Université de Franche-Comté
Département de Mathématiques Janvier 2007

LICENCE 2 ANNÉE - PROBABILITÉS ÉLÉMENTAIRES
Rappels : un peu de dénombrement.

1 Arrangements, nombre A_n^p

Definition 1 Soit E un ensemble à n éléments.
On appelle *arrangement* de p éléments de E toute suite de p éléments distincts de E.

Exemples :
- $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  (3,1,6,5) est un arrangement de 4 éléments de E
  (3,1,3,4) n'est pas un arrangement.
  (1,2,5) et (5,1,2) sont deux arrangements distincts de 3 éléments de E.
- $E = \{R, V, B\}$
  Les arrangements d'un élément de E sont les singletons (R),(V),(B).
  Ceux de deux éléments sont les couples (R,B),(B,R),(R,V),(V,R),(B,V) et (V,B).
- si card $E = n$ et $p > n$, alors il n'existe pas d'arrangement de p éléments.

Propriété 1 (Nombre d'arrangements)
Soit le nombre A_n^p défini par $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n(n-1)\dots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$ si $0 \leq p \leq n$ et $A_n^p = 0$ si $p > n \geq 0$. Alors A_n^p est le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments.

2 Combinaisons, nombres C_n^p ("p parmi n")

Definition 2 Soit E un ensemble à n éléments.
On appelle *combinaison* de p éléments de E toute collection non ordonnée de p éléments distincts de E, c'est-à-dire toute partie de E contenant p éléments.

Exemples :
- $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  {1,3,5,6} est une combinaison de 4 éléments de E.
  {1,2,5} et {5,1,2} sont en fait une et une seule combinaison ({1,2,5}={5,1,2}) de 3 éléments de E.
- $E = \{R, V, B\}$
  Il n'y a que trois combinaisons de deux éléments de E : {R,B},{R,V} et {V,B}.

Propriété 2 (Nombre de combinaisons)

Soit le nombre $\binom{n}{p} = C_n^p$ défini par $\binom{n}{p} = C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-p+1)}^{p \text{ facteurs}}}{p!}$ si $0 \leq p \leq n$ et $C_n^p = 0$ si $p > n \geqslant 0$. Alors $\binom{n}{p} = C_n^p$ est le nombre de combinaisons de p éléments dans un ensemble à n éléments.

Propriété 3 (Quelques formules de combinatoire)
- $C_n^p = C_n^{n-p}$ ou $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$
- $\binom{n}{0} = C_n^0 = C_n^n = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = C_n^1 = C_n^{n-1} = \binom{n}{n-1} = n$
- Formule de Pascal : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ (ou $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$)
- Formule du binôme : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p} x^k y^{n-k}$.