Université de Franche-Comté
Année 2009/2010
Licence de Mathématiques
Discrétisation des Equations aux Dérivées Partielles

On veut résoudre numériquement le problème

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(a\frac{\partial u}{\partial x}\Big)(x,t), \quad 0 < x < \ell,\ 0 < t < T,\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + \alpha(t)u(0,t) = 0, \quad 0 < t < T,\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) + \beta(t)u(\ell,t) = 0, \quad 0 < t < T,\\
&u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < \ell.
\end{aligned}$$

La fonction $a(x,t)$ est régulière, telle que

$$\forall x \in [0,\ell] \quad \forall t \in [0,T] \quad 0 < \underline{a} \leq a(x,t) \leq \overline{a} < +\infty.$$

La fonction $u_0(x)$ est régulière et les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont bornées.

On choisit deux entiers N et P et on note

$$\begin{gathered}
\Delta x = \frac{\ell}{N}, \quad \Delta t = \frac{T}{P},\\
x_i = (i - 1/2)\Delta x, \quad 0 \leq i \leq N+1,\\
t_n = n\Delta t, \quad 0 \leq n \leq P, \quad t_{n+1/2} = (n+1/2)\Delta t, \quad 0 \leq n \leq P-1,\\
a^{(n)}_{i+1/2} = a(i\Delta x, t_n), \quad 0 \leq i \leq N,\ 1 \leq n \leq P,\\
\alpha^{(n)} = \alpha(t_n), \quad \beta^{(n)} = \beta(t_n), \quad 1 \leq n \leq P.
\end{gathered}$$

On choisit $\mathbf{U}^{(0)} = (u_i^{(0)})_{1\leq i\leq N}$ proche de $\mathbf{U}^{(0)}_{ex} = (u_0(x_i))_{1\leq i\leq N}$ quand Δx est petit. Pour $1 \leq n \leq P$, on cherche $\mathbf{U}^{(n)} = (u_i^{(n)})_{1\leq i\leq N}$ proche de $\mathbf{U}^{(n)}_{ex} = (u(x_i,t_n))_{1\leq i\leq N}$ quand Δx et Δt sont petits.

Si $\mathbf{V} \in \mathbf{R}^N$, on note

$$|\mathbf{V}|_0 = \Big(\sum_{i=1}^{N} \Delta x |v_i|^2\Big)^{1/2}.$$

1. On suppose dans cette question

$$\forall t \in [0,T] \quad \alpha(t) = \beta(t) = 0.$$

Montrer
$$\forall t \in [0,T] \quad \int_0^\ell |u(x,t)|^2 dx \leq \int_0^\ell |u_0(x)|^2 dx.$$

2. Soit $v(x)$ une fonction définie sur $[0,\ell]$, continûment dérivable

2.a. Montrer
$$\forall x \in [0,\ell] \quad |v(x)|^2 \leq \frac{1}{\ell}\int_0^\ell |v(x)|^2 dx + \int_0^\ell \left|\frac{d}{dx}|v(x)|^2\right| dx.$$

2.b. En déduire, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\forall x \in [0,\ell] \quad |v(x)|^2 \leq \left(\frac{1}{\ell}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_0^\ell |v(x)|^2 dx + \varepsilon\int_0^\ell \left|\frac{dv}{dx}(x)\right|^2 dx.$$

3. Dans cette question, on ne suppose pas les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ identiquement nulles. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que
$$\forall t \in [0,T] \quad \int_0^\ell |u(x,t)|^2 dx \leq e^{ct}\int_0^\ell |u_0(x)|^2 dx.$$

On pourra utiliser le résultat de la question 2 pour majorer $|u(0,t)|^2$ et $|u(\ell,t)|^2$.

On propose le schéma $(\mathcal{S})$ implicite suivant
$$\frac{1}{\Delta t}(u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}) =$$
$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(a_{i+1/2}^{(n+1)}(u_{i+1}^{(n+1)} - u_i^{(n+1)}) - a_{i-1/2}^{(n+1)}(u_i^{(n+1)} - u_{i-1}^{(n+1)})\right), \quad 1 \leq i \leq N,\ 0 \leq n \leq P-1,$$
$$\frac{1}{\Delta x}(u_1^{(n+1)} - u_0^{(n+1)}) + \frac{1}{2}\alpha^{(n+1)}(u_1^{(n+1)} + u_0^{(n+1)}) = 0, \quad 0 \leq n \leq P-1,$$
$$\frac{1}{\Delta x}(u_{N+1}^{(n+1)} - u_N^{(n+1)}) + \frac{1}{2}\beta^{(n+1)}(u_{N+1}^{(n+1)} + u_N^{(n+1)}) = 0, \quad 0 \leq n \leq P-1,$$
$$u_i^{(0)} = u_0(x_i), \quad 1 \leq i \leq N.$$

4. On suppose dans cette question
$$\forall t \in [0,T] \quad \alpha(t) \leq 0 \text{ et } \beta(t) \geq 0.$$

Montrer que le schéma $(\mathcal{S})$ permet de calculer des $\mathbf{U}^{(n)}$, $1 \leq n \leq P$.

