SGM $2^{\text{ème}}$ année, 2008-2009

La méthode des différences finies pour les problèmes hyperboliques

Contents

Nous étudions dans ce TP la méthode des différences finies. Il s'agit d'une méthode très efficace, souvent employée chez les industriels, qui permet de résoudre un grand nombre de problèmes de calcul scientifique. Nous commençons l'étude sur un problème simulant un phénomène de propagation.

En une dimension, considérons le problème de l'équation de transport suivant:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$$
$$u(x,0) = u^\circ$$

où $a \in I\!R$ est donné et a est une fonction de la position x et du temps t. L'unique solution du problème est simplement

$$u(x,t) = u^\circ(x - at)\ t \geq 0,\ \ x \in I\!R$$

On a ainsi modélisé une propagation à la vitesse constant a, vers la droite si $a > 0$, vers la gauche si $a < 0$. Le problème ne fait intervenir que des dérivées partielles du premier ordre (donc plus facile que l'équation de la chaleur!).

On introduit le pas de temps Δt et le pas d'espace Δx (appelé aussi pas de discrétisation). Le but du TP est d'approcher en un temps fini sur ordinateur, la solution de l'équation. On cherche alors une approximation notée u_i^n de la fonction u prise au point $x_i = i\Delta x$ et au temps $t^n = n\Delta t$.

$$u_i^n = u(x_i, t^n)$$

Rappel: Ouvrez dès à présent, si ce n'est pas déjà fait votre cours-TD sur le problème de la chaleur!!!)

Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ un ensemble de n points régulièrement espacés de h. La dérivée d'une fonction dérivable **à une seule variable** peut être approchée au point x_i par l'un des rapports aux différences:

$$
\begin{aligned}
u_g^{'}(x_i) &= \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{\Delta x} \\
u_c^{'}(x_i) &= \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2\Delta x} \\
u_d^{'}(x_i) &= \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

On a noté $u_g^{'}$ la dérivée à gauche, $u_c^{'}$ la dérivé centrée et $u_d^{'}$ la dérivé à droite.

1 Ecriture d'un schéma explicite

1.1 Question 1

Approximer par la dérivée à droite le terme suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, n\Delta t)$$

.
On fera attention au fait que la fonction u est une fonction à 2 variables et qu'ici, c'est t qui varie!

1.2 Question 2

Approximer par la dérivée à gauche le terme suivant

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, n\Delta t)$$

.
On fera attention au fait qu'ici c'est x qui varie et t est gelé!

1.3 Question 3

En posant $x_i = i\Delta x$ et $t^n = n\Delta t$ et

$$u_i^n = u(x_i, t^n)$$

remplacer dans le problème de départ

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$$
$$u(x,0) = u^\circ$$

les dérivées premières des questions précédentes.
En exprimant u_i^{n+1} en fonction de u_i^n et u_{i-1}^n, vous obtenez un schéma appelé le **schéma décentré amont** valable sous la condition CFL suivante:

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

2 Programmation

Initialisation

Programmer le schéma trouvé à la question précédente. On utilisera $N = 200$ points de maillage pour mailler le segment $[0, 1]$. On prendra $a = 1$ et la condition CFL $\frac{a\Delta t}{\Delta x} = 0.6$

Commencer à écrire le programme scilab qui devrait commencer comme tel:

```
a= 1;
N= 200;
dx= 1/(N+1);
cfl= 0.6;
dt= 0.004;
```

Condition initiale

La condition initiale u° est bien évidemment donné. On prendra :

$$\begin{aligned} u^\circ &= 1 \quad \text{si } x < 0.5 \\ &= 0 \quad \text{si } x > 0.5 \end{aligned}$$

A partir de la donnée initiale, on poursuivra le calcul jusqu'à un certain temps physique $T = 0.2$.

Ecrire sous scilab la condition initiale:

```
for i=1:N
if i*dx<0.5 then
u(i)=
else
u(i)=
end
end
```

Conditions aux limites

Nous prendrons des conditions aux limites de type Neumann qui laissent les ondes sortir du domaine de calcul, à savoir:

$$u_0^n = u_1^n$$

et

$$u_{N+1}^n = u_N^n$$

où N est tel que $\Delta x = \frac{1}{N+1}$.

Pour vous aider, vous pouvez prendre le programme de l'équation de la chaleur, la trame est identique!

Bonnes fêtes!