PRODUITS DE VECTEURS

I Produit scalaire de deux vecteurs

1 Définition

Soit V l'espace vectoriel rapporté au repère orthonormal (0 ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). On appelle "produit scalaire" des deux vecteurs $\vec{V}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{V}'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ le réel : $\boxed{\vec{V}\cdot\vec{V}'=xx'+yy'+zz'}$

2 Propriétés

D'après la définition, le produit scalaire définit une application de $V \times V$ dans R
$(\vec{V}, \vec{V}') \rightarrow \vec{V}\cdot\vec{V}'$ qui possède les propriétés suivantes :

- Symétrie : $\vec{V}\cdot\vec{V}'=\vec{V}'\cdot\vec{V}$
- Bilinéarité (λ étant un scalaire) : $(\vec{V}_1+\vec{V}_2)\cdot\vec{V}'=\vec{V}_1\cdot\vec{V}'+\vec{V}_2\cdot\vec{V}'$

$$(\lambda\vec{V})\cdot\vec{V}'=\lambda\ \vec{V}\cdot\vec{V}'$$
$$\vec{V}\cdot(\vec{V}_1'+\vec{V}_2')=\vec{V}\cdot\vec{V}_1'+\vec{V}\cdot\vec{V}_2'$$
$$\vec{V}\cdot(\lambda\vec{V}')=\lambda\ \vec{V}\cdot\vec{V}'$$

- Positivité : Pour $\vec{V}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\vec{V}\cdot\vec{V}=x^2+y^2+z^2$, le "carré scalaire" $\vec{V}^2$ est positif. De plus,

$$\vec{V}\neq\vec{0}\Leftrightarrow\vec{V}^2>0 \quad \text{et} \quad \vec{V}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{V}^2=0.$$

Pour résumer, le produit scalaire définit sur V **une forme bilinéaire, symétrique et positive.**
V est appelé **"espace vectoriel euclidien".**

3 Norme

Pour $\vec{V}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\vec{V}\cdot\vec{V}=\vec{V}^2=x^2+y^2+z^2\geq 0$. On appelle **"norme euclidienne"** du vecteur $\vec{V}$ le réel : $\|\vec{V}\|=\sqrt{\vec{V}^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Exemples :

- $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$
- $\vec{V}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ $\|\vec{V}\|=\sqrt{9}=3$

Propriétés :

- Inégalité de Schwarz : $\left|\vec{V}\cdot\vec{V}'\right| \leq \left\|\vec{V}\right\| \times \left\|\vec{V}'\right\|$
- $\left\|\vec{V}\right\| \geq 0$ et $\left\|\vec{V}\right\| = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V} = \vec{0}$
- $\left\|\lambda\vec{V}\right\| = |\lambda| \left\|\vec{V}\right\|$

Application : Le vecteur $\vec{U} = \dfrac{1}{\left\|\vec{V}\right\|}\vec{V}$ est "unitaire".

Ainsi, pour $\vec{V} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{2}$ donc $\vec{U} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ est unitaire.

- Inégalité triangulaire : $\left\|\vec{V}+\vec{V}'\right\| \leq \left\|\vec{V}\right\| + \left\|\vec{V}'\right\|$

4 Base orthonormée

Soit $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ deux vecteurs non nuls de V. Ces deux vecteurs sont **"orthogonaux"** si leur produit scalaire est nul : $\mathbf{\vec{V} \perp \vec{V}' \Leftrightarrow \vec{V}\cdot\vec{V}' = \vec{0}}$.

Il en va ainsi pour les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ou $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ou encore $\vec{i}$ et $\vec{k}$.

On appelle **"base orthonormée"** d'un espace vectoriel euclidien, une base dont tous les vecteurs sont unitaires et orthogonaux deux à deux.

II Produit vectoriel de deux vecteurs

1 Définition

Soit $\vec{V}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{V}'=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On appelle “produit vectoriel” des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ le vecteur noté $\vec{V}\wedge\vec{V}'$ de composantes : $\vec{V}\wedge\vec{V}'=\begin{pmatrix}yz'-y'z\\x'z-xz'\\xy'-x'y\end{pmatrix}$.

