y = ode(y0, t0, t, f)$
$--> xbasc(); plot2d(t, y)$

3.2 Equations différentielles scalaires non autonomes

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \; y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$$

3.2.1 $\frac{dy}{dt} = sin(t * y)$

$--$ >function$[ydot] = f(t, y)$,
$-- > ydot = sin(t * y)$,
$-- > endfunction$

//attention, on écrit f(t,y) même si f ne dépend pas de t
$-- > y0 = 0.2; t0 = 0; t = 0 : 0.1 : 15$
$-- > y = ode(y0, t0, t, f)$
$-- > xbasc(); plot2d(t, y)$

Erreurs d'arrondi - Instabilité numérique

4 Exercices

Vous rédigerez sur une feuille les réponses aux exercices et la rendrez à la fin du TP.

question 1 Faire un programme calculant la somme des N premiers entiers, N étant donné. Exemple: si N=4, calculer S=1+2+3+4. (voir poly d'algo pour s'aider si besoin)

question 2 Taper

```
help prod
```

. En déduire le programme scilab de la fonction factorielle.

4.1 Variations autour du nombre π

En mathématiques, un nombre transcendant est un nombre qui n'est solution d'aucune équation.
Pi (3,14 158...) est un nombre transcendant très connu. Il permet entre autres, (vous le savez j'en suis sûre), de calculer la circonférence ou la surface d'un cercle, l'aire ou le volume d'une sphère, etc.
Il n'est cependant pas sans intérêt, sur le plan de l'amusement pur, de savoir déterminer " Pi " avec le plus de décimales possibles. Le poème mnémotechnique qui permet sans aucun calcul, d'en énoncer 30 est connu de la plupart d'entre vous:

"Que j'aime à faire connaitre ce nombre utile aux sages.
Immortel Achimède, artiste, ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur ;
Pour moi ton problème eut de pareils avantages "...
et cela continue, encore et encore !
Il suffit de compter le nombre de lettres dans chaque mot : (Que= 3 , j= 1, aime= 4 , à= 1 , faire= 5 , connaitre= 9 etc...)
Il existe des méthodes amusantes pour déterminer Pi.

1ere méthode: trouver un éléphant
La hauteur d'un éléphant (des pieds aux épaules) est : 2 * pi * le diamètre de ses pieds.

2ème méthode
Il suffit de placer un récipient de forme circulaire dans un récipient de forme carré en prenant soin que les bords soient tangents.
On jette une quantité importante de boulettes de papier en direction des 2 récipients sans chercher à en mettre plus dans l'un que l'autre.
On ne comptabilise pas les boulettes tombées hors des récipients.
On compte les boulettes dans le récipient circulaire (n)
On compte les boulettes dans le récipient carré (N)

Si R est le rayon du cercle:
l'aire de base du récipient circulaire est πR^2
l'aire de base du récipient carré est $2R * 2R = 4R^2$

Le rapport des aires est proche du rapport des nombres de boulettes si le nombre de boulettes lancées est suffisamment grand:

$$\begin{aligned} \frac{n}{N} &= \frac{\pi R^2}{4R^2} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Il suffit de multiplier par 4 le rapport $\frac{N}{N}$, et on obtient une valeur approchée de π.

3ème méthode
Cette méthode a été imaginée par le naturaliste Buffon au 18ème siècle. Elle

consiste à prendre des allumettes de 3cm de long par exemple et de tracer des droites parallèles distantes d'une longueur double de celle de l'objet (6 cm pour notre cas).

On jette un nombre N assez grand d'allumettes sur la feuille et on note n le nombre d'allumettes coupant une ligne. On effectue le rapport $\frac{N}{n}$. On obtient une valeur de π assez approchée si le nombre de lancers est important.

D'autres méthodes

Plusieurs suites convergeant vers π ont été construites par des méthodes analytiques, par exemple celle de Newton (1642-1727):

$$\pi = 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{4n+1}(n!)^2(2n+1)}$$

ou celle de Leibnitz (1646-1716)

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Si on veut calculer π à l'aide d'une de ces formules sur un ordinateur, étant donné qu'il y a une capacité finie de mémoire, on doit fixer un entier N et calculer une valeur approchée de π par

$$\pi = 6 \sum_{n=0}^{N} \frac{(2n)!}{2^{4n+1}(n!)^2(2n+1)} \tag{1}$$

et

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} \tag{2}$$

Question 3. *Ecrire un programme permettant de calculer π de façon approchée à l'aide des formules 1 et 2. Comparer les résultats obtenus en fonction du nombre de termes de la somme. Laquelle de ces deux approximations de π limite le mieux la propagation des erreurs d'arrondi?*

4.2 Pi et le nombre d'or

Son nom
On le désigne par la lettre grecque φ (phi) en hommage au sculpteur grec Phidias (né vers 490 et mort vers 430 avant J.C) qui décora le Parthénon à Athènes. C'est Théodore Cook qui introduisit cette notation en 1914.

