Université de Franche-Comté
Département de Mathématiques Février 2008

LICENCE 2 ANNÉE - PROBABILITÉS ÉLÉMENTAIRES
TD – Feuille 2

Modèles géométriques

Exercice 1 Un point a est pris au hasard dans le carré de côté 1. Modéliser la situation. Trouver la probabilité des événements suivants (pour $x \in \mathbb{R}^+$) :

- la distance de a jusqu'au côté donné du carré est plus petite que x
- la distance de a jusqu'à la frontière du carré est plus petite que x
- la distance de a jusqu'au centre du carré est plus petite que x
- la distance de a jusqu'au plus proche des sommets est plus petite que x
- la distance de a jusqu'au plus lointain des sommets est plus petite que x.

Exercice 2 On considère un solide en forme de demi-boule.

- On laisse le solide tomber par terre; modéliser la situation et trouver la probabilité qu'il tombe sur la partie bombée.
- On pose une fourmi sur le solide et la laisse courir. Apres un long moment, on regarde où la fourmi se trouve. Modéliser la situation et trouver la probabilité qu'on retrouve la bestiole sut la partie bombée.

Exercice 3 Une grande salle est pavée de parquet avec des lattes en forme de k-angles réguliers de coté a; on jette par terre une pièce de monnaie de rayon r. On regarde lévénement "la pièce se retrouve sur une seule latte". Modéliser la situation et trouver la probabilité associée pour $k = 3, 4$ et 6.

Modèles plus complexes

Exercice 4 Vous vous trouvez aux Jeux Olympiques 2008 à Pékin. Un athlète lance un javelot devant lui en ligne droite. Pour modéliser la situation, on choisit $\Omega = \mathbb{R}^+$, la tribu $\mathcal{F}$ engendrée par tous les intervalles $[0, t], t \geq 0$, et P donnée par $P([0, t]) = 1 - e^{\lambda t}$, où $\lambda > 0$ est une constante. (Il y a toute une construction pour définir P sur $\mathcal{F}$ tout entier; on admet que c'est possible. On voit dans cet exercice une approche de cette définition dans un cas particulier).

- Calculer $P(\{0\})$. Calculer $P(]a, b])$ pour $0 < a < b$.
- Calculer $P(\{1\})$ (considérer $[0, 1] = [0, 1/2] \cup]1/2, 1/3] \cup]1/3, 1/4] \cup \ldots \cup \{1\})$. Calculer ensuite $P(c)$ pour tout $c \in \mathbb{R}^+$.
- Peut on considérer qu'à chaque lancée, l'athlète réalise un miracle ? La lancée à 100,000... metres est-elle "plus miraculeuse" où "moins miraculeuse" que celle à 3,1415... metres ?
- Le modèle est-il bien réaliste ? Proposez-en un meilleur.

Exercice 5 On considère une suite d'urnes notées U_n, $n = 1, 2, \ldots$. L'urne U_n contient 4^n boules dont 3^n rouges. On choisit l'urne U^n avec la probabilité $1/2^n$, et on en tire une boule au hasard. Proposer une modélisation (choix de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$). Trouver la probabilité que la boule tirée est rouge.

Exercice 6 On considère la situation suivante. Trois individus a, b et c jouent au ping-pong sur une seule table selon les règles suivantes :

- a et b commencent,
- après chaque partie, le perdant est remplacé,
- le jeu s'arrête quand un même joueur gagne deux parties de suite.

On suppose que chaque joueur a autant de chances de gagner une partie.

1) Comment peut-on modéliser cette expérience aléatoire ?
2) Quelle est la probabilité de l'événement "le joueur b n'a pas gagné de parties" ?
3) Quelle est la probabilité de l'événement "le joueur b a gagné trois parties" ?

Exercice 7 On considère un jeu télévisé dans lequel le candidat a le choix entre trois portes. Le cadeau se trouve derrière une seule des trois portes. Une fois que le choix du candidat est fait, l'animateur (qui sait où est le cadeau) ouvre une autre porte derrière laquelle il n'y a rien. Il propose au candidat de maintenir son choix ou de le changer.

1) Proposer un Ω associé au choix de la probabilité uniforme pour modéliser cette expérience aléatoire.
2) Vous etes libres de rajouter des informations supplémentaires ! Par exemple, on peut considérer un candidat opiniâtre. Donner une autre modélisation, c'est-à-dire un autre choix de (Ω, P).
3) Comment modélise-t-on l'événement "le candidat gagne" dans chacun des deux modèles ? Que vaut sa probabilité dans chacun des deux modèles ?

Exercice 8 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $B \in \mathcal{F}$ tel que $0 < P(B) \leq 1$. Montrer que l'application $Q : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}^+$ donnée par $Q(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ pour tout $A \in \mathcal{F}$ est une probabilité sur $\mathcal{F}$. Quelle interprétation vous pouvez donner à cette nouvelle probabilité ? (considérez, par exemple, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, | \, x^2 + y^2 \leq 1\}$ avec la probabilité uniforme, et $B = \{x > 0\}$. La construction précise de $\mathcal{F}$ sera l'affaire du cours "mesure et intégration" en L3Math).