5. Évaluer les composantes de l'erreur de consistance (pour $0 \leq n \leq P-1$)
$$\varepsilon_0^{(n+1/2)} = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t_{n+1}) + \alpha(t_{n+1})u(0,t_{n+1})$$
$$-\frac{1}{\Delta x}(u(x_1,t_{n+1}) - u(x_0,t_{n+1})) - \frac{1}{2}\alpha^{(n+1)}(u(x_1,t_{n+1}) + u(x_0,t_{n+1})),$$

$$\varepsilon_i^{(n+1/2)} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{n+1/2}) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(a\frac{\partial u}{\partial x}\Big)(x_i, t_{n+1/2}) - \frac{1}{\Delta t}(u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n))$$

$$+\frac{1}{\Delta x^2}\left(a_{i+1/2}^{(n+1)}(u(x_{i+1}, t_{n+1}) - u(x_i, t_{n+1})) - a_{i-1/2}^{(n+1)}(u(x_i, t_{n+1}) - u(x_{i-1}, t_{n+1}))\right),$$

$$1 \le i \le N,$$

$$\varepsilon_{N+1}^{(n+1/2)} = \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t_{n+1}) + \beta(t_{n+1})u(\ell, t_{n+1})$$

$$-\frac{1}{\Delta x}(u(x_{N+1}, t_{n+1}) - u(x_N, t_{n+1})) - \frac{1}{2}\beta^{(n+1)}(u(x_{N+1}, t_{n+1}) + u(x_N, t_{n+1})).$$

6. On suppose dans cette question

$$\forall t \in [0, T] \quad \alpha(t) = \beta(t) = 0.$$

Montrer

$$|\mathbf{U}^{(n)}|_0 \le |\mathbf{U}^{(0)}|_0, \quad 1 \le n \le P.$$

On pourra s'inspirer de la question 1.

7. Si $r_1, \dots, r_N$ sont des nombres réels, montrer

$$r_j \le \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i + \sum_{i=1}^{N-1} |r_{i+1} - r_i|, \quad 1 \le j \le N.$$

8. Déduire de la question 7, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|u_j^{(n+1)}|^2 \le \Big(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{\varepsilon}\Big)|\mathbf{U}^{(n+1)}|_0^2 + \frac{\varepsilon}{\Delta x}\sum_{i=1}^{N-1}|u_{i+1}^{(n+1)} - u_i^{(n+1)}|^2, \quad 1 \le j \le N.$$

9. Dans cette question, on ne suppose pas les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ identiquement nulles.

9.a. Montrer

$$\frac{1}{2\Delta t}\left(|\mathbf{U}^{(n+1)}|_0^2 - |\mathbf{U}^{(n)}|_0^2\right) \le -\frac{1}{\Delta x}\sum_{i=0}^{N} a_{i+1/2}^{(n+1)}|u_{i+1}^{(n+1)} - u_i^{(n+1)}|^2$$

$$+\frac{1}{2}a_{1/2}^{(n+1)}\alpha^{(n+1)}(u_1^{(n+1)} + u_0^{(n+1)})u_0^{(n+1)} - \frac{1}{2}a_{N+1/2}^{(n+1)}\beta^{(n+1)}(u_{N+1}^{(n+1)} + u_N^{(n+1)})u_{N+1}^{(n+1)}.$$

9.b. En déduire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, si Δx est assez petit,

$$(1 - c\Delta t)|\mathbf{U}^{(n+1)}|_0^2 \le |\mathbf{U}^{(n)}|_0^2, \quad 0 \le n \le P-1.$$

On pourra utiliser le résultat de la question 8 pour majorer

$$|u_1^{(n+1)}|^2 \text{ et } |u_N^{(n+1)}|^2,$$

ce qui permet de majorer

$$|u_0^{(n+1)}|^2 \text{ et } |u_{N+1}^{(n+1)}|^2.$$

9.c. En conclure que le schéma $(\mathcal{S})$ permet de calculer des $\mathbf{U}^{(n)}$, $1 \le n \le P$ et qu'il est stable pour la norme $|\cdot|_0$.

10. S'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|\mathbf{U}^{(0)} - \mathbf{U}_{ex}^{(0)}|_0 \le c\Delta x^2,$$

montrer que le schéma $(\mathcal{S})$ est convergent pour la norme $|\cdot|_0$ et indiquer son ordre.