L' histoire ...

Il y a 10 000 ans : Premiére manifestation humaine de la connaissance du nombre d'or (temple d'Andros découvert sous la mer des Bahamas).

2800 av JC : La pyramide de Khéops a des dimensions qui mettent en évidence l'importance que son architecte attachait au nombre d'or.

Vé siécle avant J-C. (447-432 av.JC) : Le sculpteur grec Phidias utilise le nombre d'or pour décorer le Parthénon à Athénes, en particulier pour sculpter la statue d'*Athéna Parthénos* . Il utilise également la racine carrée de 5 comme rapport.

IIIé siécle avant J-C. : Euclide évoque le partage d'un segment en "extrême et moyenne raison" dans le livre VI des *Eléments.*

1498 : Fra Luca Pacioli, un moine professeur de mathématiques, écrit *De divina proportione* ("La divine proportion").

Au XIXéme siécle : Adolf Zeising (1810-1876), docteur en philosophie et professeur à Leipzig puis Munich, parle de "section d'or" *(der goldene Schnitt)* et s'y intéresse non plus à propos de géométrie mais en ce qui concerne l'esthétique et l'architecture. Il cherche ce rapport, et le trouve (on trouve facilement ce qu'on cherche ...) dans beaucoup de monuments classiques. C'est lui qui introduit le côté mythique et mystique du nombre d'or.

Au début du XXéme siécle : Matila Ghyka, diplomate roumain, s'appuie sur les travaux du philosophe allemand Zeising et du physicien allemand Gustav Theodor Fechner ; ses ouvrages *L'esthétique des proportions dans la nature et dans les arts (1927) et Le Nombre d'or. Rites et rythmes pythagoriciens dans le développement de la civilisation occidentale (1931)* insistent sur la prééminence du nombre d'or et établissent définitivement le mythe .

Au cours du XXéme siécle : des peintres tels Dali et Picasso, ainsi que des architectes comme Le Corbusier, eurent recours au nombre d'or.
1945 : Le Corbusier fait bréveter son *Modulor* qui donne un systéme de proportions entre les différentes parties du corps humain.

Où trouve -t-on le nombre d'or?

Il parait que ...

Le rapport de la hauteur de la pyramide de Khéops par sa demi-base est le nombre d'or.
Il semble que ceci soit vrai, en dehors de toute considération ésotérique.
D'aprés Hérodote, des prêtres égyptiens disaient que les dimensions de la grande pyramide avaient été choisies telles que : *"Le carré construit sur la hauteur verticale égalait exactement la surface de chacune des faces triangulaires"*

Le Parthénon d'Athénes fait apparaitre un peu partout le nombre d'or . Certains se sont employés à le chercher et l'ont bien sûr trouvé ! Et s'il avait cherché 2, l'auraient-ils trouvé ??

Définition du nombre d'or
Le nombre d'or est la solution positive de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$, c'est-à dire le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Les 100 premiéres décimales du nombre d'or sont :
1,618 033 988 749 894 848 204 586 834 365 638 117 720 309 179 805 762 862 135 448 622 705 260 462 189 024 497 072 072 041
Le record de calcul des décimales date de 1998 et a été réalisé par Simon Plouffe : 10 000 000 décimales (29 minutes de calcul).

Une formule qui relie π et le nombre d'or φ

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{2k+1}(\varphi^{-2k-1}+\varphi^{-6k-3}) \tag{3}$$

Question 4. *Ecrire un programme permettant de calculer π de façon approchée à l'aide du nombre d'or.*

4.3 Dichotomie

La méthode de dichotomie pour la recherche d'un zero d'une fonction est basée sur la propriété suivante: soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors, il existe $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$. Pour trouver un zéro de f, la méthode de dichotomie consiste à calculer le point milieu m de l'intervalle et à regarder la valeur de $f(m)$. Selon le signe, on sait dans quel sous-intervalle $[a,m]$ ou $[m,b]$ se trouve le zéro. Ensuite on réitère le procédé dans le sous-intervalle correspondant. Ce qui conduit à l'algorithme suivant:

Poser $a_0 = a$
$b_0 = b$
$x_0 = (a_0 + b_0)/2$

Pour $k = 0, 1, ..., N$ calculer:
si $f(a_k)f(x_k) < 0$ alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k$
sinon, $a_{k+1} = x_k$ et $b_{k+1} = b_k$
$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2$
fin-de-si
fin-de-pour

Question 6. *Ecrire un programme permettant de calculer une valeur approchée d'un zéro d'une fonction f donnée.*

1. par exemple logarithme nprien dans un intervalle $[a,b]$ à choisir
2. par exemple $y = (x+3)(x-1) - x + 2$ dans un intervalle $[a,b]$ à choisir. pour la deuxième fonction, on pourra programmer la fonction par la commande *function* et la dessiner pour avoir une idée de ses zéros. (Fait lors du TP1 disponible sur l'ENT).