2 Propriétés

D'après la définition, le produit vectoriel est une loi de composition interne dans V. De plus elle possède les propriétés suivantes :

- Bilinéarité : $$\begin{aligned}&(\vec{V}_1+\vec{V}_2)\wedge\vec{V}'=\vec{V}_1\wedge\vec{V}'+\vec{V}_2\wedge\vec{V}'\\&(\lambda\vec{V})\wedge\vec{V}'=\lambda(\vec{V}\wedge\vec{V}')\\&\vec{V}\wedge(\vec{V}_1+\vec{V}_2)=\vec{V}\wedge\vec{V}_1+\vec{V}\wedge\vec{V}_2\\&\vec{V}\wedge(\lambda\vec{V}')=\lambda(\vec{V}\wedge\vec{V}')\end{aligned}$$
- Antisymétrie : $\vec{V}\wedge\vec{V}'=-(\vec{V}'\wedge\vec{V})$

<u>Conséquence</u> : $\vec{V}\wedge\vec{V}=\vec{0}$ et de plus $\vec{V}\wedge\vec{V}'=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}=\lambda\vec{V}'$.

3 Interprétation géométrique

Théorème. Le produit vectoriel $\vec{V}\wedge\vec{V}'$ est un vecteur orthogonal à chacun de ces deux vecteurs avec : $\|\vec{V}\wedge\vec{V}'\|=\|\vec{V}\|\times\|\vec{V}'\|\times|\sin(\vec{V};\vec{V}')|$

Les vecteurs

Exercice 1
On considère les points $A(2,1,0)$, $B(3,3,2)$ et $C(4,2,-2)$. Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

Exercice 2
Calculer l'aire du triangle ABC dans les cas suivants:

$$\begin{array}{ll} a) & A(1,1,2), B(2,1,0), C(1,2,1) \\ b) & A(2,-1,1), B(1,1,2), C(2,1,1) \end{array}$$

Exercice 3
Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

$$\begin{array}{ll} a) & \vec{u}(0,1,2), \vec{v}(2,1,2) \\ b) & \vec{u}(-2,a,0), \vec{v}(a,0,2) \ a \in I\!R \end{array}$$

Exercice 4
Soit $\vec{u}(a,-2a,a\sqrt{(2)})$ et $\vec{v}(-a,a,3a)$ $a > 0$. Quel est l'angle formépar les deux vecteurs?

Exercice 5
Trouver, dans l'espace, une équation cartésienne du plan P passant par le point $A(2,1,-3)$ dont un vecteur normal est $\vec{n}(1,1,2)$.

Exercice 6

Donner l'équation de la sphère de diamètre [AB] avec $A(0,0,-1)$ et $B(1,2,-3)$

Exercice 7

Soit les points $A(1,0,0), B(0,1,1), C(-1,0,4), D(1,1,3)$ Calculer l'aire du triangle ABC, déterminer l'équation du plan (ABC), calculer la distance du point D à ce plan, et donner le volume du tétraèdre ABCD.

Exercice 8

Dans le plan, on considère $A(1,0)$, $B(2,-1)$ et $C(3,1)$.
Donner une équation de la droite (AB).
Calculer la distance du point C à la droite (AB).
calculer l'aire du triangle (ABC).

Exercice 9

Soit $\left(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.
On considère les points :

$$A(2\,;4\,;1),\ B(0\,;4\,;-3),\ C(3\,;1\,;-3),\ D(1\,;0\,;-2),\ E(3\,;2\,;-1)\quad \text{et}\quad I\left(\frac{3}{5}\,;4\,;-\frac{9}{5}\right).$$

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire, sans le justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse. Pour chaque question, il est compté un point si la réponse est exacte et zéro sinon.

1. Une équation du plan (ABC) est $2x+2y-z-11=0$.
2. Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
3. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
4. La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

5. Le point I est sur la droite (AB).

Exercice 10

Soit $\left(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k}\right)$ un repère orthonormal.

1. La droite passant par $A(1\,;2\,;-4)$ et $B(-3\,;4\,;1)$ et la droite représentée par $\begin{cases} x=-11-4t \\ y=8+2t \\ z=11+5t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ sont :

   ☐ sécantes. ☐ strictement parallèles. ☐ confondues.

2. Soient le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+3y-z+4=0$ et la droite $\mathscr{D}$ représentée par $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=8+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$:

   ☐ $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont sécants. ☐ $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont strictement parallèles.
   ☐ $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$. ☐ Aucune de ces possibilités n'est vraie.

3. La distance du point $A(1\,;2\,;-4)$ au plan d'équation $2x+3y-z+4=0$ est :

   ☐ $\dfrac{8\sqrt{14}}{7}$. ☐ 16. ☐ $8\sqrt{14}$. ☐ $\dfrac{8}{7}$.

4. Soient le point $B(-3\,;4\,;1)$ et la sphère $\mathscr{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2=16$:

   ☐ B est à l'intérieur de $\mathscr{S}$. ☐ B est à l'extérieur de $\mathscr{S}$. ☐ B est sur $\mathscr{S}$. ☐ On ne sait pas.