

LICENCE 2 ANNÉE - PROBABILITÉS ÉLÉMENTAIRES
TD – Feuille 1

Echauffement

Exercice 1 On tire 3 boules avec remise d'une urne contenant 3 boules numérotées de 1 à 3. On note A_i l'événement : « la i -ème boule tirée porte le numéro 1 ». Exprimer en fonction des A_i les événements suivants :

B : « on obtient 3 fois la boule 1 »

C : « on obtient au moins une fois la boule 1 »

D : « on obtient une seule fois la boule 1 »

E : « la boule 1 est obtenue pour la première fois au 2^{ème} tirage »

F : « la boule 1 est obtenue pour la première fois au 3^{ème} tirage »

G : « la boule 1 est obtenue pour la première fois au 1^{er} tirage ou n'est pas obtenue »

Modèles du type uniforme

Exercice 2 On choisit une carte dans un paquet de 52.

– Modéliser la situation

– Calculer les probabilités de tirer

A : un as B : un coeur C : un trois de trefle ou un six de carreaux D : pas de coeur
 E : un dix ou un pique F : ni un quatre ni un trefle.

Exercice 3 On lance deux dés non truqués.

- 1) On suppose qu'il y a un dé vert et un dé rouge. Donner la modélisation naturelle dans ce cas, c'est-à-dire un choix qui paraît naturel de (Ω, P) .
- 2) Par quelle partie de cet Ω modélise-t-on l'événement "la somme des chiffres obtenus vaut 7"? Que vaut sa probabilité?
- 3) Proposer une autre modélisation, c'est-à-dire un autre choix de (Ω, P) , par exemple dans le cas d'un observateur daltonien.
- 4) Par quelle partie de ce deuxième Ω modélise-t-on l'événement "la somme des chiffres obtenus vaut 7"? Que vaut sa probabilité dans ce nouveau modèle? Doit-elle être la même que celle de la question 2)?

Exercice 4 On considère un chapeau de magicien contenant deux lapins jaunes et deux lapins noirs. On extrait un premier lapin (que l'on ne remet pas dans le chapeau) puis un deuxième.

- 1) Proposer un Ω associé au choix de la probabilité uniforme pour modéliser cette expérience aléatoire.
- 2) Donner une autre modélisation, c'est-à-dire un autre choix de (Ω, P) .
- 3) Comment modélise-t-on l'événement "le premier lapin extrait est jaune" dans chacun des deux modèles? Que vaut sa probabilité dans chacun des deux modèles?
- 4) Comment modélise-t-on l'événement "le deuxième lapin extrait est jaune" dans chacun des deux modèles? Que vaut sa probabilité dans chacun des deux modèles?
- 5) Comment modélise-t-on l'événement "les deux lapins extraits sont jaunes" dans chacun des deux modèles? Que vaut sa probabilité dans chacun des deux modèles?

Exercice 5 Winnie l'Ourson voyage en ballon. Il a 20 poches ; ses amis, le connaissant bien, ont glissé un bonbon au miel dans chacune. Toutes les 10 minutes Winnie ressent un petit creux et mange un bonbon ; étant un ourson de très peu d'intelligence, il les cherche en fouillant ses poches au hasard, sans tenir compte de ce qu'il a fait avant.

- Trouver la probabilité que la recherche du même bonbon commence par une poche vide.
- Trouver la probabilité que cette recherche aboutit à la seconde poche.

Exercice 6 On pose deux tours au hasard sur un échiquier. Modéliser la situation. Trouver la probabilité que les deux tours "ne se voient pas".

Exercice 7 On regarde les quatre chiffres d'un numéro de voiture dans une grande ville. Modéliser la situation et trouver la probabilité que :

- 1) Tous les chiffres coïncident ;
- 2) tous les chiffres sont différents ;
- 3) trois chiffres coïncident ;
- 4) il y a deux couples de chiffres qui coïncident ;
- 5) deux chiffres coïncident et les autres sont différents.

Exercice 8 Soit $S = \{1, \dots, N\}$. Trouver la probabilité qu'un élément de S pris au hasard est divisible par 2 (modéliser d'abord la situation).

Exercice 9 Soit $S = \{-N, \dots, N\}$. On prend un élément au hasard et on regarde sa valeur absolue. Proposer deux modélisations différentes pour ce problème (deux choix de (Ω, \mathcal{F}, P)).

Exercice 10 Le rayon de la bibliothèque familiale chez M. et Mme Manu contient 40 livres. Le petit Manu a accédé au rayon et s'est longtemps amusé à les changer de place.

Quelle est la probabilité que les trois volumes du Seigneur des Anneaux de sa grande soeur sont rangés dans l'ordre, de gauche à droite (pas forcément à côté) ? Commencer par modéliser la situation.

Indication : pour le calcul, utilisez la symétrie.

Exercice 11 Pierre et Paul font partie d'un groupe de N personnes. On s'intéresse au nombre de personnes séparant Pierre et Paul dans chacun des cas suivants :

- 1) Les personnes sont disposées en file indienne.
- 2) Les personnes sont assises autour d'une table.

Modéliser chacun des cas.

Exercice 12 Soit $S = \{1, \dots, N\}$ et $\mathcal{P}(S)$ denote l'ensemble des sous-ensembles de S . On choisit dans $\mathcal{P}(S)$ deux éléments \mathcal{A}, \mathcal{B} (on choisit "avec remise").

- Modéliser la situation.
- Trouver la probabilité de l'événement $E = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est vide.
- Trouver la probabilité de l'événement $F = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est vide. Indication : raisonner séparément sur chaque élément de S , utiliser surnoisement l'indépendance.
- Quelle relation existe-t-elle entre les événements E et F ?